Тензорный анализ

1.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (3, -8, 8), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 7\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = (7/8)\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

1.2. Найти собственные значения и собственные векторы симметричного тензора

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу поворота к главным осям. Найти инварианты тензора и построить характеристическую поверхность.

1.3. Даны тензоры c^i_{jk}, d^{ij}, u^i, v_i. Величины g, h определены в каждом базисе формулами $g = c^i_{jk}u^j u^k v_i$ и $h = c^i_{jk}d^{jk}v_i$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать, что эти величины являются инвариантами.

1.4. В исходной декартовой системе координат известны компоненты тензора A_{ij}. Найти его компоненты в системе координат, повернутой относительно исходной на некоторый угол вокруг одной из осей:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{вокруг оси } Ox \text{ на } 30^\circ.$$

1.5. Тензор A типа $(0,3)$ и тензор B типа $(0,1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2. Найти тип и матрицу тензора $A \otimes B$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1.6. Тензоры $A = (a^{ij}_k)$, $B = (b_i)$ заданы матрицами

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} -1, & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы сверток: 1) a^{ij}_i, 2) a^{ij}_j; 3) $a^{ij}_j b_i$.

1.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 2, \quad T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.8. Пусть $a = \det(a_{ik})$. Показать, что $a\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{mnp}a_{im}a_{jn}a_{kp}$.

1.9. Метрический тензор g_{ij} и тензор $a^{i}_{\cdot jk}$ заданы соответственно матрицами:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^{i}_{\cdot jk} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Найти матрицу тензора: 1) a_{ijk}; 2) $a^{ij}_{\cdot\cdot k}$; 3) $a^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}$; 4) a^{ijk}.

1.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A_{i}^{\cdot jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по контравариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора $A^{\cdot j\cdot}_{i\cdot k}$ в этом базисе.

1.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = \frac{2}{x^2} + u, \quad y = \frac{1}{x^2} + v$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = uv\boldsymbol{e}_u + \frac{4u^2}{v}\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

1.12. Доказать, что след T_i^i тензора $T_{ik} = \frac{1}{4\pi}(g^{lm}F_{il}F_{km} + \frac{1}{4}g_{ik}F_{lm}F^{lm})$ в E_4 равен нулю, где F_{ij} – антисимметричный тензор.

Тензорный анализ

2.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (7, 7, 2), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + (6/7)\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = -6\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

2.2. Найти собственные значения и собственные векторы симметричного тензора

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу поворота к главным осям. Найти инварианты тензора и построить характеристическую поверхность.

2.3. Пусть $a_{ik}u^i u^k$ – скаляр при любом выборе контравариантного вектора u^i. Показать, что $a_{(ik)}$ – тензор.

2.4. Тензор типа $(1, 2)$ в базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ пространства V_2 задан матрицей A. Найти его матрицу в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} -4 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2. \end{cases}$$

2.5. Пусть x_1, x_2, x_3 – векторы. Найти компоненты тензора $x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_3$, если

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3, & 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 5, & 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1, & -1 \end{pmatrix}.$$

2.6. Тензор a_{ijk} задан матрицей

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Найти компоненты тензоров: 1) $a_{(ij)k}$; 2) $a_{i(jk)}$; 3) $a_{(i|j|k)}$; 4) $a_{(ijk)}$.

2.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 3, \quad T = (T^{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.8. Пусть $a = \det(a_{ik})$. Показать, что $a = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{mnp}a_{im}a_{jn}a_{kp}$.

2.9. Метрический тензор g_{ij} и тензор $a^i_{\cdot jk}$ заданы соответственно матрицами:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^i_{\cdot jk} = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Найти матрицу тензора: 1) a_{ijk}; 2) $a^{ij}_{\cdot\cdot k}$; 3) $a^{i\cdot k}_{\cdot j \cdot}$; 4) a^{ijk}.

2.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по контравариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора $A^{\cdot\cdot k}_{ij\cdot}$ в этом базисе.

