## Вариант № 1

1.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$(x-a)^2+y^2=1.$$

1.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$2(y+y')=x+2.$$

1.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ (x^3+2x)y^2dy=x\,dx;\quad 2.\ \ 2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0,\ y(0)=2.$$

1.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy'=y(\ln y-\ln x);\quad 2.\ \ xy\,dy-y^2dx=(x+y)^2e^{-y/x}dx;$$
$$3.\ \ y'=\frac{x+2y-3}{4x-y-3};\quad 4.\ \ (y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0,\ y(0)=1.$$

1.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y'+2xy=xe^{-x^2};\quad 2.\ \ 2y\,dx+(y^2-6x)dy=0;$$
$$3.\ \ (x^2-1)y'-xy=x^3-x,\ y(2)=1{,}5.$$

1.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y'=x^3y^3-xy;\quad 2.\ \ 2(xy'+y)=y^2\ln x,\ y(1)=2.$$

1.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \Big(y+\frac{2}{x^2}\Big)dx+\Big(x+\frac{3}{y^2}\Big)dy=0;\quad 2.\ \ \frac{3x^2+y}{y^2}dx=\frac{2x^3+xy+2y^3}{y^3}dy.$$

1.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2+y^2+2x)dx+2y\,dy=0.$$

1.9. Решить уравнения

$$1.\ \ (xy^2+x)dx+(y^3-x^3y^3)dy=0;\quad 2.\ \ xy'+y=y^2;\quad 3.\ \ (y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0;$$
$$4.\ \ y'=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x);\quad 5.\ \ xe^{y^2}dx+(x^2ye^{y^2}+\operatorname{tg}^2 y)dy=0.$$

1.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y=x+y'-\ln y';\quad 2.\ \ x[(y')^2-1]=2y';\quad 3.\ \ y=xy'-(y')^2.$$

1.11. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная единице.

## Вариант № 2

2.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ae^{x/a}.$$

2.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' = 3y.$$

2.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ e^y(1+y') = 1; \quad 2.\ \ y' = 10^{x+y}; 2.\ \ y' = \frac{1}{3x+y},\ y(0) = 1.$$

2.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y' = x/y + y/x; \quad 2.\ \ y' = 2xy/(x^2 - y^2);$$
$$3.\ \ (2x-2)dy = (x+2y-3)dx; \quad 4.\ \ (xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = y^2,\ y(1) = 0.$$

2.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' + x^2y = x^2; \quad 2.\ \ y\,dx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0;$$
$$3.\ \ y' + x/y = \sin x,\ y(\pi) = 1/\pi.$$

2.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ 3x\,dy = y(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)dx;$$
$$2.\ \ 2y' + y\cos x = y^{-1}(1+\sin x)\cos x,\ y(0) = 1.$$

2.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0; \quad 2.\ \ e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$$

2.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$$

2.9. Решить уравнения

$$1.\ \ e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0; \quad 2.\ \ y' - y = y^3;$$
$$3.\ \ (y^4 - 2x^2y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0; \quad 4.\ \ y' = \frac{x}{y}2^{y/x} + \frac{y}{x};$$
$$5.\ \ \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big)dx + \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\Big)dy = 0.$$

2.10. Решить уравнения

$$1.\ \ x = (y')^3 + y'; \quad 2.\ \ 2xy - y = y'\ln yy'; \quad 3.\ \ y + xy' = 4\sqrt{y'}.$$

2.11. Моторная лодка движется в спокойной воде со скорость 12 км/ч. На полном ходу её мотор был выключен. Через $t = 10$ с скорость лодки уменьшилась до 6 км/ч. Считая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна её скорости, найти скорость лодки через 1 мин после остановки мотора.

## Вариант № 3

3.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 + y^2 = ax.$$

3.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$yy' + x = 0.$$

3.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y^2y' = 1 + 2x; \quad 2.\ \ y'(y + x) = 1,\ y(0) = 1.$$

3.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ x\,dy - y\,dx = y\,dy; \quad 2.\ \ (x - y)dy = (x + y)dx;$$
$$3.\ \ (x + y - 2)dy = (2y - 2)dx; \quad 4.\ \ \frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{x} - \frac{\sqrt{y - x}}{2y - x},\ y(1) = 1.$$

3.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' + y \operatorname{ctg} x = \sin x; \quad 2.\ \ xy' - x^2 \cos x = y;$$
$$3.\ \ y' - \frac{y}{x} = -\frac{2\ln x}{x},\ y(1) = 1.$$

3.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ 2xyy' - y^2 + x = 0; \quad 2.\ \ 3(xy' + y) = y^2 \ln x,\ y(1) = 3.$$

3.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}; \quad 2.\ \ (1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx = (1 - y\sqrt{x^2 + y^2})dy.$$

3.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$y(1 + xy)dx - x\,dy = 0.$$

3.9. Решить уравнения

$$1.\ \ (y^4 + 1)x\,dx - y(1 + x^2)dy = 0; \quad 2.\ \ (1 - x^2)y' - xy = xy^2; \quad 3.\ \ y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy};$$
$$4.\ \ e^{x/y}dx - \frac{x}{y}\Big(e^{x/y} + \frac{y}{x}\Big)dy = 0; \quad 5.\ \ \Big(xy^2 + \frac{x^2}{y^2}\Big)dx + \Big(x^2y - \frac{2x^3}{3y^3}\Big)dy = 0.$$

3.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y'(x - \ln y') = 1; \quad 2.\ \ (y')^2 - (y')^3 = y^2; \quad 3.\ \ (y')^3 = 3(xy' - y).$$

3.11. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведённой из произвольной точки кривой, равен двум.

## Вариант № 4

4.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax + a^2.$$

4.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y(y' + x) = 1.$$

4.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ x^2y' = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{tg} y; \quad 2.\ \ y' = \sqrt{2x + y - 3},\ y(0) = 4.$$

4.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 2.\ \ x\,dy = y\ln\frac{y}{x}dx;$$
$$3.\ \ (9x - y - 8)dy = (x + 7y - 8)dx; \quad 4.\ \ (y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(0) = 1.$$

4.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ (1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2; \quad 2.\ \ y' = 2y + e^{3x};$$
$$3.\ \ y' - \frac{1}{\cos x} = y\operatorname{tg} x,\ y(0) = 0.$$

4.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ xy^2dy = (1 - xy^3)dx; \quad 2.\ \ y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 1.$$

4.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0; \quad 2.\ \ \frac{1 + xy}{x^2y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy = 0.$$

4.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2 + y)dx - x\,dy = 0.$$

4.9. Решить уравнения

$$1.\ \ (1 + y^2)dx - 2y(1 + x)^2dy = 0; \quad 2.\ \ (1 + e^x)yy' = e^x; \quad 3.\ \ y\,dx + 2(\sqrt{xy} - x)dy = 0;$$
$$4.\ \ xy' - y = x\left(1 + \operatorname{tg}\frac{y}{x}\right); \quad 5.\ \ \frac{1 + xy}{x^2y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy = 0.$$

4.10. Решить уравнения

$$1.\ \ (y' + 1)^3 = (y' - y)^2; \quad 2.\ \ x = y'\sqrt{(y')^2 + 1}; \quad 3.\ \ y = 2xy' - 4(y')^3.$$

4.11. Скорость обесценивания оборудования вследствие износа пропорциональна в каждый момент времени его фактический стоимости. Если начальная стоимость оборудования $S_0$, какова будет его стоимость по истечении $t$ лет?

