ВАРИАНТ 1

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = t^2 U + V\cos t - \sin t. \quad U \in N(3;\, 2),\ \ V \in E(0.5).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)\sin t - Y(t)(t^2+1)+e^t,\ K_X(t_1,t_2) = 1/(1+|t_2-t_1|),\ K_Y(t_1,t_2) = t_1t_2+1.$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=t^2,\ h(t)=e^t,\ K_X = \exp(-t_1-t_2),\ K_Y = 16\exp(-t_1-t_2),\ K_{XY} = 4\exp(-t_1-t_2).$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = t^2 - U e^{-3t},\ U \ni N(2;0.7).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = e^{-2t},\ g(t) = t^2,\ h(t) = \cos 4t,\ U \in N(2,9),\ V \ni E(0.2).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную

функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z\,(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}\,(t_1,t_2)$, $K_{XZ}\,(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = \cos 6t,\ U \ni E(0.2).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t)=\int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y\,(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U\,\mathrm{ch}3t,\ U \ni P(2).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U-2)\cos 3t - V\sin 3t,\ U \in R(0;4),\ V \in N(0;2/\sqrt{3}).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 5\,(1-\sin 3\tau^2)\exp(-2\tau^2).$$

10. $Z(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 8\cos 4\tau\ .$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = (\cos\tau+\sin|\tau|)\exp(-|\tau|).$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega)=\begin{cases}1-\dfrac{\omega^2}{9} & \text{при } |\omega|\le 3,\\ 0 & \text{при } |\omega|>3.\end{cases}$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+5\,y'+6\,y = 3x,\ m_X = 10,\ S_X(\omega)= \begin{cases} 1-\dfrac{\omega^2}{9} & \text{при } |\omega| \le 3, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 3. \end{cases}$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+6\,y'+ 5y = x''+ 7x'+ 10x,\quad k_X(\tau)= 18/(9+\tau^2)^2.$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+12\,y'+ 36y = x',\ S_X(\omega) = 10(\sin 8\omega)/(\pi\omega).$$

Обозначения и сокращения.

$U\in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U\in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2}$, $D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U\in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U]=1/\lambda$, $D[U]=1/\lambda^2$.

$U\in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U]=np$, $D[U]=np(1-p)$.

$U\in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U]=\lambda$, $D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 2

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = t\,U - 3e^{-3t}V + \cos t. \quad U \in R(0;\,6),\ V \in B(10;\,0.5).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)e^{t} - Y(t)\cos t + e^{2t},\ K_X(t_1,t_2) = K_Y(t_1,t_2) = 1/(1+(t_2-t_1)^2).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=e^{-2t},\ h(t)=\sin 4t,\ K_X=4\cos(t_1-t_2),\ K_Y=36\cos(t_1-t_2),\ K_{XY}=12\cos(t_1-t_2).$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = -Ut^2 - \sin t,\ U \ni B(10;0.5).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = \cos t,\ g(t) = e^{-2t},\ h(t) = \sin 2t,\ U \in E(0.2),\ V \in R(-1;3).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)\,ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную

функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = 1/(1+t)^2,\ U \ni E(0.5).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U \sin 2\omega t,\ U \ni E(0.2).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U+2)\cos 2t - V\sin 2t,\ U \in N(-2;2),\ V \in R(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = (1+2\sin|\tau|)\exp(-2\tau^2).$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 1 + 8\exp(-2|\tau|).$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 5(\sin 2\tau)/\tau.$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = 20/(25+\omega^2).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+4y'+4y = 3x', \quad m_X = 14, \quad S_X(\omega)= 2(\sin 4\omega)/\omega.$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+6y'+9y = x'+2x, \quad k_X(\tau)= \begin{cases} 4-|\tau| & \text{при } |\tau| \le 4, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 4. \end{cases}$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+y = x, \quad S_X(\omega)= \frac{3}{\pi}\left(\frac{1}{9+(1-\omega)^2}+\frac{1}{9+(1+\omega)^2}\right).$$

Обозначения и сокращения.

$U \in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U \in R(a;\, b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\, b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2}$, $D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U \in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U]=1/\lambda$, $D[U]=1/\lambda^2$.

$U \in B(n,\, p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U]=np$, $D[U]=np(1-p)$.

$U \in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U]=\lambda$, $D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 3

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = e^t U - V\,\mathrm{ch}t + 3. \quad U \in P(0.2),\ V \in R(-2;\ 2).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)t - Y(t)\cos t + \sin t,\ K_X(t_1,t_2) = 1/(1+|t_2-t_1|),\ K_Y(t_1,t_2) = \cos(t_2-t_1).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=t,\ h(t)=e^{-t},\ K_X=4(1+t_1t_2),\ K_Y=9(1+t_1t_2),\ K_{XY}=6(1+t_1t_2).$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = U\,t - 4t^2,\ U \ni R(3;6).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = \sin 2t,\ g(t) = t,\ h(t) = e^{-t},\ U \in B(10;0.3),\ V \in N(-1;2).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = \sin 3t,\ U \ni B(10;0.3).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t)=\int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U / (1+t)^2,\ U \ni N(10;4).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = U\cos 5t - (V-5)\sin 5t,\ U \in R(-4;4),\ V \in N(5;4/\sqrt{3}).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 10\,(1 + 2\sin|\tau|)\exp(-2|\tau|).$$

10. $Z(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 10/(1 + 4\tau^2).$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 4(1+2|\tau|)\exp(-2|\tau|).$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega)= \frac{9}{\pi}\left(\frac{1}{9+(1-\omega)^2}+\frac{1}{9+(1+\omega)^2}\right).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+3y'+2y = x''+8x' + 15x,\ \ m_X = 6,\ \ S_X(\omega)= 10/(25+\omega^2).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+3y'+ 2y = x''+ 10x'+ 25x,\ \ k_X(\tau)= 20/(1+25\tau^2).$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+4y'+ 3y = x'+2x\ ,\ \ S_X(\omega)= 10/(\pi(4+\omega^2)).$$

Обозначения и сокращения.