2.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = (1+u)x^2, \quad y = (1+\frac{x}{v})x^2$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u,v) = uv\boldsymbol{e}_u + u^3v^2\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u,v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

2.12. Найти преобразование координат $x = x(u,v)$, $t = t(u,v)$, переводящее метрику $ds^2 = dt^2 - dx^2$ в метрику $ds^2 = v^2du^2 - dv^2$.

Тензорный анализ

3.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (1, 7, -7), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 6\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_2' = (6/7)\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$.

3.2. Найти собственные значения и собственные векторы симметричного тензора

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу поворота к главным осям. Найти инварианты тензора и построить характеристическую поверхность.

3.3. Даны тензоры c_k^{ij}, d_{ij}, u^i, v_i. Величины g, h определены в каждом базисе формулами $g = c_k^{ij} u^k v_i v_j$ и $h = c_k^{ij} d_{ij} u^k$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать, что эти величины являются инвариантами.

3.4. В исходной декартовой системе координат известны компоненты тензора A_{ij}. Найти его компоненты в системе координат, повернутой относительно исходной на некоторый угол вокруг одной из осей:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{вокруг оси } Oy \text{ на } 45^\circ.$$

3.5. Тензор A типа $(0, 3)$ и тензор B типа $(0, 1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2. Найти тип и матрицу тензора $B \otimes A$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.6. Тензоры $A = (a_{jk}^i)$, $B = (b^i)$ заданы матрицами

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} -1, & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы сверток: 1) a_{ik}^i, 2) a_{ji}^i; 3) $a_{ji}^i b^j$.

3.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 1, \quad T = (T_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.8. Показать, что в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ символ Леви-Чивита равен $\varepsilon_{ijk} = (\boldsymbol{e}_i, [\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k])$.

3.9. Метрический тензор g^{ij} и тензор $a^{ij}_{\cdot\cdot k}$ заданы соответственно матрицами:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^{ij}_{\cdot\cdot k} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Найти матрицу тензора: 1) a^{ijk}; 2) $a^{\cdot\cdot k}_{ij}$; 3) $a^{\cdot j \cdot}_{i \cdot k}$; 4) a_{ijk}.

3.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по ковариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора A_{ijk} в этом базисе.

3.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = \frac{1}{x^2} + 2u, \quad y = 2v - \frac{1}{x^2}$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = (u+v)\boldsymbol{e}_u + uv\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

3.12. Доказать, что разность $\Gamma^i_{jk} - \bar{\Gamma}^i_{jk}$, где Γ^i_{jk} и $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ – компоненты двух различных связностей в E_n, является тензором.

Тензорный анализ

4.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (6, 6, 2), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + (5/6)\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_2' = -5\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$.

4.2. Найти собственные значения и собственные векторы симметричного тензора

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу поворота к главным осям. Найти инварианты тензора и построить характеристическую поверхность.

4.3. Пусть $b_{ik}^{j} w^{ik}$ – контравариантный вектор при любом выборе контравариантного тензора w^{ik}. Показать, что $b_{[ik]}^{j}$ – тензор.

4.4. Тензор типа $(0,3)$ в базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ пространства V_2 задан матрицей A. Найти его матрицу в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\}$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2. \end{cases}$$

4.5. Пусть x_1, x_2, x_3 – векторы. Найти компоненты тензора $x_1 \otimes x_2 + x_3 \otimes x_3 - x_1 \otimes x_1$, если

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 3, & 4 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2, & -1 \end{pmatrix}.$$

4.6. Тензор a_{ijk} задан матрицей

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Найти компоненты тензоров: 1) $a_{(ij)k}$; 2) $a_{i(jk)}$; 3) $a_{(i|j|k)}$; 4) $a_{(ijk)}$.

4.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 2, \quad T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4.8. Используя символ Леви-Чивита, доказать тождество

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Вычислить $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2$.

4.9. Метрический тензор g^{ij} и тензор $a^{ij}_{\cdot\cdot k}$ заданы соответственно матрицами:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^{ij}_{\cdot\cdot k} = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Найти матрицу тензора: 1) a^{ijk}; 2) $a_{ij}^{\cdot\cdot k}$; 3) $a_{i\cdot k}^{\cdot j\cdot}$; 4) a_{ijk}.

