Программа курса
"Управление большими данными"

1. SVD-разложение прямоугольных матриц. Виды SVD-разложения: full SVD, truncated SVD. Свойства SVD-разложения. Теорема Эккарта-Янга. Низкоранговая аппроксимация матриц.

   Вопросы:

   (a) Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathrm{rank} A = r$. Доказать, что
   $$\begin{cases} A\boldsymbol{v}_i = \sigma_i \boldsymbol{u}_i, & i = 1, \dots, r \\ 0, & i = r+1, \dots, n. \end{cases} \quad \begin{cases} A^T\boldsymbol{u}_i = \sigma_i \boldsymbol{v}_i, & i = 1, \dots, r \\ 0, & i = r+1, \dots, m. \end{cases}.$$

   (b) Показать, что спектральная норма и норма Фробениуса матрицы не меняются при умножении матрицы на произвольную ортогональную матрицу.

   (c) Показать, что
   $$\| A \|_2 = \sigma_1, \quad \| A \|_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_p^2},$$
   где $p = \min\{m, n\}$.

   (d) Пусть матрица A имеет сингулярное разложение $A = U\Sigma V^T$. Пояснить смысл матриц U и V в этом разложении.

   (e) Показать, что если две матрицы ортогонально подобны, то они имеют одинаковые сингулярные числа и существует связь между их сингулярными векторами.

   (f) Зная сингулярные числа матрицы A найти сингулярные числа матрицы A^T и αA, $\alpha \in \mathbb{C}$.

   (g) Показать, что модуль определителя матрицы равен произведению ее сингулярных чисел.

   (h) Предполагая, что матрица A невырождена найти связь между сингулярными числами матрицы A и A^{-1}.

2. Скелетное разложение матрицы. Псевдообратная матрица и ее свойства. Вычисление псевдообратных матриц на основе скелетного и сингулярного разложения.

3. Метод наименьших квадратов. Псевдорешение системы линейных алгебраических уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Система нормальных уравнений и исследование ее решений. Структура общего псевдорешения системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Нормальное псевдорешение. Представление общего и нормального псевдорешения через сингулярные базисы матрицы A.

   Вопросы:

   (a) Показать, что матрица псевдообратная матрица $A^\dagger$ матрицы A удовлетворяет соотношениям:
   $$A^\dagger A = (A^\dagger A)^T, \quad AA^\dagger = (AA^\dagger)^T, \quad (AA^\dagger)^2 = AA^\dagger, \quad (A^\dagger A)^2 = A^\dagger A.$$

   (b) Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ имеет сингулярное разложение $A = U\Sigma V^T$. Выразить через U, Σ, V сингулярные разложения матриц:
   $$(A^TA)^{-1}, \quad (A^TA)^{-1}A^T, \quad A(A^TA)^{-1}, \quad A(A^TA)^{-1}A^T.$$

   (c) Доказать, что для любой матрицы A и числа α, не равного нулю, $(\alpha A)^\dagger = \frac{1}{\alpha}A^\dagger$.

   (d) Доказать, что для любых ортогональных матриц U и V:
   $$(UA)^\dagger = A^\dagger U^T, \quad (AV)^\dagger = V^T A^\dagger.$$

(e) Доказать, что сингулярные базисы матрицы A являются сингулярными и для псевдообратной матрицы $A^\dagger$.

(f) Найти связь между собственными значениями матриц A и $A^\dagger$.

(g) Показать, что нормальное псевдорешение $\hat{\boldsymbol{z}}$ системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ может быть представлено в виде

$$\hat{\boldsymbol{z}} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_k \boldsymbol{v}_k,$$

где $\{\boldsymbol{v}_k\}$ - сингулярный базис матрицы A, $r = \mathrm{rank} A$.

4. QR-разложение матриц. Виды QR-разложения. QR-разложение с использованием метода Грама-Шмидта. QR-разложение с использованием ортогональных преобразований. Матрицы вращения. Матрицы отражения.

5. QR-алгоритм. Теорема Шура. Нахождение собственных значений и собственных векторов матриц.

Вопросы:

(a) Показать, что ортогональные преобразования сохраняют длины и углы между векторами.

(b) Дан ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ и вектор $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$. Построить матрицу вращения G такую, что $G\boldsymbol{x} = \mu \boldsymbol{e}_1$, где μ - число (ясно, что $|\mu| = |\boldsymbol{x}|$).

(c) Найти условие на вектор $\boldsymbol{u}$, при выполнении которого матрица вида $H = I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ будет ортогональной.

(d) Дан ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ и вектор $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$. Построить матрицу отражения H такую, что $H\boldsymbol{x} = \mu \boldsymbol{e}_1$, где μ - число (ясно, что $|\mu| = |\boldsymbol{x}|$).

(e) Найти определитель матрицы вращения и матрицы отражения.

(f) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы отражения.

(g) Доказать, что произведение матриц отражения есть ортогональная матрица. Найдите определитель произведения матриц отражения.

(h) Сформулировать алгоритм приведения матрицы A к вернему треугольному виду с помощью преобразований Гивенса.

(i) Сформулировать алгоритм приведения матрицы A к вернему треугольному виду с помощью преобразований Хаусхолдера.

(j) Пусть $A_k = Q_k R_k$, $A_{k+1} = R_k Q_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Показать, что для $k \geq 0$ выполняются равенства

$$A_k = (Q_0 \ldots Q_{k-1})^{-1} A (Q_0 \ldots Q_{k-1}), \quad A^k = (Q_0 \ldots Q_{k-1})(R_0 \ldots R_{k-1}).$$

(k) Пусть $A_k - s_k I = Q_k R_k$, $A_{k+1} = R_k Q_k + s_k I$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Показать, что для $k \geq 0$ выполняются равенства

$$\prod_{i=0}^{k} (A - s_i I) = (Q_0 \ldots Q_{k-1})(R_0 \ldots R_{k-1}).$$

Литература

1. Шевцов Г.С., Крюкова О.Г., Мызникова Б.И. *Численные методы линейной алгебры.* СПб: Лань, 2011.

2. Вержбицкий В.М. *Вычислительная линейная алгебра.* М: Высшая школа, 2009.

3. Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения.* М: Мир, 2001.

4. Gene H. Golub, Charles F. Van Loan *Matrix Computations (4th ed.)*. The Johns Hopkins University Press, 2013.

5. Lars Elden *Matrix Methods in Data Mining and Pattern Recognition*. SIAM, 2007.

6. Lloyd N. Trefethen, David Bau III *Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997

7. Yuji Nakatsukasa *Numerical Linear Algebra* (lecture notes, University of Oxford, 2024-25).