$U \in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U \in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2}$, $D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U \in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U]=1/\lambda$, $D[U]=1/\lambda^2$.

$U \in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U]=np$, $D[U]=np(1-p)$.

$U \in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U]=\lambda$, $D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$–центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 4

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = U\sin t - V\,t + t^5.\ U \in N(1;\,2),\ V \in P(2).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)\sin t - t^2Y(t) + e^t,\ K_X(t_1,t_2) = \cos(t_2 - t_1),\ K_Y(t_1,t_2) = 1/(t_1^2t_2^2).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=\sin\omega t,\ h(t)=t,\ K_X=9\cos t_1\cos t_2,\ K_Y=25\cos t_1\cos t_2,\ K_{XY}=15\cos t_1\cos t_2.$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = U\,t^3 - \sin t,\ U \ni P(4).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = t^2,\ g(t) = e^{-3t},\ h(t) = \sin 3t,\ U\in P(2),\ V \in R(0;4).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = 1+e^{-2t},\ U \ni B(20;0.4).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U e^{-3t},\ U \ni B(10;0.3).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U-4)\cos 8t - V\sin 8t,\ U \in P(4),\ V \in N(0;2).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 8\cos 4\tau\ /\ (2 + 6\tau^2).$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 64/\ (1+4|\tau|)\ .$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 81\exp(-9\tau^2).$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = 4\exp(-\omega^2).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+4y'+4y = x',\ m_X = 10,\ S_X(\omega)= 6(1-\cos 2\omega)/(\pi\omega^2).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+5y'+6y = x',\ k_X(\tau)= \begin{cases} 1-\dfrac{|\tau|}{2} & \text{при } |\tau| \le 2, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 2. \end{cases}$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+5y'+6y = x''+2x'+x,\ S_X(\omega)= 2/(\pi(1+\omega^2)^2).$$

Обозначения и сокращения.

$U\in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U\in R(a;b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2},\ D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U\in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U]=1/\lambda$, $D[U]=1/\lambda^2$.

$U\in B(n,p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U]=np$, $D[U]=np(1-p)$.

$U\in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U]=\lambda$, $D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 5

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = t^3\,U - V\cos t - 2.\ U \in R(-1;\,3),\ V \in E(0.4).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)\cos 3t-(t+3)Y(t)+\sin t,\ K_X(t_1,t_2) = K_Y(t_1,t_2) = \exp(-|t_2-t_1|).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=\cos\omega t,\ h(t)=\sin\omega t,\ K_X=9t_1t_2,\ K_Y=36t_1t_2,\ K_{XY}=18t_1t_2.$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = U\cos 3t-3,\ U \ni P(5).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = t^3,\ g(t) = \cos t,\ h(t) = \sin t,\ U \in P(3),\ V\in N(-1;3).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = e^{-3t},\ U \ni P(2).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y\,(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U\,(1-e^t),\ U \ni E(0.5).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U-1)\cos 20t - V\sin 20t,\ U \in E(1),\ V \in N(0;1).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 5/\,(1 + 2\tau^2 + 3\tau^4).$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 2 + 8\cos 2\tau.$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 16\cos 2\tau \exp(-|\tau|)\ .$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 8 & \text{при } 1 < |\omega| < 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+2y'+y=x'+3x,\ \ m_X=4,\ \ S_X(\omega)=27/(\pi(9+\omega^2)^2).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+5y'+4y=2x,\ \ k_X(\tau)=\exp(-|\tau|)(\cos\tau+\sin|\tau|).$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+4y=5x,\ \ S_X(\omega)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+(2-\omega)^2}+\frac{1}{1+(2+\omega)^2}\right).$$

Обозначения и сокращения.

$U\in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U\in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2},\ \ D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U\in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром $\lambda,\ M[U]=1/\lambda,\ D[U]=1/\lambda^2$.

$U\in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами $n, p,\ M[U]=np,\ \ D[U]=np(1-p)$.

$U\in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda,\ M[U]=\lambda,\ D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X}=X-M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 6

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = 3\,U\,\mathrm{sh}t - e^{3t}V + \cos t.\ U \in E(0.25),\ V \in R(2; 4).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)e^{-3t} - Y(t)\sin t - t,\ K_X(t_1,t_2) = 1 + \cos(t_2 - t_1),\ K_Y(t_1,t_2) = \sin t_2 \sin t_1.$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=t^2,\ \ h(t)=\cos 4t,\ K_X = 25(2+|t_2-t_1|)^{-1},\ K_Y = (2+|t_2-t_1|)^{-1},\ K_{XY} = 5(2+|t_2-t_1|)^{-1}.$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = -U\,e^{-2t} - t,\ U \ni\ P(2).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = \sin 2t,\ g(t) = t,\ h(t) = \cos 4t,\ U \in R(-2;2),\ V \in B(20;0.1).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = e^{-3t},\ U \ni P(5).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U \sin\omega t,\ U \ni N(0;4).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U-2)\cos 11t - (V-8)\sin 11t,\ U \in B(10;0.2),\ V \in B(10;0.8).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 1/(10 + 5\tau^2).$$

10. $Z(t) = \int_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 64\,(1-4\tau)\exp(-4|\tau|).$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 64\exp(-4|\tau|).$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{4+(1-\omega)^2} + \frac{1}{4+(1+\omega)^2}\right).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный

процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+10\,y'+25\,y = x',\ \ m_X = 14,\ \ S_X(\omega)= 10\,(\sin\omega)/\omega.$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+4\,y'+ 3y = x'+ 2x,\ \ k_X(\tau)= 4\exp(-2|\tau|)(1+2|\tau|).$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+4\,y'+ 3y = x',\ S_X(\omega) = 10(\sin 2\omega)/ (\pi\omega).$$

Обозначения и сокращения.