## Вариант № 5

5.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

5.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

5.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y' - xy^2 = 2xy; \quad 2.\ \ y' = \frac{2}{x+2y} - 3,\ y(0) = 0{,}5.$$

5.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y' \operatorname{tg} \frac{y+2}{x+1} = \frac{y+2}{x+1}; \quad 2.\ \ xyy' = x^2 + y^2;$$

$$3.\ \ y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}; \quad 4.\ \ (y^2 - x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(0) = 1.$$

5.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ 2xy' - y = x\ln x; \quad 2.\ \ (y' - y)x = (1+x^2)e^x;$$

$$3.\ \ y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x,\ y(\pi/2) = 0.$$

5.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ (1+x^2)dy = (xy + x^2y^2)dx; \quad 2.\ \ 2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2+3\cos x)y^{-1},\ y(0) = 1.$$

5.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0; \quad 2.\ \ (2x - \ln(y+1))dx - \frac{x+y}{y+1}dy = 0.$$

5.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0.$$

5.9. Решить уравнения

$$1.\ \ 3e^x \operatorname{tg} y\,dx + \frac{1+e^x}{\cos^2 y}dy = 0; \quad 2.\ \ y(1+x^2)y' = 1 + y^2; \quad 3.\ \ x\,dy = y\left(1 + \ln\frac{x}{y}\right)dx;$$

$$4.\ \ y^2 - 4xy + 4x^2y' = 0; \quad 5.\ \ (\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)dy = 0.$$

5.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y' = e^{xy'/y}; \quad 2.\ \ y = xy' - 2x^2(y')^3; \quad 3.\ \ 2xy' - y = \ln y'.$$

5.11. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до пересечения с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:2.

## Вариант № 6

6.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий
$$y = ax^2.$$

6.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения
$$y' = x - e^y.$$

6.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными
$$1.\ \ y'x^2y + 1 = x^2; \quad 2.\ \ y' = \frac{2x+2y-1}{x+y},\ y(1) = 0.$$

6.4. Решить однородные уравнения
$$1.\ \ (x^2+xy)y' = x\sqrt{x^2-y^2} + xy + y^2; \quad 2.\ \ x(y' + e^{y/x}) = y;$$
$$3.\ \ xy' - y = \sqrt{x^2-y^2},\ y(2) = 1; \qquad 4.\ \ y' - \frac{x+3y+4}{3x-6},\ y(1) = 2.$$

6.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным
$$1.\ \ y' + 2xy = 2xe^{-x^2}; \quad 2.\ \ dy = \left(\frac{3y}{x} + x\right)dx;$$
$$3.\ \ x(dy - y\,dx) = e^x dx,\ y(1) = e.$$

6.6. Решить уравнение Бернулли
$$1.\ \ x\,dy + 2y\,dx = x^5y^2dx; \quad 2.\ \ y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x,\ y(1) = 1/\operatorname{sh} 1.$$

6.7. Решить уравнение в полных дифференциалах
$$1.\ \ \frac{x\,dy}{x^2+y^2} - \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx = 0; \quad 2.\ \ x^y \ln x y' + yx^{y-1} = 0.$$

6.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения
$$xydx - (y^3 + x^2y + x^2)dy = 0.$$

6.9. Решить уравнения
$$1.\ \ (y + y\ln x)dx + (x - xy)dy = 0; \quad 2.\ \ yy' + x = 1; \quad 3.\ \ xy' = y\ln\frac{y}{x};$$
$$4.\ \ (x^2+y^2)dx + 2xy\,dy = 0; \quad 5.\ \ 3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$$

6.10. Решить уравнения
$$1.\ \ y = (y')^2 + (y')^3; \quad 2.\ \ y = \ln(1+y'); \quad 3.\ \ 2(y')^2(y - xy') = 1.$$

6.11. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой жидкости, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Если при прохождении слоя толщиной 3 м поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого света дойдёт до глубины 15 м?

## Вариант № 7

7.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

7.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' + y = 0.$$

7.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ (x+1)yy' + 3 = 2y; \quad 2.\ \ y' = \cos(y - x),\ y(\pi) = 0.$$

7.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y' = \frac{y}{x} + \sin\Big(\frac{y}{x}\Big); \quad 2.\ \ y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3};$$
$$3.\ \ y' = \frac{x - y}{x + y},\ y(2) = 1; \quad 4.\ \ y' = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2},\ y(1) = 1.$$

7.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x; \quad 2.\ \ y' = x + y;$$
$$3.\ \ \operatorname{ch} x\, dx = (1 + \operatorname{sh} x)dy,\ y(1) = \ln 2.$$

7.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ (1 + x^2)dy - xy\, dx = x^2y^2dx; \quad 2.\ \ y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}y^4 \sin x,\ y(0) = 1.$$

7.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ e^{-x}dy = (ye^{-x} - 2x)dx; \quad 2.\ \ (3x^2 + 6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy - 3y^2)dy = 0.$$

7.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$$

7.9. Решить уравнения

$$1.\ \ e^{-x}(1 - x)dx - \operatorname{tg} y\, dy = 0; \quad 2.\ \ x^2y' + y^2 = y; \quad 3.\ \ (2x - y)dx + (x + y)dy = 0;$$
$$4.\ \ xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y; \quad 5.\ \ \Big(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\Big)dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy = 0.$$

7.10. Решить уравнения

$$1.\ \ (y')^4 - (y')^2 = y^2; \quad 2.\ \ 2xy' - y = y' \ln(yy'); \quad 3.\ \ y = 2xy' + \frac{1}{(y')^2}.$$

7.11. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют с полярным радиусом и полярной осью равные углы.

## Вариант № 8

8.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax + b.$$

8.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x+y}.$$

8.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ (2x + xy)dy - (y - x^2y)dx = 0; \quad 2.\ \ y' = \sqrt{4x + 2y - 1},\ y(1) = 1.$$

8.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y; \quad 2.\ \ (2xy + y^2)dx = (x^2 - y^2)dy;$$
$$3.\ \ y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}; \quad 4.\ \ (x^2 - 3y^2)dx + 2xy\,dy = 0,\ y(2) = 1.$$

8.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y + y' \ln^2 y = (x + 2\ln y)y'; \quad 2.\ \ dy + 3y\,dx = e^{2x}dx;$$
$$3.\ \ y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy = 2dy,\ y(\pi/8) = 2.$$

8.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ dy + \frac{y}{x}dx = -xy^2dx; \quad 2.\ \ xy' + y = y^2 \ln x,\ y(1) = 1.$$

8.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{1}{y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)dy = 0; \quad 2.\ \ (2x^3 - xy^2)dx = (x^2y - 2y^3)dy.$$

8.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(xy - x^2)y' + (y^2 - 3xy - 2x^2) = 0.$$

8.9. Решить уравнения

$$1.\ \ \operatorname{arctg} x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0; \quad 2.\ \ y' \sin x = y\sqrt{\ln y};$$
$$3.\ \ (x + y)dx - (x + y)dy = 0; \quad 4.\ \ x^2y' = y^2 + xy;$$
$$5.\ \ \frac{y}{x^2}\cos\frac{x}{y}dx - \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right)dy = 0.$$

8.10. Решить уравнения

$$1.\ \ (y')^3 + y^2 = xyy'; \quad 2.\ \ y = 2xy' + y^2y'; \quad 3.\ \ xy' - y = \ln y'.$$

8.11. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, входит в достаточно толстую стену. Сопротивление стены сообщает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату её скорости с коэффициентом пропорциональности $k = 7$ м$^{-1}$. Найти скорость пули через 0,001 с после вхождения в стену.

