

Лабораторная работа

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ И ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Моделирование переходов в цепи Маркова.

Решение задач с использованием матрицы переходных вероятностей. Статистическое моделирование процесса с дискретным временем.

Цель работы:

- 1) компьютерное решение задач о процессах с дискретным временем как задач линейной алгебры;
- 2) исследование проблемы установления стационарного распределения вероятностей по состояниям в процессе с дискретным временем;
- 3) моделирование переходов в цепи Маркова по методу Монте-Карло.
- 4) изучение ряда функций Excel и Mathcad.

Понятия случайной функции и случайного процесса

Случайной функцией называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной вид, заранее неизвестно – какой именно. Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется её реализацией.

Случайная функция совмещает в себе черты случайной величины и обычной функции. Если провести только один опыт, то мы получим единственную реализацию, которая представляет собой неслучайную функцию (например, ход температуры в течение определённого года). Если зафиксировать значение аргумента, то мы получим обычную случайную величину. Например, если $X(t)$ – годовой ход температуры, то $X(t_1)$ – будет, скажем, температура 1 января в 12.00.

Случайная величина, в которую превращается случайная функция при фиксации времени, называется *сечением случайной функции* при данном времени.

Введя m фиксированных моментов времени (искусственная дискретизация времени), мы получим систему случайных величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$. Например, такая система может характеризовать поведение температуры за год по дням (скажем в 12.00 каждого дня). Однако такое представление случайной функции $X(t)$, конечно, будет неполным. Можно сказать, что случайная функция — это бесконечномерная система случайных величин.

Пусть имеется некоторая физическая система S , которая с течением времени меняет своё состояние (переходит из одного состояния в другое) заранее неизвестным, случайным образом. Тогда мы будем говорить, что в системе S

протекает *случайный процесс*. Под «физической системой» можно понимать что угодно: техническое устройство, предприятие, отрасль промышленности, живой организм, популяцию и т.д.

В математических исследованиях под случайным процессом понимают просто случайную функцию $X(t)$, которая может принимать либо отдельные числовые значения (*процесс с дискретными состояниями*), либо любые значения из некоторого интервала (*непрерывный процесс*).

Если изменения состояний системы могут происходить только в определённые моменты времени, то говорят о случайном процессе с *дискретным временем*. Если же изменения состояний системы могут происходить в любые моменты времени, то говорят о случайном процессе с *непрерывным временем*.

Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем

Случайный процесс называется *марковским*, если для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент времени и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние. Употребляется также выражение «цепь Маркова».

Пусть некоторая система может находиться в состояниях $S_1, S_2, \dots, S_k$, а изменения состояний могут происходить в определённые моменты времени $t_1, \dots, t_n$. Через $P_{ij}^{(m)}$ мы будем обозначать условную вероятность того, что если в момент t_{m-1} система находилась в состоянии S_i , то в момент t_m (то есть на шаге m) система перейдёт в состояние S_j :

$$P_{ij}^{(m)} = P(S(t_m) = S_j | S(t_{m-1}) = S_i). \quad (5.1)$$

Процесс будет марковским, если эта вероятность на каждом шаге зависит только от состояния, в которое система попала на предыдущем шаге, и не зависит от предыдущих шагов. Иначе говоря, для «марковости» процесса записанная условная вероятность (5.1) не должна зависеть от m .

Возможные состояния системы и переходы между ними принято представлять с помощью *графов*. Граф $\Gamma = (X, U)$ определяется как совокупность двух множеств:

- множества элементов любой природы $x \in X$, называемых *вершинами* (или *узлами*) графа;
- множества пар элементов $u = (a, b) \in U$, $a \in X$, $b \in X$, называемых *рёбрами* графа.

Если внутри пары $u = (a, b)$ строго определён порядок следования вершин, то такое ребро называется ориентированным (*направленным*) ребром или *дугой*.

В нашем случае вершины графа – это состояния системы, а дуги графа – это переходы между состояниями. Граф, на котором указаны вероятности пере-

ходов, называется *размеченным*. Заметим сразу, что переход из состояния S_i в то же самое состояние S_i обычно дугой не обозначается и соответствующая вероятность $P_{ii}^{(m)}$ на графе не пишется, хотя эта вероятность, вообще говоря, не обязательно равна нулю.