4.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A_{i\cdot k}^{\cdot j\cdot}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по ковариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора $A_{i\cdot\cdot}^{\cdot jk}$ в этом базисе.

4.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = u^2 \ln x, \quad y = \frac{\ln^3 x}{v^2}, \quad x > 1$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = u^3 v \boldsymbol{e}_u + uv\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

4.12. Доказать тождества:

$$1)\ \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{kj} = \Gamma_{i,jk} - \Gamma_{k,ij}, \quad 2)\ g_{ij}\partial_l g^{jk} = -g^{jk}\partial_l g_{ij}.$$

Тензорный анализ

5.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (1, -6, 6), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 5\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = (5/6)\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

5.2. Найти собственные значения и собственные векторы симметричного тензора

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу поворота к главным осям. Найти инварианты тензора и построить характеристическую поверхность.

5.3. Даны тензоры c^i_{jk}, u^i, v_i. Величины g^{ij}, f_{ij} определены в каждом базисе формулами $g^{ij} = c^i_{km}u^k u^m u^j$ и $f_{ij} = c^k_{ij}v_k$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать, что g^{ij} есть дважды контравариантный тензор, а f_{ij} – дважды ковариантный тензор.

5.4. В исходной декартовой системе координат известны компоненты тензора A_{ij}. Найти его компоненты в системе координат, повернутой относительно исходной на некоторый угол вокруг одной из осей:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{вокруг оси } Oz \text{ на } 135°.$$

5.5. Тензор A типа $(1, 2)$ и тензор B типа $(0, 1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2. Найти тип и матрицу тензора $A \otimes B$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

5.6. Тензоры c^i_j, a^i, b_i заданы матрицами

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1, & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1, & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить свертки: 1) $c^i_j a^j$; 2) $c^i_j b_i$; 3) $c^i_j a^j b_i$.

5.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 3, \quad T = (T^{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.8. Используя символ Леви-Чивита, доказать тождество

$$[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}).$$

5.9. Метрический тензор g_{ij} и тензор a_{ij} заданы соответственно матрицами:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора: 1) $a^{i}_{\cdot j}$; 2) $a_{i\cdot}^{\cdot j}$; 3) a^{ij}.

5.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по ковариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора A_{ijk} в этом базисе.

5.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = u + 2\ln x, \quad y = v + \ln x, \quad x > 0$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = 2uv\boldsymbol{e}_u + (2v - u)\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

5.12. Доказать тождества:

$$1)\ \partial_k g^{ij} = -\Gamma^i_{lk} g^{lj} - \Gamma^j_{lk} g^{li}, \quad 2)\ \partial_i g = -g g_{kj} \partial_i g^{kj} = g g^{kj} \partial_i g_{kj},$$

где $g = \det(g_{ij})$.

Тензорный анализ

6.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (5, -5, 4), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + (4/5)\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = -4\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

6.2. Найти собственные значения и собственные векторы симметричного тензора

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу поворота к главным осям. Найти инварианты тензора и построить характеристическую поверхность.

6.3. Доказать, что если a_{ij} – невырожденный дважды ковариантный симметричный тензор ($\det(a_{ij}) \neq 0$), то объект b^{ij}, определяемый системой уравнений $a_{ij}b^{ik} = \delta_i^k$, есть дважды контравариантный симметричный тензор.

6.4. Тензор типа $(0, 3)$ в базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ пространства V_2 задан матрицей A. Найти его матрицу в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2. \end{cases}$$

6.5. Пусть x_1, x_2 – векторы, а f_1, f_2 – ковекторы. Найти компоненты тензора $x_1 \otimes f_2 + x_2 \otimes f_1$, если

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 3, & 4 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 2, & -1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2, & -1 \end{pmatrix}.$$

6.6. Тензор a_{ijk} задан матрицей

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Найти компоненты тензоров: 1) $a_{[ij]k}$; 2) $a_{i[jk]}$; 3) $a_{[i|j|k]}$.