## Вариант № 9

9.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = e^x(ax + b).$$

9.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$x^2 + y^2y' = 1.$$

9.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ (\ln y)^2 y' = y(1 + x^2); \quad 2.\ \ y' - y = 2x - 3,\ y(1) = 2.$$

9.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ x\,dy - y\cos\Bigl(\ln\frac{y}{x}\Bigr)dx = 0; \quad 2.\ \ xy' = y + x\operatorname{tg}\frac{y}{x};$$

$$3.\ \ 3y' = \frac{x^2}{y^2} + 10\frac{y}{x} + 10; \quad 4.\ \ xy' + y\Bigl(1 + \ln\frac{y}{x}\Bigr) = 0,\ y(1) = e.$$

9.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ xy' = y + x^2\cos x; \quad 2.\ \ y\,dx - dy = y^2dx + x\,dy;$$

$$3.\ \ (xy + \sqrt{y})dy + y^2dx = 0,\ y(-1/2) = 4.$$

9.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}; \quad 2.\ \ xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x,\ y(1) = 1.$$

9.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0; \quad 2.\ \ 2x^3y\,dy = -(3x^2y^2 + 7)dx.$$

9.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$xy' + (\sin y - 3x^2\cos y)\cos y = 0.$$

9.9. Решить уравнения

$$1.\ \ y' = e^{6x+y} + e^{6x-y}; \quad 2.\ \ 1 + \ln\frac{y}{x} + \ln^2\frac{y}{x} = \frac{x}{y}y'; \quad 3.\ \ (x + 6\sqrt{x^2 + y^2})y' = y;$$

$$4.\ \ \frac{\operatorname{ctg} y}{\cos^2 x}dx + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y}dy; \quad 5.\ \ (2x - \ln(y + 1))dx - \tfrac{x+y}{y+1}dy = 0.$$

9.10. Решить уравнения

$$1.\ \ x[(y')^2 - e^{2y}] = -2y'; \quad 2.\ \ y = (y' - 1)e^{y'}; \quad 3.\ \ y = xy' + \cos y'.$$

9.11. Нормаль $AB$ к некоторой кривой пересекает ось $Ox$ в точке $B$. Доказать, что если абсцисса точки $B$ вдвое больше абсциссы точки $A$, то кривая является равнобочной гиперболой.

## Вариант № 10

10.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = a\sin(x+b).$$

10.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = \frac{y-3x}{x+3y}.$$

10.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ xy^2y' = \ln x; \quad 2.\ \ (xy^2+x)dx + (x^2y-y)dy = 0,\ y(0)=1.$$

10.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}; \quad 2.\ \ (2x-y+1)dx = (2x+y-1)dy;$$
$$3.\ \ xy' = y + \frac{y}{\sin(y/x)},\ y(e)=\pi e; \quad 4.\ \ (xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x,\ y(1)=0.$$

10.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' - e^x(x^2+1) = \frac{2y}{x+1}; \quad 2.\ \ (1+y^2)dx = (\operatorname{arctg} y - x)dy;$$
$$3.\ \ y' - y\operatorname{tg} x = \cos^{-1} x,\ y(0)=0.$$

10.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' = y(y^3\cos x + \operatorname{tg} x); \quad 2.\ \ 2(xy'+y) = y^2\ln x,\ y(1)=0{,}5.$$

10.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (2x-\ln(y+1))dx - \frac{x+y}{y+1}dy = 0; \quad 2.\ \ 3x^2(1+\ln y)dx = \Big(2y - \frac{x^3}{y}\Big)dy.$$

10.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2+1)(2xdx + \cos ydy) = 2x\sin ydx.$$

10.9. Решить уравнения

$$1.\ \ y(x+2)dx + x^2(y-1)dy = 0; \quad 2.\ \ \sqrt{1+\cos 2x} + (1+\sin y)y' = 0;$$
$$3.\ \ y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}; \quad 4.\ \ (x+e^y)dx + (\cos y + xe^y)dy = 0; \quad 5.\ \ (\sqrt{xy}-x)dy = -ydx.$$

10.10. Решить уравнения

$$1.\ \ x = 2y' - \ln y'; \quad 2.\ \ (y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y; \quad 3.\ \ xy'(y'+2) = y.$$

10.11. Материальная точка массой $m = 1$ г движется прямолинейно. На неё действует в направлении движения сила, пропорциональная времени, протекшему с момента, когда скорость точки была равна нулю, с коэффициентом пропорциональности $k_1 = 2$ г·см/с$^2$. Кроме того, точка испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости движения, с коэффициентом пропорциональности $k_2 = 3$ г/с. Найти скорость точки через 3 с после начала движения.

## Вариант № 11

11.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^2 + bx + c.$$

11.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

11.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ xyy' = 1 - x^2; \quad 2.\ \ (x+2y)y' = 1,\ y(0) = -1.$$

11.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ (x^2+y^2)y' = 2xy; \quad 2.\ \ 3x^4y^2dy = (4x^6 - y^6)dx; \quad 3.\ \ xy' + \frac{x^3}{y^2} = y;$$
$$4.\ \ (y+2)dx - (2x+y-4)dy,\ y(1) = 1.$$

11.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' + 2xy = xe^{-x^2}; \quad 2.\ \ y = x(y' - \cos x);$$
$$3.\ \ (2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx,\ y(-1/2) = 1.$$

11.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ dy + \frac{2y}{x}dx = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}; \quad 2.\ \ xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x,\ y(1) = 1.$$

11.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)dy; \quad 2.\ \ y^x \ln y\, dx = -xy^{x-1}dy.$$

11.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2+1)(2xdx + \cos y dy) = 2x \sin y dx.$$

11.9. Решить уравнения

$$1.\ \ x(y+1)dx - (x^2+1)y\, dy = 0; \quad 2.\ \ y' = 3x^2y - x^2; \quad 3.\ \ y' = \frac{y}{x} + e^{y/x};$$
$$4.\ \ (x^2 + 2xy - y^2)dx = (y^2 + 2xy - x^2)dy; \quad 5.\ \ \left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x^2}{y}\cos\frac{2x}{y}dy = 0.$$

11.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y = (y'-1)e^{y'}; \quad 2.\ \ x = y'\cos y'; \quad 3.\ \ y = xy' + y' + \sqrt{y'}.$$

11.11. Доказать, что кривая, все нормали которой проходят через одну и ту же фиксированную точку, есть окружность.