Если условная вероятность $P_{ij}^{(m)}$ не зависит от m (от момента времени t_m), то цепь называется *однородной*. Мы будем рассматривать только такие цепи. В этом случае используют матрицу переходных вероятностей (*матрицу перехода*). Это матрица вида

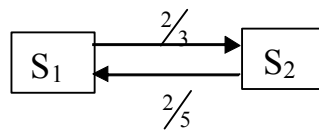
$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1k} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{k1} & P_{k2} & \dots & P_{kk} \end{pmatrix}.$$

Свойства этой матрицы достаточно очевидны. Во-первых, её элементы неотрицательны. Во-вторых, для каждой строки матрицы перехода выполняется условие

$$\sum_{j=1}^k P_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, k}, \quad (5.2)$$

поскольку переходы из состояния S_i на шаге m во все возможные состояния S_j ($j = \overline{1, k}$) представляют собой полную группу несовместных событий.

Пример 14. Рассмотрим марковскую цепь, заданную следующим размеченным графом:



Очевидно, система может находиться в двух состояниях, причём $P_{12} = 2/3$, $P_{21} = 2/5$ (это недиагональные элементы матрицы перехода). Как уже сказано, переход в то же самое состояние обычно на графе не изображается, но соответствующие вероятности (диагональные элементы матрицы) могут быть найдены по сформулированному выше правилу: сумма элементов любой строки матрицы перехода равна 1. Таким образом,

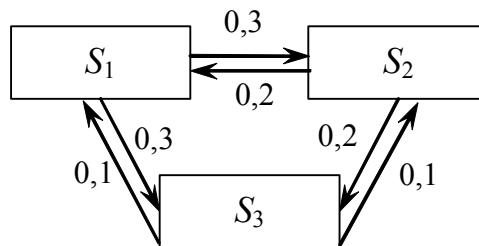
$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что два способа задания цепи Маркова – размеченным графом состояний и матрицей перехода – являются равносильными. В следующем примере по матрице перехода будет составлен размеченный граф состояний.

Пример 15. Рассмотрим цепь Маркова, обладающую тремя состояниями и предназначенную для моделирования погоды. Предполагается, что раз в день (например, в полдень) состояние погоды описывается одной и только одной из следующих характеристик: S_1 – осадки, S_2 – облачно, S_3 – ясно. Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Тогда размеченный граф состояний имеет вид



При составлении графа состояний указываем только переходы в *иные* состояния (вероятности этих переходов являются недиагональными элементами матрицы перехода).

Классификация состояний

По своему характеру состояния системы могут различаться. Состояние S_i называется *несущественным*, если найдется такое состояние S_j ($i \neq j$), что из S_i в S_j перейти можно, а из S_j в S_i — нельзя. Иначе говоря, имеется такой переход из несущественного состояния S_i , который приведёт к тому, что в S_i нельзя будет вернуться. Состояние S_i называется *существенным*, если оно не является *несущественным*. Любой переход из существенного состояния допускает возможность возврата в это состояние.

Два состояния S_i и S_j называются *сообщающимися*, если из S_i можно попасть в S_j и наоборот.

В примере 14 оба состояния являются существенными и сообщающимися.

Если, попав в состояние S_i , система не может из него выйти, то S_i называется состоянием *поглощения*. Оно может быть обозначено на графе петель. Состояние поглощения относится к существенным состояниям.

На рис. 5.1 состояния S_0 , S_2 и S_8 являются несущественными (например, из S_0 можно попасть в S_1 , но возвратиться невозможно). При этом S_8 и S_2 являются сообщающимися. Состояния S_1 , S_3 , S_4 , S_5 , S_6 , S_7 являются существ-

