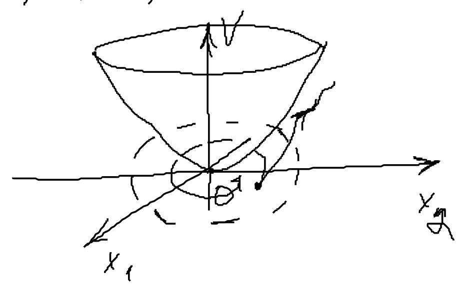
Метод функций Ляпунова

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \qquad (1)$$

где $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = \overline{1,n}$

Функция Ляпунова: $V = V(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$n = 2$



1) Точка покоя устойчива, если
   1) $V(\vec{x}) \geqslant 0$, причем $V = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
   2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(1)} \leqslant 0$

2) Точка покоя асимптотически устойчива, если
   1) $V(\vec{x}) \geqslant 0$, причем $V = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
   2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(1)} \leqslant 0$, причем $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(1)} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

3) Точка покоя неустойчива, если
   1) $V(\vec{0}) = 0$ и сколь угодно близко от начала координат имеются точки в которых $V(\vec{x}) > 0$.
   2) $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(1)} \geqslant 0$, причем $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(1)} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$V = ax^2 + by^2$, $V = ax^4 + by^4$, $V = ax^2 + by^4$, ……

1. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость нулевое решение системы

а) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_2^3 - x_1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(2+\cos x_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 3x_1x_2^3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - \frac{1}{3}x_2 - 2x_1^2x_2^2 \end{cases}$

$V = ax_1^2 + bx_2^2$ $(0,0)$ - точка покоя

а) $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{\partial V}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt} = 2ax_1(-x_1+x_2) + 2bx_2(-2x_2^3 - x_1) =$

$= -2ax_1^2 + 2ax_1x_2 - 4bx_2^4 - 2bx_1x_2 = -2(ax_1^2 + 2bx_2^4) + 2x_1x_2(a-b)$

$a = b = 1$ 1) $V \geq 0$, причем $V = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$

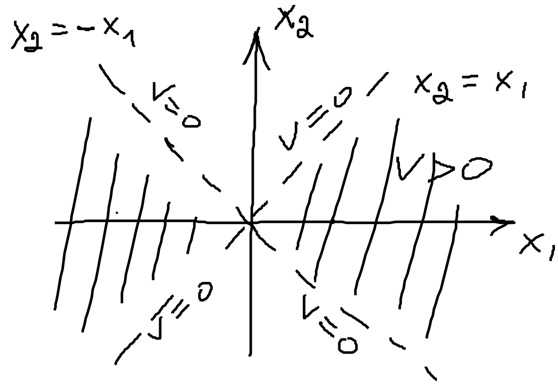
$V = x_1^2 + x_2^2$ 2) $\dfrac{dV}{dt} \leq 0$, причем $\dfrac{dV}{dt} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$

Ответ: $V = x_1^2 + x_2^2$ — функция Ляпунова
Нулевое решение асимптотически устойчиво

б) $\dfrac{dV}{dt} = 2ax_1 \cdot x_1(2+\cos x_1) + 2bx_2(-x_2) =$
$= 4ax_1^2 - 2bx_2^2 + 2ax_1^2\cos x_1$

$a = 1$, $b = -1$

$V = x_1^2 - x_2^2$ знакоперем. ф-я



1) $\dfrac{dV}{dt} = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1^2\cos x_1 \geq 0$

$\dfrac{dV}{dt} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$

2) $V > 0$ при $|x_1| > |x_2|$

Ответ: нулевое решение системы неустойчиво

в) Ответ: $V = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2$, нулевое решение асимптотически уст.

2. Проверить устойчивость нулевого решения системы

а) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2^3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\sin 2x_1 \end{cases}$ $\qquad V = \sin^2 x_1 + \frac{1}{4} x_2^4$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 x_2 - x_1^3 + x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^4 - x_1^2 x_2 - x_1^3 \end{cases}$ $\qquad V = x_1^4 + 2x_2^2$

3. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^2 + 2x_2^2 \end{cases}$$

<u>1 способ</u>

$$V = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$$

$$\frac{dV}{dt} = (2a x_1 + b x_2)\, 2x_1 x_2 + (b x_1 + 2c x_2)(x_1^2 + 2x_2^2) =$$

$$= b x_1^3 + 2(c+2a) x_1^2 x_2 + 4b x_1 x_2^2 + 4c x_2^3$$

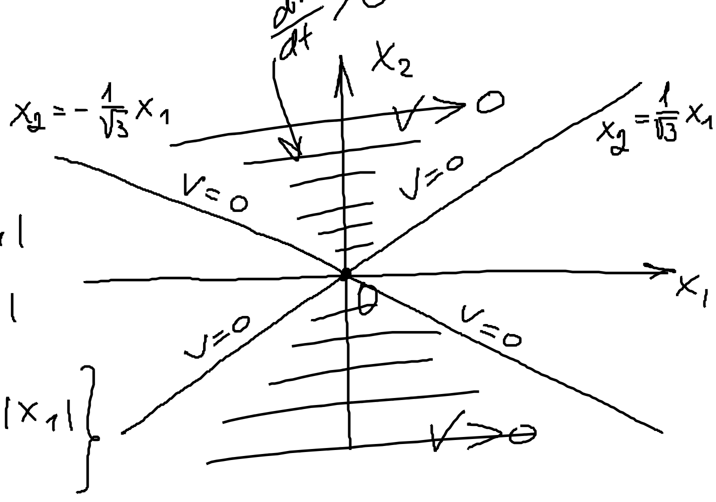
Пусть $b = 0$

$$\frac{dV}{dt} = 2(c+2a) x_1^2 x_2 + 4c x_2^3 = 2x_2 \left(2c x_2^2 + (c+2a) x_1^2\right)$$