## Вариант № 12

12.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$(x-a)^2+(y-b)^2=1.$$

12.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y'=(y-1)x.$$

12.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y'\ln^2(y-x)=(y-x)+\ln^2(y-x);\quad 2.\ \ (1+x^2)y'=1+y^2,\ y(0)=1.$$

12.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ (x+y-1)^2dx=2(y+2)^2dy;\quad 2.\ \ xy'=\cos(\ln y-\ln x);$$
$$3.\ \ (xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x,\quad 4.\ \ (y+\sqrt{x^2+y^2})dx-x\,dy=0,\ y(1)=0.$$

12.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ (1+x^2)y'=2xy+(1+x^2)^2;\quad 2.\ \ (1+y^2)\frac{dx}{dy}=\operatorname{arctg}y-x;$$
$$3.\ \ 2(y^3-y+xy)dy=dx,\ y(0)=\pi.$$

12.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y'-2xy^3=y;\quad 2.\ \ xy'+y=2y^2\ln x,\ y(1)=\frac{1}{2}.$$

12.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \sin(x+y)dx+x\cos(x+y)(dx+dy)=0;\quad 2.\ \ \frac{x\,dy}{x^2+y^2}+\Big(1-\frac{y}{x^2+y^2}\Big)dx=0.$$

12.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$x\,dy=(1+xy)dx.$$

12.9. Решить уравнения

$$1.\ \ (xy^2+x)dx+(y^3-x^3y^3)dy=0;\quad 2.\ \ xy'+y=y^2;\quad 3.\ \ (y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0;$$
$$4.\ \ (2y^2-xy)dx=(x^2-xy+y^2)dy;\quad 5.\ \ (3x^2+4y^2)dx+(8xy+e^y)dy=0.$$

12.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y'-\sin y'=0;\quad 2.\ \ y=\frac{1}{2}(y')^2+\ln y';\quad 3.\ \ y=2xy'-(y')^2.$$

12.11. Масса ракеты с полным запасом топлива равна $M$, без топлива она равна $m$. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха, если скорость истечения продуктов горения из ракеты равна $v$, а начальная скорость ракеты равна нулю (формула Циолковского).

## Вариант № 13

13.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = a\cos(x+b).$$

13.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

13.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y'\operatorname{ctg} x + y = 2; \quad 2.\ \ (1+e^x)yy' = e^x,\ y(0)=1.$$

13.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}(y/x)}; \quad 2.\ \ x\,dy = 2(y - \sqrt{xy})dx;$$

$$3.\ \ y' = \frac{xy + y^2 e^{-x/y}}{x^2}; \quad 4.\ \ y' = \frac{3y+3}{2x+y-1},\ y(1)=1.$$

13.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ (xy'-1)\ln x = 2y; \quad 2.\ \ y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x;$$

$$3.\ \ y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x,\ y(0)=0.$$

13.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}; \quad 2.\ \ 2y' + 3y\cos x = \frac{e^{2x}(2+3\cos x)}{y},\ y(0)=1.$$

13.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (2x + ye^{xy})dx + (1+xe^{xy})dy = 0; \quad 2.\ \ \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}.$$

13.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(y\cos y + x\sin y)dx = (y\sin y - x\cos y)dy.$$

13.9. Решить уравнения

$$1.\ \ xy\,dx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}\,dy = 0; \quad 2.\ \ (1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy;$$

$$3.\ \ \left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx - x\cos\frac{y}{x}dy = 0; \quad 4.\ \ xy + y^2 = 2(x^2+xy)y';$$

$$5.\ \ (3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$$

13.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y' = \operatorname{arctg}\left[\frac{y}{(y')^2}\right]; \quad 2.\ \ x = 2(\ln y' - y'); \quad 3.\ \ y = \frac{1}{2}(xy' + y'\ln y').$$

13.11. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и начала координат.

## Вариант № 14

14.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^3.$$

14.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$yy' = -\frac{x}{2}.$$

14.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y' = \frac{x+y+1}{\sqrt{x+y}-1}; \quad 2.\ \ \sin x \cos y\, dx = \sin y \cos x\, dy,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

14.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ x\, dy - y\, dx = y\, dy; \quad 2.\ \ y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\frac{y+2}{x+1};$$
$$3.\ \ xy' = y - xe^{y/x}, \quad 4.\ \ (2x-2)dy = (x+y-2)dx,\ y(1) = 0{,}5.$$

14.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' \sin x - y \cos x = 1; \quad 2.\ \ y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x-2)}{x};$$
$$3.\ \ \operatorname{ch} y\, dx = (1 + x \operatorname{sh} y)dy,\ y(1) = \ln 2.$$

14.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ y' = y(y^3 \cos x + \operatorname{tg} x); \quad 2.\ y' = \frac{x(x^2+y^2-1)}{2y(x^2-1)}; \quad 3.\ 2(y' + yx) = (x-1)e^x y^2,\ y(0) = 2.$$

14.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + 1 + \operatorname{arctg} y)dy = 0; \quad 2.\ \ ye^x dx + (y + e^x)dy = 0.$$

14.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2 \cos x - y)dx + x\, dy = 0.$$

14.9. Решить уравнения

$$1.\ \ \ln \cos y\, dx + x \operatorname{tg} y\, dy = 0; \quad 2.\ \ x \sin\frac{y}{x}y' + x = y \sin\frac{y}{x};$$
$$3.\ \ \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx + \left(y - \frac{2y}{x}\right)dy = 0; \quad 4.\ \ y^2 y' = 1 - 2x;$$
$$5.\ \ (3x^2 y - 4xy^2)dx + (x^3 + 12y^3)dy = 0.$$

14.10. Решить уравнения

$$1.\ \ x = e^{2y'}[2(y')^2 - 2y' + 1]; \quad 2.\ \ y = y' \ln y'; \quad 3.\ \ y = xy' + \sqrt{4 + (y')^2}.$$

14.11. Найти форму зеркала, отражающего все лучи, которые выходят из одной точки, параллельно данному направлению.

## Вариант № 15

15.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = (x-a)^3.$$

15.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = 2 + y^2.$$

15.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y'xy = x^2 + 1; \quad 2.\ \ xy' = \cos(x-y) + x,\ y\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{6}.$$

15.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' = y\sin(\ln y - \ln x); \quad 2.\ \ y^2 + x^2y' = xyy';$$
$$3.\ \ (2x-4y+6) + (x+y-3)y' = 0, \quad 4.\ \ \frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy},\ y(0) = 1.$$

15.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1; \quad 2.\ \ xy' = e^x + xy;$$
$$3.\ \ 2y^2dx + (x + e^{1/y})dy = 0,\ y(2) = 1.$$

15.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' + 2xy = 2(xy)^3; \quad 2.\ \ x\,dx = \Big(\frac{x^2}{y} - y^3\Big)dy,\ y(1/2) = 2.$$

15.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx + (\sqrt{x^2+y^2} - 1)y\,dy = 0; \quad 2.\ \ e^y + (xe^y - 2y)y' = 0.$$

15.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0.$$

15.9. Решить уравнения

$$1.\ \ \sin x\sin y\,dy = \cos x\cos y\,dx; \quad 2.\ \ xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}; \quad 3.\ \ y' + xy = xy^3;$$
$$4.\ \ 2x - 1 - \frac{y}{x^2} = \Big(2y - \frac{1}{x}\Big)y'; \quad 5.\ \ (x^2+y^2)dx + xy\,dy = 0.$$

15.10. Решить уравнения

$$1.\ \ (y')^3 - xy^4y' - y^5 = 0; \quad 2.\ \ x^3(y')^2 + x^2yy' + 2 = 0; \quad 3.\ \ y = \Big(\frac{1}{x} + y'\Big) + y'.$$

15.11. Найти кривую, зная, что треугольник, образованный нормалью к ней и осями координат, равновелик треугольнику, образованному осью $Ox$, касательной и нормалью к этой же кривой.