6.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 1, \quad T = (T^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad M = 2.$$

6.8. Используя символ Леви-Чивита, доказать тождество

$$[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

6.9. Метрический тензор g^{ij} и тензор a^{ij} заданы соответственно матрицами:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad a^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора: 1) $a^{i\cdot}_{\cdot j}$; 2) $a^{\cdot j}_{i\cdot}$; 3) a_{ij}.

6.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{\cdot j \cdot}_{i \cdot k}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по ковариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора A_{ijk} в этом базисе.

6.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = ue^{-2x}, \quad y = \frac{e^{-x}}{v}$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = uv\boldsymbol{e}_u + uv^2 bme_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

6.12. Доказать тождества:

$$1)\ g^{ij}\Gamma^k_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_l(g^{kl}\sqrt{|g|}), \quad 2)\ A^i{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}A^i),$$

где $g = \det(g_{ij})$.

Тензорный анализ

7.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (7, -5, 10), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = (4/5)\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

7.2. Найти собственные значения и собственные векторы симметричного тензора

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу поворота к главным осям. Найти инварианты тензора и построить характеристическую поверхность.

7.3. Даны тензоры c^{ij}_k, u^i, v_i. Величины g^i_j, f_{ij} определены в каждом базисе формулами $g^i_j = c^{ik}_j v_k$ и $f^i_j = c^{ik}_m v_k u^m v_j$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать, что g^i_j и f^i_j есть один раз ковариантный и один раз контравариантный тензоры.

7.4. В системе координат, полученной из исходной декартовой системы путем ее поворота на некоторый угол вокруг одной из осей, известны компоненты тензора A'_{ij}. Найти его компоненты в исходной системе координат (до поворота):

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{вокруг оси } Ox \text{ на } 60^\circ.$$

7.5. Тензор A типа $(1, 2)$ и тензор B типа $(0, 1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2. Найти тип и матрицу тензора $B \otimes A$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

7.6. Тензоры c^{ij}, B_i заданы матрицами

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4, & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислить свертки: 1) $c^{ij} b_i$; 2) $c^{ij} b_j$; 3) $c^{ij} b_i b_j$.

7.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 2, \quad T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.8. Используя символ Леви-Чивита, доказать тождество

$$([[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2.$$

7.9. Метрический тензор g_{ij} и тензор $a^i_{\cdot j}$ заданы соответственно матрицами:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^i_{\cdot j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора: 1) a_{ij}; 2) $a_{i\cdot}^{\cdot j}$; 3) a^{ij}.

7.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 4 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по контравариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора A^{ijk} в этом базисе.

7.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = 2u + \ln x, \quad y = 2v - \ln x, \quad x > 0$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = uv\boldsymbol{e}_u + (u+v)\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

7.12. Доказать тождество:

$$1)\ A^{ij}{}_{;j} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_j (A^{ij} \sqrt{|g|}) + A^{jk} \Gamma^i_{jk},$$

где $g = \det(g_{ij})$.

Тензорный анализ

8.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (1, 4, -8), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = (3/4)\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

8.2. Найти собственные значения и собственные векторы симметричного тензора

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу поворота к главным осям. Найти инварианты тензора и построить характеристическую поверхность.

8.3. Известно, что R^{ml}_{nk} – тензор 4-го ранга. Доказать, что $D^l_n = R^{kl}_{nk}$ – тензор 2-го ранга.

8.4. Тензор типа $(2,1)$ в базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ пространства V_2 задан матрицей A. Найти его матрицу в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2. \end{cases}$$

8.5. Пусть x_1, x_2 – векторы, а f_1, f_2 – ковекторы. Найти компоненты тензора $x_1 \otimes f_1 + f_2 \otimes x_2$, если

$$x_1 = \begin{pmatrix} 5, & -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0, & 3 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -1, & 4 \end{pmatrix}.$$

8.6. Тензор a_{ijk} задан матрицей

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Найти компоненты тензоров: 1) $a_{[ij]k}$; 2) $a_{i[jk]}$; 3) $a_{[i|j|k]}$.