$U\in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U\in R(a;\, b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\, b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2}$, $D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U\in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U]=1/\lambda$, $D[U]=1/\lambda^2$.

$U\in B(n,\, p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U]=np$, $D[U]=np(1-p)$.

$U\in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U]=\lambda$, $D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$–центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 7

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = 3 + U\sin 2t - 4t\,V.\ U \in B(10;\,0.3),\ V \in P(3).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)t+Y(t)e^{2t}-\mathrm{sh}t,\ K_X(t_1,t_2) = K_Y(t_1,t_2) = \exp(-2|t_2-t_1|).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=e^{-3t},\ h(t)=3t,\ K_X=4\exp(-|t_2-t_1|),\ K_Y=9\exp(-|t_2-t_1|),\ K_{XY}=6\exp(-|t_2-t_1|).$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = 3t^2 + U e^{-2t},\ U \ni E(0.2).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = \cos 4t,\ g(t) = e^{-3t},\ h(t) = 3t,\ U \in P(3),\ V \in E(0.25).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t)=\int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = \sin 2t,\ U \ni N(-1;3).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t)=\int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U \sin 3t,\ U \ni B(20;0.4).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U-1)\cos 6t - (V - 4/3)\sin 6t,\ U \in R(-1;3),\ V \in P(4/3).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 5 + 6\cos\tau \cos 3\tau.$$

10. $Z(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = \cos(\tau/2) / 4.$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 4\exp(-\tau^2).$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = \exp(-|\omega|/2).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y' + y = 2x,\ \ m_X = 12,\ \ S_X(\omega) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{4+(1-\omega)^2} + \frac{1}{4+(1+\omega)^2}\right).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'' + 7y' + 6y = 5x,\ \ k_X(\tau) = 16\exp(-|\tau|)\cos 2\tau.$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'' + 3y' + 2y = x',\ \ S_X(\omega) = 6\,(1-\cos 2\omega)/(\pi\omega^2).$$

Обозначения и сокращения.

$U \in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U \in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U] = \dfrac{a+b}{2}$, $D[U] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U \in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U] = 1/\lambda$, $D[U] = 1/\lambda^2$.

$U \in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U] = np$, $D[U] = np(1-p)$.

$U \in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U] = \lambda$, $D[U] = \lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 8

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = U\cos 3t - V\sin t - t.\ U \in R(-3;\ 1),\ V \in N(-1;\ 0.5).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)\cos t-(3t^2+1)Y(t)+\sin t,\ K_X(t_1,t_2) = t_1^2t_2^2,\ K_Y(t_1,t_2) = \cos(t_2-t_1).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)= \sin 6t,\ h(t)=e^t,\ K_X = 4t_1t_2,\ K_Y = 49t_1t_2,\ K_{XY} = 14t_1t_2.$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = U\sin t + t,\ U \ni N(1;2).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = t^2+2,\ g(t) = \sin 5t,\ h(t) = \cos 5t,\ U \in R(1;5),\ V \in B(20;0.4).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = 1/(2t+1),\ U \ni R(-2;4).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y\ (t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U\,\mathrm{sh}2t,\ U \ni N(-1;3).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = U\cos 21t - (V - 1/\sqrt{3})\sin 21t,\ U \in R(-1;1),\ V \in E(\sqrt{3}).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 5(1 - \sin 3\tau^2)\exp(-2\tau^2)$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 64\cos^2\tau.$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 3(\cos 2\tau \sin\tau)/\tau.$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = 27\exp(-\omega^2/36).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+7y'+10y = x' + 4x,\ \ m_X = 6,\ \ S_X(\omega) = 10/(16+\omega^2).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+7y'+10y = x''+5x'+4x,\ \ k_X(\tau) = 4\exp(-\tau^2).$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+y = 4x\ ,\ \ S_X(\omega) = \frac{3}{\pi}\left(\frac{1}{9+(1-\omega)^2}+\frac{1}{9+(1+\omega)^2}\right).$$

Обозначения и сокращения.

$U \in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U \in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U] = \dfrac{a+b}{2}$, $D[U] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U \in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U] = 1/\lambda$, $D[U] = 1/\lambda^2$.

$U \in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U] = np$, $D[U] = np(1-p)$.