## Вариант № 16

16.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 - a^2 y - 2y = 0.$$

16.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y'(x^2 + 2) = y.$$

16.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ \frac{xy'}{1+y^2} = \frac{\ln^2 x}{\operatorname{arctg} y};\quad 2.\ \ y' \sin x = y \ln y,\ y(\pi/2) = e.$$

16.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ x^2 y' - y^2 = 2x^2;\quad 2.\ \ (x-y)dy = (x+y)dx;$$
$$3.\ \ y' = 2xy/(x^2 - y^2);\quad 4.\ \ (9x - y - 8)dy = (x + 7y - 8)dx,\ y(1) = 1.$$

16.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' - x = \frac{2xy}{x^2 - 1};\quad 2.\ \ y' = \frac{y^2}{x+y};$$
$$3.\ \ \operatorname{ch} y\, dx = (x + \operatorname{sh} y)dy,\ y(1) = \ln 2.$$

16.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ xy^2 dy = (1 - xy^3)dx;\quad 2.\ \ 2(xy' + y) = y^2 \ln x,\ y(1) = 2.$$

16.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2};\quad 2.\ \ \Big(y + \frac{2}{x^2}\Big)dx + \Big(x + \frac{3}{y^2}\Big)dy = 0.$$

16.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2y\,dy = 0.$$

16.9. Решить уравнения

$$1.\ \ 3e^x \operatorname{tg} y\, dx + \frac{1 + e^x}{\cos^2 y} dy = 0;\quad 2.\ \ y(1 + x^2)y' = 1 + y^2;\quad 3.\ \ x\,dy = y\Big(1 + \ln\frac{x}{y}\Big)dx;$$
$$4.\ \ y^2 - 4xy + 4x^2 y' = 0;\quad 5.\ \ [\sin 2x - 2\cos(x+y)]dx - 2\cos(x+y)dy = 0.$$

16.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y = (y' - 1)e^{y'};\quad 2.\ \ x = y' \cos y';\quad 3.\ \ y = xy' + y' + \sqrt{y'}.$$

16.11. Две жидкости массами $x$ и $y$ подвергаются дистилляции. Известно, что в любой момент времени отношение масс испарённых жидкостей пропорционально отношению масс, находящихся ещё в жидком состоянии. Определить зависимость между $x$ и $y$.

## Вариант № 17

17.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$ay - \sin ax = 0.$$

17.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y'(x+y) = y.$$

17.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ dy = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}dx; \quad 2.\ \ y' = \sqrt{2x+y-3},\ y(0) = 4.$$

17.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; \quad 2.\ \ xy' = y(\ln y - \ln x);$$
$$3.\ \ (y^2 - x^2)dy + 2xy\,dx = 0, \quad 4.\ \ (y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(0) = 1.$$

17.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y\,dx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0; \quad 2.\ \ y' + y\operatorname{ctg} x = \sin x;$$
$$3.\ \ (x^2-1)y' - xy = x^3 - x,\ y(2) = 1{,}5.$$

17.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ (1+x^2)dy = (xy + x^2y^2)dy; \quad 2.\ \ 2y' + y\cos x = y^{-1}(1+\sin x)\cos x,\ y(0) = 1.$$

17.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0; \quad 2.\ \ \left[x - \frac{y}{(x+2y)^2}\right]dx + \frac{x\,dy}{(x+2y)^2} = 0.$$

17.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$y(1+xy)dx - x\,dy = 0.$$

17.9. Решить уравнения

$$1.\ \ e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0; \quad 2.\ \ y' - y = y^3;$$
$$3.\ \ (y^4 - 2x^2y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0; \quad 4.\ \ y' = \frac{x}{y}2^{y/x} + \frac{y}{x};$$
$$5.\ \ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$$

17.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y' - \sin y' = 0; \quad 2.\ \ y = \frac{1}{2}(y')^2 + \ln y'; \quad 3.\ \ y = 2xy' - (y')^2.$$

17.11. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина, равная трем.

## Вариант № 18

18.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x - ay^2 - by - c = 0.$$

18.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

18.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}; \quad 2.\ \ y' = \sqrt{2x+y-3},\ y(0) = 4.$$

18.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y^2 + x^2y' = xyy'; \quad 2.\ \ xy\,dy - y^2dx(x+y)^2e^{-y/x}dx;$$
$$3.\ \ (x+y-2)dy = (2y-2)dx; \quad 4.\ \ (xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 2x,\ y(1) = 0.$$

18.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ (1+y^2)\frac{dy}{dx} = \operatorname{arctg} y - x; \quad 2.\ \ y' + x^2y = x^2;$$
$$3.\ \ y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x,\ y(0) = 1.$$

18.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' = x^3y^3 - xy; \quad 2.\ \ 3(xy'+y) = y^2\ln x,\ y(1) = 3.$$

18.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx = (1 - y\sqrt{x^2+y^2})dy; \quad 2.\ \ \frac{1+xy}{x^2y}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0.$$

18.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$$

18.9. Решить уравнения

$$1.\ \ (xy^2+x)dx + (y^3 - x^3y^3)dy = 0; \quad 2.\ \ xy' + y = y^2; \quad 3.\ \ (y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0;$$
$$4.\ \ y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x); \quad 5.\ \ xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y)dy = 0.$$

18.10. Решить уравнения

$$1.\ \ (y'+1)^3 = (y'-y)^2; \quad 2.\ \ x = y'\sqrt{(y')^2+1}; \quad 3.\ \ y = 2xy' - 4(y')^3.$$

18.11. В момент времени $t = 0$ имеется $x_0$ первичного радиоактивного вещества с постоянной распада $\lambda_1$, в процессе распада которого образуется вторичное радиоактивное вещество с постоянной распада $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Определить количество нераспавшихся к моменту времени $t$ веществ.

## Вариант № 19

19.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий
$$(x-a)^2+by^2=1.$$

19.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения
$$y'=\frac{1}{1+x^2}.$$

19.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными
$$1.\ \ xy'+y^2=y;\quad 2.\ \ y'=\frac{1}{3x+y},\ y(0)=1.$$

19.4. Решить однородные уравнения
$$1.\ \ y'=\frac{y^2}{x^2}-2;\quad 2.\ \ x\,dy=(xe^{y/x}+y)dx;$$
$$3.\ \ y'=\frac{x+2y-3}{4x-y-3};\quad 4.\ \ (y^2-x^2)dy+2xy\,dx=0,\ y(0)=1.$$

19.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным
$$1.\ \ y'+2xy=xe^{-x^2};\quad 2.\ \ 2y\,dx+(y^2-6x)dy=0;$$
$$3.\ \ y'+x^2=3y/x,\ y(2)=6.$$

19.6. Решить уравнение Бернулли
$$1.\ \ y'+y=xy^3;\quad 2.\ \ 2y'-3y\cos x=-e^{-2x}(2+3\cos x)y^{-1},\ y(0)=1.$$

19.7. Решить уравнение в полных дифференциалах
$$1.\ \ (2x-\ln(y+1))dx-\frac{x+y}{y+1}dy=0;\quad 2.\ \ e^{-x}dy=(ye^{-x}-2x)dx.$$

19.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения
$$(x^2+y)dx-x\,dy=0.$$

19.9. Решить уравнения
$$1.\ \ (y^4+1)x\,dx-y(1+x^2)dy=0;\quad 2.\ \ (1-x^2)y'-xy=xy^2;\quad 3.\ \ y'=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy};$$
$$4.\ \ e^{x/y}dx-\frac{x}{y}\Big(e^{x/y}+\frac{y}{x}\Big)dy=0;\quad 5.\ \ \Big(xy^2+\frac{x^2}{y^2}\Big)dx+\Big(x^2y-\frac{2x^3}{3y^3}\Big)dy=0.$$

19.10. Решить уравнения
$$1.\ \ (y')^4-(y')^2=y^2;\quad 2.\ \ 2xy'-y=y'\ln(yy');\quad 3.\ \ y=2xy'+\frac{1}{(y')^2}.$$

19.11. Найти кривую, которая имеет следующее свойство: отрезок оси $Ox$ от начала координат до пересечения с касательной к этой кривой в любой точке пропорционален ординате этой точки.