Положим $a = -1$, $c = 3$, т.е. $c + 2a > 0$

$$V = -x_1^2 + 3x_2^2$$

$$\frac{dV}{dt} = 2x_2 (6x_2^2 + x_1^2)$$



1) $V > 0$ при $|x_2| > \frac{1}{\sqrt{3}} |x_1|$

$V = 0$ при $|x_2| = \frac{1}{\sqrt{3}} |x_1|$

2) $\frac{dV}{dt} > 0$ при $\begin{cases} |x_2| > \frac{1}{\sqrt{3}} |x_1| \\ x_2 > 0 \end{cases}$

По т. Четаева т. покоя $x_1 = 0, x_2 = 0$ неустойчива.

<u>2 способ</u> $\qquad V = x_1 + x_2 \qquad | \qquad V = x_1 \cdot x_2$

Исследование на устойчивость по первому приближению

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{x}), \qquad (1)$$

где $\vec{F}(t, \vec{0}) = \vec{0}$, т.е. $\vec{x} = \vec{0}$ — положение равновесия

$$\vec{F}(t, \vec{x}) = A\vec{x} + \vec{R}(t, \vec{x}), \quad A = (a_{ij}) \text{ — постоянная матрица}$$

T Пусть функция $\vec{R}(t, \vec{x})$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|\vec{x}\| \to 0} \frac{\|\vec{R}(t, \vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} = 0$$

равномерно по $t \geqslant 0$. Если при этом вещественные части всех собственных чисел матрицы A отрицательны, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. А если среди собственных чисел матрицы A найдется хотя бы одно с положительной вещественной частью, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.

NB: $\operatorname{Re} \lambda_i = 0 \to$ критический случай

1. Исследовать на устойчивость по первому приближению положения равновесия системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \ln(x+y) \\ \frac{dy}{dt} = \operatorname{arctg} \frac{2x}{y} \end{cases}$$

$$\triangleright \begin{cases} \ln(x+y) = 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{2x}{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x+y > 0 \\ \frac{2x}{y} = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \neq 0 \\ x+y = 1 \\ x+y > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Положение равновесия: $x=0,\ y=1$.

$f_1(x,y) = \ln(x+y)$, $f_2(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{y}$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(0,1)} = \left.\frac{1}{x+y}\right|_{(0,1)} = 1 \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{(0,1)} = \left.\frac{1}{x+y}\right|_{(0,1)} = 1$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{(0,1)} = \left.\left[\frac{1}{1+\frac{4x^2}{y^2}} \cdot \frac{2}{y}\right]\right|_{(0,1)} = 2;$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{(0,1)} = \left.\left[\frac{1}{1+\frac{4x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{2x}{y^2}\right)\right]\right|_{(0,1)} = 0$$

$$A = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x+y \\ \frac{dy}{dt} = 2x \end{cases} \qquad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ — собственные значения матрицы A

(седло)

Ответ: Положение равновесия $(x=0,\ y=1)$ системы неустойчиво.

2. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = tg(x+y) - y \\ \frac{dy}{dt} = 3\sin x + 2e^y - 2 \end{cases}.$$

▷

$$f_1(x,y) = tg(x+y) - y, \quad f_2(x,y) = 3\sin x + 2e^y - 2$$

$$f_1(0,0) = 0, \quad f_2(0,0) = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{\cos^2(x+y)}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 3\cos x\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 3$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \left[\frac{1}{\cos^2(x+y)} - 1\right]\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2e^y\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2$$

Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ — собственные значения матрицы A

Ответ: Нулевое решение системы неустойчиво.

3. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 3x^2 + 2y^2 \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y + xy \end{cases}$$

Ответ: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$, нулевое решение системы явл. асимптотически устойчивым.

4. Определить положения равновесия системы и исследовать их на устойчивость. Построить схематический фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x+y-2) \\ \frac{dy}{dt} = y(1-x). \end{cases}$$

▷ $f_1(x,y) = x^2 + xy - 2x$, $f_2(x,y) = y - xy$

$$\begin{cases} x(x+y-2) = 0 \\ y(1-x) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x=1,\ y=1 \\ y=0,\ x=0 \\ y=0,\ x=2 \end{matrix}$$

Положения равновесия:

$M(0,0)$

$M_1(1,1)$

$M_2(2,0)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x+y-2; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -y; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1-x$$

1) $M(0,0)$

Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(1-\lambda) = 0 \to \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1$$

(седло)

собственные векторы: $\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $M_1(1,1)$

Перейдем в новую систему координат: $u = x-1$, $v = y-1$

Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u+v \\ \frac{dv}{dt} = -u \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad Re[\lambda_{1,2}] = \frac{1}{2} > 0$$

(неуст. фокус)

3) $M_2(2,0)$

$u = x-2$, $v = y$

Линеаризованная система:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 2u + 2v \\ \dfrac{dv}{dt} = -v \end{cases} \to A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda) = 0 \to \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2 \quad (\text{седло})$$

$\underline{\lambda_1 = -1}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 3g_1 + 2g_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} g_2 \longrightarrow \vec{g}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} g_1 - \text{свободний} \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} g_1 \longrightarrow \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$