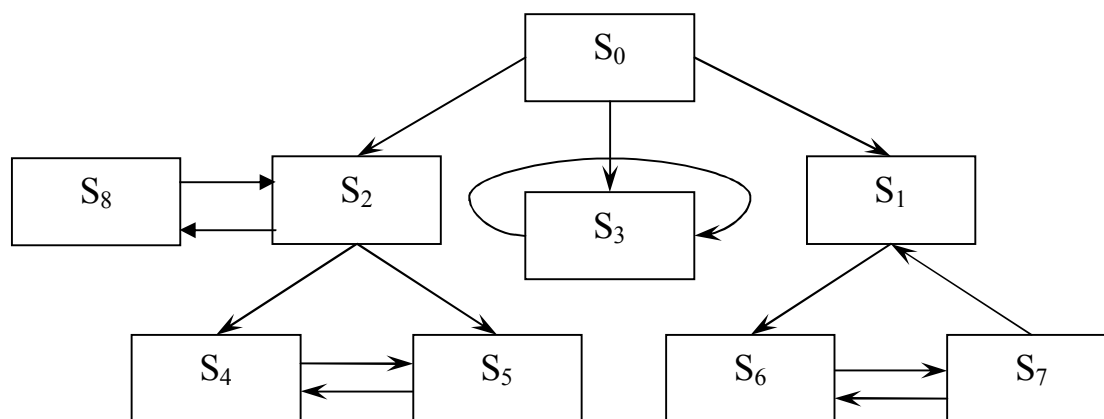


Рис. 5.1

венными, причем из них состояния S_1, S_6, S_7 , а также S_4 и S_5 являются сообщающимися между собой. Состояние S_3 является состоянием поглощения.

Состояния системы объединяются в *классы сообщающихся состояний*. Это могут быть классы существенных и несущественных состояний. Так, в графе, который изображён на рис. 5.1, имеются следующие три класса существенных состояний: S_3 (состоит из одного состояния поглощения); S_4 и S_5 ; S_1 , S_6 и S_7 . Имеется также два класса несущественных состояний: S_0 (из одного состояния); S_2 и S_8 .

Если число состояний конечно, то система рано или поздно выйдет из класса несущественных состояний и после этого окажется (и останется) в одном из классов существенных состояний. Такая цепь называется *приводимой*. Если же цепь состоит из одного класса существенных сообщающихся состояний, то она называется *неприводимой*.

Вероятности переходов за t шагов

Для вычисления вероятностей переходов за t шагов служит *равенство Маркова*

$$P_{ij}(m) = \sum_{l=1}^k P_{il}(r) P_{lj}(m-r), \quad (5.3)$$

(k – общее число состояний) которое вытекает из формулы полной вероятности (2.4), где в качестве гипотез фигурируют всевозможные промежуточные состояния.

Обозначим матрицу перехода за 1 шаг через $\tilde{P}$, а матрицу перехода за m шагов через $\tilde{P}(m)$. Тогда в матричной форме равенство Маркова имеет вид

$$\tilde{P}(m) = \tilde{P}(r)\tilde{P}(m-r), \quad r = \overline{1, m-1}. \quad (5.4)$$

Это соотношение выражает связь между вероятностями переходов для каких-нибудь трех последовательных моментов времени. Например, при $r = 1$ получаем $\tilde{P}(m) = \tilde{P}(1)\tilde{P}(m-1)$. Следовательно,

$$\tilde{P}(2) = \tilde{P}(1)\tilde{P}(1) = \tilde{P}^2, \quad \tilde{P}(3) = \tilde{P}(2)\tilde{P}(1) = \tilde{P}^3, \quad \dots \quad \tilde{P}(m) = \tilde{P}^m. \quad (5.5)$$

Итак, для того, чтобы найти матрицу перехода за m шагов, следует матрицу перехода за 1 шаг возвести в степень m .

Матрицы перехода за m шагов обладают теми же свойствами, что и матрицы перехода за один шаг.