$U \in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U] = \lambda$, $D[U] = \lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 9

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = t^2 U - V \operatorname{ch} t + t^2.\ U \in E(0.1),\ V \in B(20;\ 0.2).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)\operatorname{ch} t - 3tY(t) + e^t,\ K_X(t_1,t_2) = 2+\cos(t_2-t_1),\ K_Y(t_1,t_2) = t_1t_2+1.$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=t^3,\ h(t)=\sin 2t,\ K_X = 4\sin t_1 \sin t_2,\ K_Y = 16\sin t_1 \sin t_2,\ K_{XY} = 8\sin t_1 \sin t_2.$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = 5t^2 - U \sin t.\ U \ni B(10;\ 0.1).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = 2t,\ g(t) = t^3,\ h(t) = \cos 2t,\ U \in N(0;4),\ V \in P(1).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = \text{sh}2t,\ U \ni R(-2;2).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y\ (t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U/(2t + 1),\ U \ni P(5).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U-8)\cos 15t + V\sin 15t,\ U \in B(20;0.4),\ V \in N(0;\sqrt{4.8}).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 4\ (1 + \sin\tau^2)\ \exp(-2\tau^2).$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 32/\ (1 + 4\tau^2).$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 3(\sin 4\tau)/\ (4\tau).$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = 2(\sin 4\omega)/(4\omega).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+4y'+3y = x''+8x'+16x, \quad m_X = 7, \quad S_X(\omega) = 32/(\pi(16+\omega^2)^2).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+7y'+12y = x''+4x'+4x, \quad k_X(\tau) = 3(\sin 4\tau)/(4\tau).$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+4y'+3y = x'+2x, \quad S_X(\omega) = 16/(\pi(4+\omega^2)^2).$$

Обозначения и сокращения.

$U \in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U \in R(a;\, b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\, b]$, $M[U] = \dfrac{a+b}{2}$, $D[U] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U \in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U] = 1/\lambda$, $D[U] = 1/\lambda^2$.

$U \in B(n,\, p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U] = np$, $D[U] = np(1-p)$.

$U \in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U] = \lambda$, $D[U] = \lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 10

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = e^t U - V \sin t + t.\ U \in N(-2;\ 2),\ V \in E(4).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = t^4X(t) - Y(t)\operatorname{ch}t + \operatorname{ch}t,\ K_X(t_1,t_2) = 2+t_1t_2, K_Y(t_1,t_2) = \exp(-4|t_2-t_1|).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=e^{-2t},\ h(t)=\cos 4t,\ K_X = (t_1t_2)^2,\ K_Y = 16(t_1t_2)^2,\ K_{XY} = 4(t_1t_2)^2.$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = -U t^3 - \cos t,\ U \ni R(-1;3).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = -2t^2,\ g(t) = e^{-2t},\ h(t) = \cos 2t,\ U \in R(-1;3),\ V \in P(2).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = 1/(1+t^2),\ U \ni N(-3;2).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y\ (t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U \cos 4t,\ U\ \ R(-2;2).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = U \cos 5t - (V-5)\sin 5t,\ U \in R(-2;2),\ V \in N(5; 2/\sqrt{3}).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 5\cos 2\tau \,/\, (1 + 10\tau^2).$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 200\exp(-10|\tau|).$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 18/(9+\tau^2)^2.$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = 12/(\pi(9+\omega^2)).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y' + 3y = 4x',\ \ m_X = 18,\ \ S_X(\omega) = (10\sin 5\omega)/\omega.$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'' + 4y' + 4y = x' + 7x,\ \ k_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{3} & \text{при } |\tau| \le 3, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 3. \end{cases}$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y' + 3y = 2x,\ \ S_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+(1-\omega)^2} + \frac{1}{1+(1+\omega)^2}\right).$$

Обозначения и сокращения.

$U \in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U \in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U] = \dfrac{a+b}{2}$, $D[U] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U \in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U] = 1/\lambda$, $D[U] = 1/\lambda^2$.

$U \in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U] = np$, $D[U] = np(1-p)$.

$U \in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U] = \lambda$, $D[U] = \lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 11

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$\mathrm{X}(t) = e^{-3t}\,U - V\,t + 2t.\ U \in R(-3;\,3),\ V \in B(10;\,0.6).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)\,\mathrm{sh}t - Y(t)t + t,\ K_X(t_1,t_2) = \cos t_1 \cos t_2,\ K_Y(t_1,t_2) = \cos(t_2 - t_1).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=\cos 2t,\ h(t)=\sin 2t,\ K_X=4(t_1t_2+1),\ K_Y=9(t_1t_2+1),\ K_{XY}=6(t_1t_2+1).$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = U\,t^2 + \mathrm{ch}t.\ U \ni R(-2;2).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = t^3+3,\ g(t) = \cos 2t,\ h(t) = \sin 2t,\ U \in N(-3;4),\ V \in B(10;0.4).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = \cos 4t,\ U \ni P(3).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y\ (t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U/(1+ t^2),\ U \ni R(-2;4).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U +10)\cos 2t - V\sin 2t,\ U \in N(-10;3),\ V \in N(0;3).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 1 + 8\exp(-9\tau^2).$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 2\,(1 + \tau)\exp(-|\tau|)\ .$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau)= \begin{cases} 1-\dfrac{|\tau|}{2} & \text{при } |\tau| \le 2, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 2. \end{cases}$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega)= 4/(\pi(1+\omega^2)^2).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный

процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y' + 5y = x,\ \ m_X = 20,\ \ S_X(\omega) = (2\sin^2 4\omega)/\omega^2.$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'' + 6y' + 8y = x',\ \ k_X(\tau) = 8/(8+2\tau^2)^2.$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'' + 4y' + 4y = x' + 3x,\ \ S_X(\omega) = 8/(\pi(9+\omega^2)).$$

Обозначения и сокращения.

$U \in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U \in R(a;\, b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\, b]$, $M[U] = \dfrac{a+b}{2}$, $D[U] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U \in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U] = 1/\lambda$, $D[U] = 1/\lambda^2$.

$U \in B(n,\, p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U] = np$, $D[U] = np(1-p)$.