## Вариант № 20

20.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

20.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' = 2y.$$

20.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ e^y(1 + y') = 1; \quad 2.\ \ 2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0,\ y(0) = 2.$$

20.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 2.\ \ y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right);$$
$$3.\ \ (2x - 2)dy = (x + 2y - 3)dx; \quad 4.\ \ (y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(1) = 2.$$

20.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ xy' - x^2 \cos x = y; \quad 2.\ \ 2xy' - y = x \ln x;$$
$$3.\ \ 2(y^3 - y + xy)dy = dx,\ y(0) = \pi.$$

20.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ 2xyy' - y^2 + x = 0; \quad 2.\ \ y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 1.$$

20.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \frac{3x^2 + y}{y^2}dx = \frac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3}dy; \quad 2.\ \ e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$$

20.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(xy - x^2)y' + (y^2 - 3xy - 2x^2) = 0.$$

20.9. Решить уравнения

$$1.\ \ (1 + y^2)dx - 2y(1 + x)^2 dy = 0; \quad 2.\ \ (1 + e^x)yy' = e^x; \quad 3.\ \ y\,dx + 2(\sqrt{xy} - x)dy = 0;$$
$$4.\ \ xy' - y = x\left(1 + \operatorname{tg}\frac{y}{x}\right); \quad 5.\ \ \frac{1 + xy}{x^2 y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy = 0.$$

20.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y = x + y' - \ln y'; \quad 2.\ \ x[(y')^2 - 1] = 2y'; \quad 3.\ \ y = xy' - (y')^2.$$

20.11. Электрическая цепь состоит из ключа и последовательно соединённых емкости $C$ и индуктивности $L$. В момент времени $t = 0$ ключ замыкается. Найти закон изменения напряжения на емкостном элементе, если первоначально он был заряжен до напряжения $E$.

## Вариант № 21

21.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^2.$$

21.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = x - e^y.$$

21.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y' = \frac{2x + 2y - 1}{x + y}, \quad 2.\ \ yxy' = \ln^2 x,\ y(1) = 2.$$

21.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ (x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2; \quad 2.\ \ y^2dx + x^2dy = xy\,dy;$$
$$3.\ \ xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}, \qquad 4.\ \ y' - \frac{x + 3y + 4}{3x - 6},\ y(1) = 2$$

21.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' - e^{3x} = 2y; \quad 2.\ \ y' + 2xy = 2xe^{-x^2};$$
$$3.\ \ y' + \frac{xy}{2(1 - x^2)} = \frac{x}{2}, \quad 4.\ \ x(dy - y\,dx) = e^x dx,\ y(1) = e.$$

21.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ x\,dy + 2y\,dx = x^5y^2dx; \quad 2.\ \ y' + 2y\operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x,\ y(1) = 1/\operatorname{sh} 1.$$

21.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \frac{x\,dy}{x^2 + y^2} - \Big(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\Big)dx = 0; \quad 2.\ \ x^y \ln xy' + yx^{y-1} = 0.$$

21.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$xydx - (y^3 + x^2y + x^2)dy = 0.$$

21.9. Решить уравнения

$$1.\ \ (y + y\ln x)dx + (x - xy)dy = 0; \quad 2.\ \ yy' + x = 1; \quad 3.\ \ xy' = y\ln\frac{y}{x};$$
$$4.\ \ (x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0; \quad 5.\ \ 3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$$

21.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y = (y')^2 + (y')^3; \quad 2.\ \ y = \ln(1 + y'); \quad 3.\ \ 2(y')^2(y - xy') = 1.$$

21.11. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой жидкости, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Если при прохождении слоя толщиной 3 м поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого света дойдёт до глубины 15 м?

## Вариант № 22

22.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = a\sin(x+b).$$

22.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = \frac{y-3x}{x+3y}.$$

22.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ (x+2y)y' = 1, \quad 2.\ \ (xy^2+x)dx + (x^2y-y)dy = 0,\ y(0)=1.$$

22.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ (2x-y+1)dx = (2x+y-1)dy; \quad 2.\ \ xy' = y(\ln y - \ln x);$$
$$3.\ \ xy' = y + \frac{y}{\sin(y/x)}, \quad 4.\ \ (xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x,\ y(1)=0.$$

22.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ (1+y^2)dx = (\operatorname{arctg} y - x)dy; \quad 2.\ \ y' + y = \sin x;$$
$$3.\ \ y' - y\operatorname{tg} x = \cos^{-1} x,\ y(0)=0.$$

22.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' = y(y^3\cos x + \operatorname{tg} x); \quad 2.\ \ 2(xy'+y) = y^2\ln x,\ y(1)=0{,}5.$$

22.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (2x - \ln(y+1))dx - \frac{x+y}{y+1}dy = 0; \quad 2.\ \ 3x^2(1+\ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy.$$

22.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2+1)(2xdx + \cos y dy) = 2x\sin y dx.$$

22.9. Решить уравнения

$$1.\ \ y(x+2)dx + x^2(y-1)dy = 0; \quad 2.\ \ \sqrt{1+\cos 2x} + (1+\sin y)y' = 0;$$
$$3.\ \ y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}; \quad 4.\ \ (x+e^y)dx + (\cos y + xe^y)dy = 0; \quad 5.\ \ (\sqrt{xy} - x)dy = -y\,dx.$$

22.10. Решить уравнения

$$1.\ \ x = 2y' - \ln y'; \quad 2.\ \ (y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y; \quad 3.\ \ xy'(y'+2) = y.$$

22.11. Материальная точка массой $m = 1$ г движется прямолинейно. На неё действует в направлении движения сила, пропорциональная времени, протекшему с момента, когда скорость точки была равна нулю, с коэффициентом пропорциональности $k_1 = 2$ г·см/с$^2$. Кроме того, точка испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости движения, с коэффициентом пропорциональности $k_2 = 3$ г/с. Найти скорость точки через 3 с после начала движения.