Распределение вероятностей по состояниям

Обозначим через $P_i(m)$ безусловную вероятность того, что система в момент времени t_m (на шаге m) окажется в состоянии S_i . Тогда совокупность вероятностей $P_i(m)$, $i = 1, \dots, k$, будет образовывать вектор, который называется *вектором распределения вероятностей по состояниям*:

$$\bar{P}(m) = (P_1(m), P_2(m), \dots, P_k(m)). \quad (5.6)$$

Для этого вектора выполняются стандартные свойства распределения вероятностей:

$$0 \leq P_i(m) \leq 1, \quad i = \overline{1, k};$$

$$\sum_{i=1}^k P_i(m) = 1.$$

Можно показать, что

$$\bar{P}(m) = \bar{P}(0)\tilde{P}^m, \quad (5.7)$$

где $\bar{P}(0)$ – начальный вектор вероятностей состояний

$$\bar{P}(0) = (P_1(0), P_2(0), \dots, P_i(0), \dots, P_k(0)).$$

Тогда формула (5.7) позволяет получать распределение вероятностей по состояниям на любом шаге.

Стационарное распределение вероятностей состояний

Распределение вероятностей состояний $\bar{P}_{st} = (P_1, P_2, \dots, P_k)$ называется *стационарным*, если оно не изменяется от шага к шагу, т.е. $\bar{P}_{st} = \bar{P}_{st} \tilde{P}$. То же требование можно переписать в виде

$$\bar{P}_{st} (\tilde{P} - E) = 0. \quad (5.8)$$

где E – единичная матрица.

Записанному матричному уравнению соответствует система линейных однородных уравнений, имеющая ненулевые решения при условии

$$\det(\tilde{P} - E) = 0.$$

Эту систему следует дополнить условием *нормировки* вероятности

$$\sum_{i=1}^k P_i = 1. \quad (5.9)$$

Условие случайного эргодического процесса: для того, чтобы марковская цепь с конечным числом состояний имела единственное стационарное предельное распределение вероятностей, необходимо и достаточно, чтобы все существенные состояния были сообщающимися.

Предельная стационарная вероятность несущественного состояния всегда оказывается равной нулю: рано или поздно система выходит из этого состояния и уже в него не возвращается.

Напротив, предельная стационарная вероятность единственного состояния поглощения (при отсутствии других классов существенных состояний) всегда оказывается равной единице: рано или поздно система придёт в это состояние и уже из него не выйдет.

Пример 16. Матрица перехода цепи Маркова имеет вид

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент характеризуется вектором $\bar{P} = (0,1; 0,9)$. Найти:

- 1) матрицу перехода за 2 шага;
- 2) распределение вероятностей по состояниям после 2-го шага;
- 3) стационарное распределение вероятностей по состояниям.

1. По формуле (5.5)

$$\tilde{P}(2) = \tilde{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix}.$$

2. По формуле (5.7)

$$\bar{P}(2) = \bar{P}(0)\tilde{P}^2 = (0,1; 0,9) \begin{pmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix} = (0,331; 0,669).$$

3. Для отыскания стационарного распределения составим систему уравнений

$$\begin{cases} (P_1, P_2) \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = (P_1, P_2), \\ P_1 + P_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,4P_1 + 0,3P_2 = P_1, \\ 0,6P_1 + 0,7P_2 = P_2, \\ P_1 + P_2 = 1. \end{cases}$$

В последней системе первое и второе уравнения линейно зависимы (суммирование этих уравнений даёт третье уравнение), поэтому одно из них можно вычеркнуть. Из первого уравнения имеем $P_2 = 2P_1$. С учётом третьего уравнения получим $P_1 = 1/3$, $P_2 = 2/3$. Стационарное распределение имеет вид

$$\bar{P} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

Смысл полученного результата таков: в установившемся режиме система будет одну треть времени проводить в состоянии S_1 и две трети — в состоянии S_2 .

Задание для лабораторной работы

В данной работе должны быть решены задачи, подобные рассмотренному выше примеру 16, но с большим числом состояний. Кроме этого, будет проведено моделирование случайного процесса с дискретными состояниями и дискретным временем по методу Монте-Карло.

Задание 5.1. Матрица перехода цепи Маркова имеет вид

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,7 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,5 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

В начальный момент система находится в состоянии S_2 . Найти:

1) матрицу перехода за 2 шага;

2) распределение вероятностей по состояниям после 2-го шага;

3) стационарное распределение вероятностей по состояниям.

Задание 5.2. (см. пример 16). Матрица перехода цепи Маркова имеет вид

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Найти стационарное распределение вероятностей по состояниям, разыграв случайный процесс методом Монте-Карло.