$U \in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U] = \lambda$, $D[U] = \lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 12

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = 3U\sin t - V e^t - e^t. \ U \in P(4), V \in R(1; 3).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)\sin t - e^t Y(t) + e^t, \ K_X(t_1,t_2) = \cos 2(t_1-t_2), \ K_Y(t_1,t_2) = 2+t_1^2t_2^2.$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=e^{-4t}, \ h(t)=t, \ K_X=49\cos 2(t_1-t_2), \ K_Y=\cos 2(t_1-t_2), \ K_{XY}=7\cos 2(t_1-t_2).$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = U e^{-3t} + \cos t, \ U \ni E(0.25).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = t^2-2, \ g(t) = e^{-4t}, \ h(t) = \cos 4t, \ U \in R(3;7), \ V \in P(4).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = (1+t)^2,\ U \ni B(20;0.2).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t)=\int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U\,(t^2+t),\ U \ni P(3).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U+4)\cos 7t - (V-9)\sin 7t,\ U \in N(-4;3),\ V \in P(9).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau)=10\,(1+2|\sin\tau|)\exp(-2|\tau|).$$

10. $Z(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 162/\,(1 + 10\tau^2).$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{5} & \text{при } |\tau| \le 5,\\ 0 & \text{при } |\tau| > 5.\end{cases}$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega)=\begin{cases}10 & \text{при } |\omega| \le 2,\\ 0 & \text{при } |\omega| > 2.\end{cases}$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+3y = x'+x,\ m_X = 5,\ S_X(\omega)= \begin{cases} 1-\dfrac{\omega^2}{4} & \text{при } |\omega| \le 2, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 2. \end{cases}$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+8y'+7y = 2x,\ \ k_X(\tau)= 27\exp(-|\tau|)\cos 3\tau.$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+4y = 3x',\ \ S_X(\omega)= 3\,(1-\cos 6\omega)/\,(\pi\omega^2).$$

Обозначения и сокращения.

$U \in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U \in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2}$, $D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U \in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U]=1/\lambda$, $D[U]=1/\lambda^2$.

$U \in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U]=np$, $D[U]=np(1-p)$.

$U \in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U]=\lambda$, $D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 13

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = t^2 - e^{-2t}\,U - V\,t.\ U \in N(-1;\ 0.7),\ V \in E(0.5).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = 2tX(t) - Y(t)\sin t + e^t,\ K_X(t_1,t_2) = \exp(-t_1-t_2),\ K_Y(t_1,t_2) = \cos(t_2-t_1).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=t,\ h(t)=\sin 2t,\ K_X=4(t_1t_2)^3,\ K_Y=25(t_1t_2)^3,\ K_{XY}=10(t_1t_2)^3.$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = t - U\,\mathrm{sh}2t.\ U \ni N(-1;2).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = 2t+1,\ g(t) = e^{-3t},\ h(t) = \sin 3t,\ U \in P(2),\ V \in B(10;0.3).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = t^2+t,\ U \ni E(0.4).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y\,(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U\,(1+ t)^2,\ U \ni N(–3;2).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U -5)\cos 3t - V\sin 3t,\ U \in E(0.2),\ V \in N(0;5).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = (1 + \sin|\tau|)\exp(-|\tau|).$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 125\exp(-5|\tau|)\ .$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 8/(8+2\tau^2)^2\ .$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega)= 10(\sin^2\omega)/\omega^2.$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+6\,y'+5y=x'+2x,\ \ m_X=15,\ S_X(\omega)=\begin{cases}10 & \text{при } |\omega|\le 2,\\ 0 & \text{при } |\omega|>2.\end{cases}$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+8\,y'+12y=5x,\ \ k_X(\tau)=\begin{cases}5-|\tau| & \text{при } |\tau|\le 5,\\ 0 & \text{при } |\tau|>5.\end{cases}$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+y=x,\ \ S_X(\omega)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+(3-\omega)^2}+\frac{1}{1+(3+\omega)^2}\right).$$

Обозначения и сокращения.

$U\in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U\in R(a;\,b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\,b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2}$, $D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U\in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U]=1/\lambda$, $D[U]=1/\lambda^2$.

$U\in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U]=np$, $D[U]=np(1-p)$.

$U\in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U]=\lambda$, $D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X}=X-M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 14

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = t\,U - V\sin 2t + 4t^2.\ U \in R(3;\,6),\ V \in N(2;\,3).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = e^t X(t) - 2Y(t)\cos t - \sin t,\ K_X(t_1,t_2) = 2t_2t_1+1,\ K_Y(t_1,t_2) = \cos 3(t_2-t_1).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=t,\ h(t)=t^2,\ K_X = 4/(1+|t_2-t_1|),\ K_Y = 1/(1+|t_2-t_1|),\ K_{XY} = 2/(1+|t_2-t_1|).$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = 3t - U\sin 2t,\ U \ni B(10;0.3).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = e^{2t},\ g(t) = \cos 4t,\ h(t) = t^2,\ U \in N(10;4),\ V \in R(-3,3).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = \mathrm{ch}5t,\ U \ni E(0.25).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t)=\int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U(t^3-1),\ U \ni E(0.4).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U-2)\cos 12t - (V-1.6)\sin 12t,\ U \in B(10;0.2),\ V \in P(1.6).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 10 + 2\cos 5\tau \cos 3\tau.$$

10. $Z(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 54(1+3|\tau|)\exp(-3|\tau|).$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 32\exp(-16\tau^2).$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 1-\dfrac{\omega^2}{4} & \text{при } |\omega| \le 2, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 2. \end{cases}$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный

процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y' + 4y = 2x,\ \ m_X = 12,\ \ S_X(\omega) = \frac{3}{\pi}\left(\frac{1}{9+(1-\omega)^2} + \frac{1}{9+(1+\omega)^2}\right).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'' + 8y' + 16y = x' + 2x,\ \ k_X(\tau) = 16\exp(-4\tau^2).$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'' + 3y' + 2y = 3x,\ \ S_X(\omega) = 6/(\pi(1+\omega^2)).$$

Обозначения и сокращения.