## Вариант № 23

23.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

23.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' + y = 0.$$

23.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ (x+1)yy' + 3 = 2y; \quad 2.\ \ y' = \cos(y-x),\ y(\pi) = 0.$$

23.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y' = \frac{y}{x} + \sin\Big(\frac{y}{x}\Big); \quad 2.\ \ y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3};$$
$$3.\ \ y' = \frac{x-y}{x+y},\ y(2) = 1; \quad 4.\ \ y' = \frac{y^2+2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2},\ y(1) = 1.$$

23.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x; \quad 2.\ \ y' = x + y;$$
$$3.\ \ \operatorname{ch} x\, dx = (1 + \operatorname{sh} x)dy,\ y(1) = \ln 2.$$

23.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ (1+x^2)dy - xy\,dx = x^2y^2dx; \quad 2.\ \ y' - y\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}y^4\sin x,\ y(0) = 1.$$

23.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ e^{-x}dy = (ye^{-x} - 2x)dx; \quad 2.\ \ (3x^2 + 6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy - 3y^2)dy = 0.$$

23.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$$

23.9. Решить уравнения

$$1.\ \ e^{-x}(1-x)dx - \operatorname{tg} y\,dy = 0; \quad 2.\ \ x^2y' + y^2 = y; \quad 3.\ \ (2x-y)dx + (x+y)dy = 0;$$
$$4.\ \ xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y; \quad 5.\ \ \Big(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\Big)dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy = 0.$$

23.10. Решить уравнения

$$1.\ \ (y')^4 - (y')^2 = y^2; \quad 2.\ \ 2xy' - y = y'\ln(yy'); \quad 3.\ \ y = 2xy' + \frac{1}{(y')^2}.$$

23.11. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют с полярным радиусом и полярной осью равные углы.

## Вариант № 24

24.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = a\cos(x+b).$$

24.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

24.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y'\operatorname{ctg} x + y = 2; \quad 2.\ \ (1+e^x)yy' = e^x,\ y(0) = 1.$$

24.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}(y/x)}; \quad 2.\ \ x\,dy = 2(y - \sqrt{xy})dx;$$
$$3.\ \ y' = \frac{xy + y^2 e^{-x/y}}{x^2}; \quad 4.\ \ y' = \frac{3y+3}{2x+y-1},\ y(1) = 1.$$

24.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ (xy'-1)\ln x = 2y; \quad 2.\ \ y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x;$$
$$3.\ \ y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x,\ y(0) = 0.$$

24.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}; \quad 2.\ \ 2y' + 3y\cos x = \frac{e^{2x}(2+3\cos x)}{y},\ y(0) = 1.$$

24.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0; \quad 2.\ \ \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}.$$

24.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(y\cos y + x\sin y)dx = (y\sin y - x\cos y)dy.$$

24.9. Решить уравнения

$$1.\ \ xy\,dx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}\,dy = 0; \quad 2.\ \ (1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy;$$
$$3.\ \ \left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx - x\cos\frac{y}{x}dy = 0; \quad 4.\ \ xy + y^2 = 2(x^2+xy)y';$$
$$5.\ \ (3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$$

24.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y' = \operatorname{arctg}\left[\frac{y}{(y')^2}\right]; \quad 2.\ \ x = 2(\ln y' - y'); \quad 3.\ \ y = \frac{1}{2}(xy' + y'\ln y').$$

24.11. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и начала координат.

**Вариант № 25**

25.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий
$$ay - \sin ax = 0.$$

25.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения
$$y'(x + y) = y.$$

25.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными
$$1.\ \ dy = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}dx; \quad 2.\ \ y' = \sqrt{2x + y - 3},\ y(0) = 4.$$

25.4. Решить однородные уравнения
$$1.\ \ y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; \quad 2.\ \ xy' = y(\ln y - \ln x);$$
$$3.\ \ (y^2 - x^2)dy + 2xy\,dx = 0, \quad 4.\ \ (y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(0) = 1.$$

25.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным
$$1.\ \ y\,dx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0; \quad 2.\ \ y' + y\operatorname{ctg} x = \sin x;$$
$$3.\ \ (x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x,\ y(2) = 1{,}5.$$

25.6. Решить уравнение Бернулли
$$1.\ \ (1 + x^2)dy = (xy + x^2y^2)dy; \quad 2.\ \ 2y' + y\cos x = y^{-1}(1 + \sin x)\cos x,\ y(0) = 1.$$

25.7. Решить уравнение в полных дифференциалах
$$1.\ \ (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0; \quad 2.\ \ \left[x - \frac{y}{(x+2y)^2}\right]dx + \frac{x\,dy}{(x+2y)^2} = 0.$$

25.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения
$$y(1 + xy)dx - x\,dy = 0.$$

25.9. Решить уравнения
$$1.\ \ e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0; \quad 2.\ \ y' - y = y^3;$$
$$3.\ \ (y^4 - 2x^2y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0; \quad 4.\ \ y' = \frac{x}{y}2^{y/x} + \frac{y}{x};$$
$$5.\ \ \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big)dx + \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\Big)dy = 0.$$

25.10. Решить уравнения
$$1.\ \ y' - \sin y' = 0; \quad 2.\ \ y = \frac{1}{2}(y')^2 + \ln y'; \quad 3.\ \ y = 2xy' - (y')^2.$$

25.11. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина, равная трем.

## Вариант № 26

26.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий
$$y = (x-a)^3.$$

26.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения
$$y' = 2 + y^2.$$

26.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными
$$1.\ \ y'xy = x^2+1; \quad 2.\ \ xy' = \cos(x-y)+x,\ y\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{6}.$$

26.4. Решить однородные уравнения
$$1.\ \ xy' = y\sin(\ln y - \ln x); \quad 2.\ \ y^2 + x^2y' = xyy';$$
$$3.\ \ (2x-4y+6)+(x+y-3)y' = 0, \quad 4.\ \ \frac{dx}{x^2-xy+y^2} = \frac{dy}{2y^2-xy},\ y(0) = 1.$$

26.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным
$$1.\ \ y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1; \quad 2.\ \ xy' = e^x + xy;$$
$$3.\ \ 2y^2dx + (x + e^{1/y})dy = 0,\ y(2) = 1.$$

26.6. Решить уравнение Бернулли
$$1.\ \ y' + 2xy = 2(xy)^3; \quad 2.\ \ x\,dx = \Big(\frac{x^2}{y} - y^3\Big)dy,\ y(1/2) = 2.$$

26.7. Решить уравнение в полных дифференциалах
$$1.\ \ (1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx + (\sqrt{x^2+y^2} - 1)y\,dy = 0; \quad 2.\ \ e^y + (xe^y - 2y)y' = 0.$$

26.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения
$$y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0.$$

26.9. Решить уравнения
$$1.\ \ \sin x\sin y\,dy = \cos x\cos y\,dx; \quad 2.\ \ xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}; \quad 3.\ \ y' + xy = xy^3;$$
$$4.\ \ 2x - 1 - \frac{y}{x^2} = \Big(2y - \frac{1}{x}\Big)y'; \quad 5.\ \ (x^2+y^2)dx + xy\,dy = 0.$$

26.10. Решить уравнения
$$1.\ \ (y')^3 - xy^4y' - y^5 = 0; \quad 2.\ \ x^3(y')^2 + x^2yy' + 2 = 0; \quad 3.\ \ y = \Big(\frac{1}{x} + y'\Big) + y'.$$

26.11. Найти кривую, зная, что треугольник, образованный нормалью к ней и осями координат, равновелик треугольнику, образованному осью $Ox$, касательной и нормалью к этой же кривой.