Инструкция по выполнению задания в Excel

Приступаем к выполнению задания 5.1. Введём на листе Excel исходные данные.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2	Матрица перехода							Начальное распред.					
3	0	0	0,2	0,1	0	0,7		0	1	0	0	0	0
4	0,1	0	0	0	0	0,9							
5	0,1	0	0	0	0,2	0,7							
6	0,2	0	0,2	0,1	0	0,5							
7	0,1	0,2	0,1	0,1	0	0,5		После 1 шага					
8	0,1	0	0,2	0,1	0,2	0,4							
9													
10													

Выделим ячейки H8:M8 и вызовем функцию МУМНОЖ (*Математические*), умножающую матрицу на матрицу. В окно «Массив 1» введём диапазон H3:M3, в окно «Массив 2» – диапазон A3:F8 и щёлкнем на ОК. В левой ячейке выделенной области появится первый элемент итоговой таблицы. Чтобы раскрыть всю таблицу, нажмём на клавишу F2, перейдя в режим правки, а затем – на комбинацию клавиш <CTRL>+<SHIFT>+<ENTER>. Появится следующий результат:

	G	H	I	J	K	L	M
7		После 1 шага					
8		0,1	0	0	0	0	0,9
9							

Распределение вероятностей по состояниям после 1 шага совпадает со второй строкой переходной матрицы, поскольку система находилась в состоянии S_2 .

Найдём матрицу перехода за 2 шага. Как нам известно (формула (5.5)),

$$\tilde{P}(2) = \tilde{P}(1)\tilde{P}(1) = \tilde{P}^2.$$

Поэтому выделим диапазон A11:F16 и введём в него функцию МУМНОЖ для умножения матрицы перехода (A3:F8) на себя саму. Результат будет таким:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
9													
10	Матрица перехода за 2 шага												
11	0,11	0	0,16	0,08	0,18	0,47							
12	0,09	0	0,2	0,1	0,18	0,43							
13	0,09	0,04	0,18	0,1	0,14	0,45							
14	0,09	0	0,16	0,08	0,14	0,53							
15	0,1	0	0,14	0,07	0,12	0,57	После 2 шага						
16	0,1	0,04	0,14	0,08	0,12	0,52							
17													

Найдём распределение вероятностей после 2 шага. Это можно сделать двумя способами: либо умножив вектор начального распределения вероятностей на $\tilde{P}^2$, либо умножив вектор распределения вероятностей после 1 шага на $\tilde{P}$. В любом случае результат будет следующим:

	G	H	I	J	K	L	M
15	После 2 шага						
16		0,09	0	0,2	0,1	0,18	0,43

Очевидно, распределение вероятностей состояний после 2 шага совпадает со второй строкой матрицы $\tilde{P}^2$, поскольку изначально система находилась в состоянии S_2 .

Переходим к отысканию стационарного распределения вероятностей состояний. Как показано выше, для этого нужно из системы однородных уравнений $\bar{P}_{st}(\tilde{P} - E) = 0$, где $\bar{P}_{st} = (P_1, P_2, \dots, P_k)$, исключить одно (любое) уравнение, заменив его условием

$$\sum_{i=1}^k P_i = 1.$$

В результате система примет вид $\bar{P}_{st}A = B$, где матрица A есть изменённая матрица $\tilde{P} - E$ (для определённости, последний столбец заменён единицами), а $B = (0, 0, \dots, 0, 1)$ – матрица размером $1 \times k$. Таким образом,

$$\bar{P}_{st} = BA^{-1}.$$

Для реализации этого алгоритма сначала получим матрицу $\tilde{P} - E$ (для этого достаточно скопировать матрицу $\tilde{P}$ на свободное пространство рабочего листа и от диагональных элементов отнять 1). Затем с помощью функции МОПРЕД (Математические) можно проверить, что определитель этой матрицы равен нулю, либо, вследствие погрешности вычислений, числу, близкому к нулю; так, в нашем случае получилось число порядка 10^{-17} . После этого следует опреде-

лить матрицу A , заменив последний столбец предыдущей матрицы единицами. Наконец, найдя с помощью функции МОБР (*Математические*) матрицу A^{-1} и умножив на неё матрицу B , получим $\bar{P}_{st} = (P_1, P_2, \dots, P_k)$.