$U \in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U \in R(a;\, b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\, b]$, $M[U] = \dfrac{a+b}{2}$, $D[U] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U \in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U] = 1/\lambda$, $D[U] = 1/\lambda^2$.

$U \in B(n,\, p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U] = np$, $D[U] = np(1-p)$.

$U \in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U] = \lambda$, $D[U] = \lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 15

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = U\cos 3t - V t^2 + 3.\ U \in P(5),\ V \in R(-3;\ 5).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)\cos t - t^3 Y(t) + \operatorname{sh} t,\ K_X(t_1,t_2) = 1+t_1t_2,\ K_Y(t_1,t_2) = \exp(-2(t_2-t_1)^2).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=-2t,\ h(t)=e^{-4t},\ K_X=16\cos(t_1-t_2),\ K_Y=25\cos(t_1-t_2),\ K_{XY}=20\cos(t_1-t_2).$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t)=U\cos t + t,\ U \ni B(20;\ 0.4).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = \cos 4t,\ g(t) = 2t,\ h(t) = e^{-4t},\ U \in E(0.5),\ V \in B(10;0.2).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t)=\int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = t^3-1,\ U \ni N(0;4).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U\,\mathrm{ch}\,\omega t,\ U \ni E(0.25).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U-3)\cos 4t - (V-3)\sin 4t,\ U \in P(3),\ V \in P(3).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 4\cos 2\tau \cos 6\tau.$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 32\cos^2 2\tau.$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 27\exp(-|\tau|)\cos 3\tau.$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = 2\exp(-|\omega|/9).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y' + 5y = 4x, \;\; m_X = 8, \;\; S_X(\omega) = 4(1 - \cos 6\omega)/(\pi\omega^2).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'' + 8y' + 15y = x' + x, \;\; k_X(\tau) = 8/(1 + 16\tau^2).$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'' + 2y' + y = x' + 3x, \;\; S_X(\omega) = 27/(\pi(9 + \omega^2)^2).$$

Обозначения и сокращения.

$U \in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U \in R(a;\, b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\, b]$, $M[U] = \dfrac{a+b}{2}$, $D[U] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U \in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U] = 1/\lambda$, $D[U] = 1/\lambda^2$.

$U \in B(n,\, p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U] = np$, $D[U] = np(1-p)$.

$U \in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U] = \lambda$, $D[U] = \lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 16

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = 5t + 3t^2U - V\,e^{2t}.\ U \in N(-2;\ 1.5),\ V \in E(0.2).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)\,\mathrm{ch}t - tY(t) - t,\ K_X(t_1,t_2) = 9\cos 4(t_2-t_1),\ K_Y(t_1,t_2) = 1/((t_2-t_1)^2+1).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=2t,\ h(t)=\sin 3t,\ K_X=(3+t_1)(3+t_2),\ K_Y=64(3+t_1)(3+t_2),\ K_{XY}=8(3+t_1)(3+t_2).$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = U\cos 3t - t,\ U \ni R(-3;1).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = 1+e^{-2t},\ g(t) = 2t,\ h(t) = \sin 5t,\ U \in R(-1;5),\ V \in P(0.8).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = (1-t)^3,\ U \ni\ R(-1;1).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = -2U\,t^2,\ U \ni N(10;4).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U-6)\cos 7t - (V-1)\sin 7t,\ U \in N(6;1),\ V \in P(1).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 2\,(1-2\tau^2)\exp(-\tau^2)$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 1 + 27/\,(4 + 3|\tau|)\ .$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 20/(1+25\tau^2)\,.$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+(2-\omega)^2} + \frac{1}{1+(2+\omega)^2}\right).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный

процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+6\,y'+5y = x',\ \ m_X = 16,\ \ S_X(\omega) = 10\,(\sin^2 8\omega)/\omega^2.$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+10\,y'+25y = x'+3x,\ \ k_X(\tau) = 8\exp(-2|\tau|)\cos\tau.$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+3y = x'+2x\ ,\ \ S_X(\omega) = (\sin 4\omega)/(\pi\omega).$$

Обозначения и сокращения.

$U \in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U \in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U] = \dfrac{a+b}{2}$, $D[U] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U \in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U] = 1/\lambda$, $D[U] = 1/\lambda^2$.

$U \in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U] = np$, $D[U] = np(1-p)$.

$U \in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U] = \lambda$, $D[U] = \lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 17

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = 5 + U\sin t - V t^2.\ U \in B(10; 0.1),\ V \in N(3; 0.3).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)\sin t - Y(t)\cos t + t,\ K_X(t_1,t_2) = 9t_1t_2,\ K_Y(t_1,t_2) = \cos 2(t_2-t_1).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=e^t,\ h(t)=t^4,\ K_X=4\cos 3(t_1-t_2),\ K_Y=9\cos 3(t_1-t_2),\ K_{XY}=6\cos 3(t_1-t_2).$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = -U\,\mathrm{sh}\,t + e^{-t},\ U \ni E(1/4).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = \sin 2t,\ g(t) = e^t,\ h(t) = t^2,\ U\in P(5),\ V\in N(-5;3).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = -2t^2,\ U \ni R(-1;3).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t)=\int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y\ (t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U\,(1-t)^3,\ U \ni B(20;0.2).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U-2.5)\cos 11t - (V-1)\sin 11t,\ U \in E(0.4),\ V \in N(1;2.5).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 3\,(1-3\sin^2\tau)\exp(-\tau^2).$$

10. $Z(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 81/\,(1+3|\tau|).$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = \sin^2 4\tau\,/\,(16\tau^2).$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = 10/(\pi(4+\omega^2)).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+3y = 4x,\ \ m_X = 12,\ \ S_X(\omega)= \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1+(2-\omega)^2}+\frac{1}{1+(2+\omega)^2}\right).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+10y'+9y = x'+x,\ \ k_X(\tau)= 4\exp(-2|\tau|).$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+2y = 3x',\ \ S_X(\omega)= 6/(\pi(1+\omega^2)).$$

Обозначения и сокращения.