8.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 1, \quad T = (T^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

8.8. Используя символ Леви-Чивита, доказать тождество

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] + [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] + [\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]] = 0.$$

8.9. Метрический тензор g^{ij} и тензор $a_i^{\cdot j}$ заданы соответственно матрицами:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad a_i^{\cdot j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора: 1) a_{ij}; 2) $a^i_{\cdot j}$; 3) a^{ij}.

8.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по ковариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{-2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора A_{ijk} в этом базисе.

8.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = \frac{u^2}{x^{1/3}}, \quad y = \frac{x^{1/3}}{v^2}, \quad x > 0$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = uv\boldsymbol{e}_u + u^2v^2\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

8.12. Доказать тождества:

$$1)\ A^j_{i;j} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j(A^j_i\sqrt{|g|}) - \frac{1}{2}A^{jk}\partial_i g_{jk} \quad (\text{если } A^{ij} \text{ – симметричен}),$$

$$2)\ S_{;ik}g^{ik} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j S),$$

где $g = \det(g_{ij})$.

Тензорный анализ

9.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (1, -4, 8), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = (3/4)\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

9.2. Найти собственные значения и собственные векторы симметричного тензора

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу поворота к главным осям. Найти инварианты тензора и построить характеристическую поверхность.

9.3. Даны тензоры c^{ij}_k, u^i, v_i. Величины g^i, f_i определены в каждом базисе формулами $g^i = c^{ik}_m v_k u^m$ и $f_i = c^{km}_i v_k v_m$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать, что g^i есть контравариантный вектор, а f_i – ковариантный вектор.

9.4. В системе координат, полученной из исходной декартовой системы путем ее поворота на некоторый угол вокруг одной из осей, известны компоненты тензора A'_{ij}. Найти его компоненты в исходной системе координат (до поворота):

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \text{вокруг оси } Oy \text{ на } 120^\circ.$$

9.5. Тензор A типа $(2,0)$ и тензор B типа $(1,1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2. Найти тип и матрицу тензора $A \otimes B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.6. Тензоры c_{ij}, a^i заданы матрицами

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3, & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить свертки: 1) $c_{ij}a^i$; 2) $c_{ij}a^j$; 3) $c_{ij}a^i a^j$.

9.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 3, \quad T = (T^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

9.8. Используя символ Леви-Чивита, доказать тождество

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]) + ([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}]) + ([\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}], [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}]) = 0.$$

9.9. Метрический тензор g_{ij} и тензор $a^{ij}_{\cdot\cdot kl}$ заданы соответственно матрицами:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}, \quad a^{ij}_{\cdot\cdot kl} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Найти матрицы тензоров: 1) a_{ijkl}; 2) a^{ijkl}.

9.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A_{i\cdot k}^{\cdot j\cdot}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по ковариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора $A^{ij\cdot}_{\cdot\cdot k}$ в этом базисе.

9.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = u + 2e^x, \quad y = v + e^x$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = (u - v)\boldsymbol{e}_u + (u^2 - v^2)\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

9.12. Доказать тождества:

$$1)\ \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{kj} = \Gamma_{i,jk} - \Gamma_{k,ij}, \quad 2)\ A^i{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}A^i),$$

где $g = \det(g_{ij})$.

Тензорный анализ

10.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (12, 3, -1), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + (2/3)\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = -2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

10.2. Найти собственные значения и собственные векторы симметричного тензора

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу поворота к главным осям. Найти инварианты тензора и построить характеристическую поверхность.

10.3. В некотором базисе известно соотношение $F^k H_m = T^k_m$, где T^k_m – тензор 2-го ранга, F^k – вектор. Доказать, что H_m образует вектор.