	A	B	C	D	E	F		H	I	J	K	L	M
18													
19	Матрица перехода минус единичная матрица												
20	-1	0	0,2	0,1	0	0,7		Определитель					
21	0,1	-1	0	0	0	0,9		4,623E-17					
22	0,1	0	-1	0	0,2	0,7							
23	0,2	0	0,2	-0,9	0	0,5							
24	0,1	0,2	0,1	0,1	-1	0,5							
25	0,1	0	0,2	0,1	0,2	-0,6							
26													
27	Матрица A												
28	-1	0	0,2	0,1	0	1							
29	0,1	-1	0	0	0	1							
30	0,1	0	-1	0	0,2	1							
31	0,2	0	0,2	-0,9	0	1							
32	0,1	0,2	0,1	0,1	-1	1							
33	0,1	0	0,2	0,1	0,2	1							
34													
35	Матрица A обратная												
36	-0,909	0,029	-0,017	-0,001	0,147	0,751							
37	0,007	-0,971	0,150	0,082	0,147	0,585		Матрица B					
38	0,008	-0,003	-0,832	0,083	-0,015	0,758		0	0	0	0	0	1
39	-0,091	0,035	-0,021	-1,001	0,176	0,902							
40	0,001	-0,162	0,094	0,007	-0,808	0,868		Стационарное распределение					
41	0,098	0,026	0,151	0,082	0,132	0,510		0,098	0,026	0,151	0,082	0,132	0,510

Полученное стационарное распределение не зависит от начального состояния системы. В системе имеет место эргодический процесс. Убедитесь самостоятельно, что все состояния системы являются существенными и сообщающимися.

В установившемся режиме более половины времени система будет находиться в состоянии S_6 .

Приступим к выполнению задания 5.2. На новом листе EXCEL размещаем исходные данные и формируем таблицу, моделирующую случайный процесс методом Монте-Карло. Для определения предельного стационарного режима мы должны получить достаточно длинную реализацию случайного процесса. В этом случае начальное состояние можно задать любым. Поэтому в ячейку A5 введём 0 (нулевой момент времени), в ячейку C5 – число 1 (состояние S_1) или число 2 (состояние S_2). В ячейку B6 вводим =СЛЧИС(), а в ячейку C6 – формулу, которая будет определять состояние процесса в момент времени 1.

Эта процедура задаётся в соответствии с правилом:

событие, имеющее вероятность p , наступает в том случае, если случайное число γ оказывается меньше, чем p . Поэтому, если предыдущим состоянием является S_1 , то в случае $\gamma < P_{11}$ система останется в этом состоянии; в противном случае произойдёт переход в состояние S_2 . Если же предыдущим состоянием является S_2 , то в случае $\gamma < P_{21}$ произойдёт переход в состояние S_1 ; в противном случае система останется в том же состоянии.

Организуем эту процедуру с помощью логической функции ЕСЛИ (лог. выражение; значение, если истина; значение, если ложь). Соответствующая формула вводится в ячейку С6.

	А	В	С
1		Матрица перехода	
2		0,4	0,6
3		0,3	0,7
4	Время	Сл. число	Состояние
5	0		1
6	=A5+1	=СЛЧИС()	=ЕСЛИ(С5=1;ЕСЛИ(В6<=В\$2;1;2);ЕСЛИ(В6<=В\$3;1;2))
7			
8			

Знак \$ фиксирует адреса ячеек, которые не должны измениться при последующем автозаполнении. Теперь выделим ячейки А6:С6 и выполним автозаполнение вниз до строки 10005 (при этом реализация случайного процесса будет включать 10000 моментов времени).

Под таблицей в двух свободных ячейках поместите формулы =СЧЁТЕСЛИ(С6:С10005;1) и =СЧЁТЕСЛИ(С6:С10005;2). В этих ячейках будет подсчитываться суммарное время T_1 и T_2 , которое система провела в состояниях S_1 и S_2 соответственно.