$U\in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U\in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2}$, $D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U\in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U]=1/\lambda$, $D[U]=1/\lambda^2$.

$U\in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U]=np$, $D[U]=np(1-p)$.

$U\in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U]=\lambda$, $D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X}=X-M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 18

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = t^2\, U - V\,\mathrm{ch}t + t.\ U \in P(2),\ V \in R(-2;\,4).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = 4t^2X(t) - Y(t)e^t - t,\ K_X(t_1,t_2) = \sin 2t_2 \sin 2t_1,\ K_Y(t_1,t_2) = 4\exp(-(t_2-t_1)^2)\ .$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=\sin 3t,\ h(t)=t,\ K_X=9\,\mathrm{ch}t_1\mathrm{ch}t_2,\ K_Y=49\,\mathrm{ch}t_1\mathrm{ch}t_2,\ K_{XY}=21\,\mathrm{ch}t_1\mathrm{ch}t_2.$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = -U\,t^2 - t^2,\ U \ni E(0.1).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = \cos 3t,\ g(t) = \sin 3t,\ h(t) = \mathrm{ch}3t,\ U \in R(-2;4),\ V \in B(20;0.4).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = e^{-t},\ U \ni P(6).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y\ (t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U\,(4t^3+2t),\ U \ni R(-1;3).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = (U - 5)\cos 2t - (V - 25)\sin 2t,\ U \in E(0.2),\ V \in P(25).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 1 + 6\cos\tau\,\cos 3\tau.$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 8\,(1 - 2\tau)\exp(-2|\tau|).$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = \sin^2 2\tau / \tau^2.$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 18 & \text{при } 2 < |\omega| < 5, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+4y'+3y = x',\ \ m_X = 16,\ \ S_X(\omega)= (1-\cos 4\omega)/(\pi\omega^2).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+10y'+16y = x'+2x,\ \ k_X(\tau)= 5(\sin 2\tau)/\tau.$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+y = 4x\ ,\ \ S_X(\omega)= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{4+(2-\omega)^2}+\frac{1}{4+(2+\omega)^2}\right).$$

Обозначения и сокращения.

$U\in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U\in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2},\ \ D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U\in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром $\lambda,\ M[U]=1/\lambda,\ D[U]=1/\lambda^2$.

$U\in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами $n, p,\ M[U]=np,\ \ D[U]=np(1-p)$.

$U\in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda,\ M[U]=\lambda,\ D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X}=X-M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 19

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = t + U\,\mathrm{sh}2t - 2t\,V.\ U \in N(-1;\ 2),\ V \in E(1/3).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = \mathrm{e}^{-t}X(t) - 2tY(t) + \mathrm{sh}t,\ K_X(t_1,t_2) = 2 + t_1t_2,\ K_Y(t_1,t_2) = 4/(1+2(t_2-t_1)^2).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t) = \mathrm{e}^{-2t},\ h(t) = t^2,\ K_X = 16\cos(t_1-t_2),\ K_Y = \cos(t_1-t_2),\ K_{XY} = 4\cos(t_1-t_2).$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = U\,\mathrm{ch}2t + \cos t,\ U \ni P(3).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = t^2,\ g(t) = \mathrm{e}^{-2t},\ h(t) = \sin 2t,\ \ U \in P(3),\ \ V \in N(-3;2).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную

функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = 4t^3+2t,\ U \ni B(10;0.4).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t)=\int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U\,e^{-2t},\ U \ni R(-1;1)$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = U\cos 19t - (V-\sqrt{3})\sin 19t,\ U \in R(-3;3),\ V \in E(1/\sqrt{3}).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = (1+|\sin 3\tau|)\exp(-2|\tau|).$$

10. $Z(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 10\,(1 + 4\exp(-|\tau|)).$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 16\exp(-4\tau^2).$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$$S_X(\omega)= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1+(1-\omega)^2}+\frac{1}{1+(1+\omega)^2}\right).$$

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+5y = 4x',\ m_X = 6,\ S_X(\omega)= 5/(4+\omega^2).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+10y'+ 21y = x'+ 3x,\ k_X(\tau)= 2\exp(-|\tau|)(1+|\tau|).$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+ 2y = 5x',\ S_X(\omega) = 9(\sin 3\omega)/(\pi\omega).$$

Обозначения и сокращения.

$U\in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U\in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2}$, $D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U\in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U]=1/\lambda$, $D[U]=1/\lambda^2$.

$U\in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U]=np$, $D[U]=np(1-p)$.