## Вариант № 27

27.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

27.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' = 2y.$$

27.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ e^y(1 + y') = 1; \quad 2.\ \ 2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0,\ y(0) = 2.$$

27.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 2.\ \ y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right);$$
$$3.\ \ (2x - 2)dy = (x + 2y - 3)dx; \quad 4.\ \ (y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(1) = 2.$$

27.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ xy' - x^2\cos x = y; \quad 2.\ \ 2xy' - y = x\ln x;$$
$$3.\ \ 2(y^3 - y + xy)dy = dx,\ y(0) = \pi.$$

27.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ 2xyy' - y^2 + x = 0; \quad 2.\ \ y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 1.$$

27.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \frac{3x^2 + y}{y^2}dx = \frac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3}dy; \quad 2.\ \ e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$$

27.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(xy - x^2)y' + (y^2 - 3xy - 2x^2) = 0.$$

27.9. Решить уравнения

$$1.\ \ (1 + y^2)dx - 2y(1 + x)^2dy = 0; \quad 2.\ \ (1 + e^x)yy' = e^x; \quad 3.\ \ y\,dx + 2(\sqrt{xy} - x)dy = 0;$$
$$4.\ \ xy' - y = x\left(1 + \operatorname{tg}\frac{y}{x}\right); \quad 5.\ \ \frac{1 + xy}{x^2y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy = 0.$$

27.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y = x + y' - \ln y'; \quad 2.\ \ x[(y')^2 - 1] = 2y'; \quad 3.\ \ y = xy' - (y')^2.$$

27.11. Электрическая цепь состоит из ключа и последовательно соединённых емкости $C$ и индуктивности $L$. В момент времени $t = 0$ ключ замыкается. Найти закон изменения напряжения на емкостном элементе, если первоначально он был заряжен до напряжения $E$.

## Вариант № 28

28.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 + y^2 = ax.$$

28.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$yy' + x = 0.$$

28.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y^2y' = 1 + 2x; \quad 2.\ \ y'(y + x) = 1,\ y(0) = 1.$$

28.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ x\,dy - y\,dx = y\,dy; \quad 2.\ \ (x - y)dy = (x + y)dx;$$
$$3.\ \ (x + y - 2)dy = (2y - 2)dx; \quad 4.\ \ \frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{x} - \frac{\sqrt{y - x}}{2y - x},\ y(1) = 1.$$

28.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' + y\operatorname{ctg} x = \sin x; \quad 2.\ \ xy' - x^2\cos x = y;$$
$$3.\ \ y' - \frac{y}{x} = -\frac{2\ln x}{x},\ y(1) = 1.$$

28.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ 2xyy' - y^2 + x = 0; \quad 2.\ \ 3(xy' + y) = y^2\ln x,\ y(1) = 3.$$

28.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}; \quad 2.\ \ (1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx = (1 - y\sqrt{x^2 + y^2})dy.$$

28.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$y(1 + xy)dx - x\,dy = 0.$$

28.9. Решить уравнения

$$1.\ \ (y^4 + 1)x\,dx - y(1 + x^2)dy = 0; \quad 2.\ \ (1 - x^2)y' - xy = xy^2; \quad 3.\ \ y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy};$$
$$4.\ \ e^{x/y}dx - \frac{x}{y}\left(e^{x/y} + \frac{y}{x}\right)dy = 0; \quad 5.\ \ \left(xy^2 + \frac{x^2}{y^2}\right)dx + \left(x^2y - \frac{2x^3}{3y^3}\right)dy = 0.$$

28.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y'(x - \ln y') = 1; \quad 2.\ \ (y')^2 - (y')^3 = y^2; \quad 3.\ \ (y')^3 = 3(xy' - y).$$

28.11. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведённой из произвольной точки кривой, равен двум.

## Вариант № 29

29.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^2 + bx + c.$$

29.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

29.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ xyy' = 1 - x^2; \quad 2.\ \ (x + 2y)y' = 1,\ y(0) = -1.$$

29.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ (x^2 + y^2)y' = 2xy; \quad 2.\ \ 3x^4y^2dy = (4x^6 - y^6)dx; \quad 3.\ \ xy' + \frac{x^3}{y^2} = y;$$
$$4.\ \ (y + 2)dx - (2x + y - 4)dy,\ y(1) = 1.$$

29.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' + 2xy = xe^{-x^2}; \quad 2.\ \ y = x(y' - \cos x);$$
$$3.\ \ (2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx,\ y(-1/2) = 1.$$

29.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ dy + \frac{2y}{x}dx = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}; \quad 2.\ \ xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x,\ y(1) = 1.$$

29.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)dy; \quad 2.\ \ y^x \ln y\, dx = -xy^{x-1}dy.$$

29.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2 + 1)(2xdx + \cos ydy) = 2x \sin ydx.$$

29.9. Решить уравнения

$$1.\ \ x(y + 1)dx - (x^2 + 1)y\, dy = 0; \quad 2.\ \ y' = 3x^2y - x^2; \quad 3.\ \ y' = \frac{y}{x} + e^{y/x};$$
$$4.\ \ (x^2 + 2xy - y^2)dx = (y^2 + 2xy - x^2)dy; \quad 5.\ \ \left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x^2}{y}\cos\frac{2x}{y}dy = 0.$$

29.10. Решить уравнения

$$1.\ \ y = (y' - 1)e^{y'}; \quad 2.\ \ x = y'\cos y'; \quad 3.\ \ y = xy' + y' + \sqrt{y'}.$$

29.11. Доказать, что кривая, все нормали которой проходят через одну и ту же фиксированную точку, есть окружность.

## Вариант № 30

30.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x - ay^2 - by - c = 0.$$

30.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

30.3. Решить уравнения с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2};\quad 2.\ \ y' = \sqrt{2x+y-3},\ y(0) = 4.$$

30.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y^2 + x^2y' = xyy';\quad 2.\ \ xy\,dy - y^2dx(x+y)^2e^{-y/x}dx;$$
$$3.\ \ (x+y-2)dy = (2y-2)dx;\quad 4.\ \ (xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 2x,\ y(1) = 0.$$

30.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ (1+y^2)\frac{dy}{dx} = \operatorname{arctg} y - x;\quad 2.\ \ y' + x^2y = x^2;$$
$$3.\ \ y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x,\ y(0) = 1.$$

30.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' = x^3y^3 - xy;\quad 2.\ \ 3(xy'+y) = y^2\ln x,\ y(1) = 3.$$

30.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx = (1 - y\sqrt{x^2+y^2})dy;\quad 2.\ \ \frac{1+xy}{x^2y}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0.$$

30.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$$

30.9. Решить уравнения

$$1.\ \ (xy^2+x)dx + (y^3 - x^3y^3)dy = 0;\quad 2.\ \ xy' + y = y^2;\quad 3.\ \ (y^2-3x^2)dy + 2xy\,dx = 0;$$
$$4.\ \ y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x);\quad 5.\ \ xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y)dy = 0.$$

30.10. Решить уравнения

$$1.\ \ (y'+1)^3 = (y'-y)^2;\quad 2.\ \ x = y'\sqrt{(y')^2+1};\quad 3.\ \ y = 2xy' - 4(y')^3.$$

30.11. В момент времени $t = 0$ имеется $x_0$ первичного радиоактивного вещества с постоянной распада $\lambda_1$, в процессе распада которого образуется вторичное радиоактивное вещество с постоянной распада $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Определить количество нераспавшихся к моменту времени $t$ веществ.