Щелчком мыши активизируйте любую свободную ячейку рабочего листа и раз за разом нажимайте на клавишу Delete. При каждом нажатии будет генерироваться новая реализация продолжительностью $T = 10000$, и, следовательно, будут появляться новые значения T_1 и T_2 . Стационарное предельное распределение вероятностей состояний может быть оценено как $P_1 = T_1 / T$, $P_2 = T_2 / T$.

Убедитесь, что почти при каждой реализации эти значения достаточно близки (до 0,01) к точным значениям $P_1=1/3$, $P_2=2/3$, которые были получены при решении примера 16.

Контрольные вопросы

1. Какие случайные процессы называют процессами с дискретным (непрерывным) временем? Приведите примеры тех и других процессов.
2. Какой случайный процесс называется марковским?
3. Как называется марковская цепь, для которой вероятность $P_{ij}^{(m)}$ перехода из состояния i в состояние j , где i и j принимают все возможные значения, одинакова для любого шага m ?
4. Из каких элементов состоит граф состояний случайного процесса? Поясните на примере.
5. Какое состояние процесса называют: несущественным? существенным?
6. Что такое состояние поглощения?
7. Какие состояния называют сообщающимися?
8. Запишите и объясните равенство Маркова для вероятностей переходов за m шагов.
9. Как найти матрицу перехода за m шагов, если известна матрица перехода за 1 шаг?
10. Как найти вектор распределения вероятностей по состояниям на шаге m через начальный вектор вероятностей состояний и матрицу перехода за m шагов?
11. Что такое стационарное распределение вероятностей состояний?
12. Запишите в матричном виде условие стационарности процесса с дискретным временем.
13. При каком условии марковская цепь с конечным числом состояний имеет единственное стационарное предельное распределение вероятностей?
14. Чему равна предельная стационарная вероятность: (1) несущественного состояния? (2) единственного состояния поглощения (при отсутствии других классов существенных состояний)?

ВАРИАНТ 1

Дана матрица перехода цепи Маркова. В начальный момент система находится в состоянии S_1 . Требуется:

- 1) построить граф состояний и проанализировать характер состояний системы;
- 2) найти матрицу перехода за 2 шага;
- 3) найти распределение вероятностей по состояниям после 2-го шага;
- 4) найти стационарное распределение вероятностей по состояниям, разыграв случайный процесс методом Монте-Карло, или дать аргументированное объяснение того факта, что стационарное состояние не существует или не является единственным.

$$\text{а) } \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,7 \\ 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,7 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 2

Дана матрица перехода цепи Маркова. В начальный момент система находится в состоянии S_1 . Требуется:

- 1) построить граф состояний и проанализировать характер состояний системы;
- 2) найти матрицу перехода за 2 шага;
- 3) найти распределение вероятностей по состояниям после 2-го шага;
- 4) найти стационарное распределение вероятностей по состояниям, разыграв случайный процесс методом Монте-Карло, или дать аргументированное объяснение того факта, что стационарное состояние не существует или не является единственным.

$$\text{а) } \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,1 & 0,6 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0 & 0,1 & 0,6 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 3

Дана матрица перехода цепи Маркова. В начальный момент система находится в состоянии S_1 . Требуется:

- 1) построить граф состояний и проанализировать характер состояний системы;
- 2) найти матрицу перехода за 2 шага;
- 3) найти распределение вероятностей по состояниям после 2-го шага;
- 4) найти стационарное распределение вероятностей по состояниям, разыграв случайный процесс методом Монте-Карло, или дать аргументированное объяснение того факта, что стационарное состояние не существует или не является единственным.

$$\text{а) } \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

ВАРИАНТ 4

Дана матрица перехода цепи Маркова. В начальный момент система находится в состоянии S_1 . Требуется:

- 1) построить граф состояний и проанализировать характер состояний системы;
- 2) найти матрицу перехода за 2 шага;
- 3) найти распределение вероятностей по состояниям после 2-го шага;
- 4) найти стационарное распределение вероятностей по состояниям, разыграв случайный процесс методом Монте-Карло, или дать аргументированное объяснение того факта, что стационарное состояние не существует или не является единственным.

$$\text{а) } \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 0 & 0,1 & 0,6 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$