$U\in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U]=\lambda$, $D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

ВАРИАНТ 20

1. Найти математическое ожидание $m_X(t)$, корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$, дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = t\,U - V\sin t + \cos t.\ U \in R(-2;\,2),\ V \in B(20;\,0.4).$$

2. Найти корреляционную функцию $K_Z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_Z(t)$, если $X(t)$, $Y(t)$ – некоррелированные случайные процессы и даны корреляционные функции $K_X(t_1,t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$.

$$Z(t) = X(t)\cos t - t^2Y(t)+t,\ K_X(t_1,t_2) = 1+t_1^2t_2^2,\ K_Y(t_1,t_2) = \cos 4(t_2-t_1).$$

3. $Z(t) = t^2 + g(t)X(t) - h(t)Y(t)$, где $g(t)$, $h(t)$ – неслучайные функции, $X(t)$, $Y(t)$ – центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $K_X = K_X(t_1,t_2)$, $K_Y = K_Y(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $K_{XY} = K_{XY}(t_1,t_2)$. Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Z(t_1,t_2)$ случайного процесса $Z(t)$.

$$g(t)=\mathrm{ch}\,t,\ h(t)=\mathrm{e}^{-2t},\ K_X=4\,\mathrm{sh}\,t_1\,\mathrm{sh}\,t_2,\ K_Y=16\,\mathrm{sh}\,t_1\,\mathrm{sh}\,t_2,\ K_{XY}=8\,\mathrm{sh}\,t_1\,\mathrm{sh}\,t_2.$$

4. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{XY}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{XY}(t_1,t_2)$. U– случайная величина.

$$X(t) = U\,\mathrm{e}^t + \sin t,\ U \ni N(4;2).$$

5. $X(t) = f(t) + g(t)U + h(t)V$, где $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$–неслучайные функции; U, V – некоррелированные случайные величины. Найти математическое ожидание $m_Y(t)$, корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y(t)$ случайного процесса $Y(t) = t\,X(t) - 2X'(t)$, не дифференцируя $X(t)$.

$$f(t) = \mathrm{sh}\,t,\ g(t) = \mathrm{ch}\,2t,\ h(t) = \mathrm{e}^{-2t},\ U \in N(0;4),\ V\in R(1;7).$$

6. $X(t) = f(t)U$, $f(t)$ – неслучайная функция; U – случайная величина, $Z(t)=\int_0^t X(s)ds.$ Найти математическое ожидание $m_Z(t)$, корреляционную функцию $K_Z(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Z(t)$, взаимные корреляционные функции $K_{ZX}(t_1,t_2)$, $K_{XZ}(t_1,t_2)$, не интегрируя $X(t)$.

$$f(t) = 3(1+t)^2,\ U \ni B(10;0.7).$$

7. $X(t)$ – случайный процесс, $Z(t) = \int_0^t X(s)ds.$ Найти корреляционную функцию $K_Y(t_1,t_2)$, дисперсию $D_Y\ (t)$, нормированную корреляционную функцию $\rho_Y(t_1,t_2)$ случайного процесса $Y(t) = X(t) + Z(t)$, не интегрируя $X(t)$. U – случайная величина.

$$X(t) = U\,\mathrm{e}^{-4t},\ U \ni B(10;0.4).$$

8. Доказать, что случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания, корреляционной функции. Найти дисперсию случайного процесса. U, V – некоррелированные случайные величины.

$$X(t) = U\cos 6t - (V-4)\sin 6t,\ U \in R(-2;2),\ V \in R(2;6).$$

9. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти корреляционную функцию, дисперсию производной $X'(t)$, взаимную корреляционную функцию $k_{XX'}(\tau)$.

$$k_X(\tau) = 5\ (1+|\tau|)\exp(-|\tau|).$$

10. $Z(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$. Найти корреляционную функцию, дисперсию случайного процесса $Z(t)$, взаимную корреляционную функцию $K_{XZ}(t_1,t_2)$. В задачах, в которых корреляционная функция $k_X(\tau)$ содержит $|\tau|$, рассмотреть только случай $0 \le t_2 \le t_1$.

$$k_X(\tau) = 25(1 + 48\exp(-4|\tau|)\ ).$$

11. $k_X(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти и изобразить графически спектральную плотность случайного процесса.

$$k_X(\tau) = 9/(1+9\tau^2).$$

12. $S_X(\omega)$ – спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$. Найти его корреляционную функцию.

$S_X(\omega) = 32/(\pi\ (4+\omega^2)^2)$.

13. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием m_X и спектральной плотностью $S_X(\omega)$.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+2y = 4x,\ \ m_X = 6,\ \ S_X(\omega)= \frac{6}{\pi}\left(\frac{1}{1+(3-\omega)^2}+\frac{1}{1+(3+\omega)^2}\right).$$

14. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $k_X(\tau)$. Найти спектральную плотность $S_Y(\omega)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y''+10y'+24y = x'+6x,\ \ k_X(\tau)= 3(\cos 2\tau \sin\tau)/\tau.$$

15. На вход стационарной линейной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_X(\omega)$. Найти корреляционную функцию $k_Y(\tau)$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

$$y'+4y = x'+3x,\ \ S_X(\omega)= 8/(\pi(16+\omega^2)).$$

Обозначения и сокращения.

$U\in N(m;\sigma)$ – случайная величина U распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2.

$U\in R(a;\ b)$ – случайная величина U распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, $M[U]=\dfrac{a+b}{2}$, $D[U]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$U\in E(\lambda)$ – случайная величина U распределена по экспоненциальному закону с параметром λ, $M[U]=1/\lambda$, $D[U]=1/\lambda^2$.

$U\in B(n,\ p)$ – случайная величина U распределена по биномиальному закону с параметрами n, p, $M[U]=np$, $D[U]=np(1-p)$.

$U\in P(\lambda)$ – случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром λ, $M[U]=\lambda$, $D[U]=\lambda$.

$\overset{\circ}{X}=X-M[X]$ – центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.