10.4. Тензор типа $(1, 2)$ в базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ пространства V_2 задан матрицей A. Найти его матрицу в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 4 & 3 \end{array}\right), \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = -\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1. \end{cases}$$

10.5. Пусть f_1, f_2, f_3 – ковекторы. Найти компоненты тензора $f_1 \otimes f_2 - 3f_2 \otimes f_3$, если

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2, & 3 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0, & -2 \end{pmatrix}.$$

10.6. Тензор $A = (a^i_j)$ задан матрицей

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить инварианты: 1) a^i_i; 2) $a^i_{[i} a^k_{k]}$; 3) $a^i_{[i} a^j_j a^k_{k]}$.

10.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 2, \quad T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.8. Записать в векторной форме

$$\varepsilon_{inl} \varepsilon^{irs} \varepsilon^{lmp} \varepsilon_{stp} a^n a_r b_m c^t.$$

10.9. Метрический тензор g_{ij} и тензор $a^{ij}_{\cdot\cdot kl}$ заданы соответственно матрицами:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a^{ij}_{\cdot\cdot kl} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ - & - & - & - \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right).$$

Найти матрицы тензоров: 1) a_{ijkl}; 2) a^{ijkl}.

10.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A_{i\cdot\cdot}^{\cdot jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по контравариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора $A_{i\cdot k}^{\cdot j\cdot}$ в этом базисе.

10.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = ux, \quad y = \frac{x^2}{v}$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = u^2 v \boldsymbol{e}_u + (u^2 + v)\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

10.12. Доказать тождества:

$$1)\ g^{ij}\Gamma^k_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_l(g^{kl}\sqrt{|g|}), \quad 2)\ A^{ij}{}_{;j} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j(A^{ij}\sqrt{|g|}) + A^{jk}\Gamma^i_{jk},$$

где $g = \det(g_{ij})$.

Тензорный анализ

11.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (2, 6, -3), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_2' = (2/3)\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$.

11.2. Разложить тензор

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

на сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Для симметричного тензора найти собственные значения и собственные векторы. Записать вид тензора в главных осях.

11.3. Даны тензоры c_k^{ij}, d_{ij}, u^i, v_i. Величины g_k^{ij}, h определены в каждом базисе формулами $g_k^{ij} = c_n^{im} d_{mk} u^n u^j$ и $h = c_k^{ij} d_{jm} u^k u^m v_i$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать, что g_k^{ij} есть один раз ковариантный и два раза контравариантный тензор, а h – инвариант.

11.4. В системе координат, полученной из исходной декартовой системы путем ее поворота на некоторый угол вокруг одной из осей, известны компоненты тензора A_{ij}'. Найти его компоненты в исходной системе координат (до поворота):

$$A_{ij}' = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{вокруг оси } Oz \text{ на } 30°.$$

11.5. Тензор A типа $(2, 0)$ и тензор B типа $(1, 1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2. Найти тип и матрицу тензора $B \otimes A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.6. Тензоры c^{ij}, d_{ij} заданы матрицами

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить свертки: 1) $c^{ij} d_{ik}$; 2) $c^{ij} d_{kj}$; 3) $c^{ij} d_{ij}$.

11.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 1, \quad T = (T_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

11.8. Записать в векторной форме

$$\varepsilon_{inl}\varepsilon_{krs}\varepsilon^{lmp}\varepsilon^{stp}a^r a^n b^k b^i c_t c_m.$$

11.9. Метрический тензор g_{ij} и тензор $a^i_{\cdot jk}$ заданы соответственно матрицами:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^i_{\cdot jk} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Найти матрицу тензора: 1) a_{ijk}; 2) $a^{ij}_{\cdot\cdot k}$; 3) $a^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}$; 4) a^{ijk}.

11.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по контравариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{4\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора $A^{\cdot\cdot k}_{ij\cdot}$ в этом базисе.

11.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = 2u + e^x, \quad y = 2v - e^x$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = (v-u)^2\boldsymbol{e}_u + (u+v)\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

11.12. Доказать тождества:

$$1)\ \partial_k g^{ij} = -\Gamma^i_{lk}g^{lj} - \Gamma^j_{lk}g^{li}, \quad 2)\ S_{;ik}g^{ik} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j S),$$

где $g = \det(g_{ij})$.

Тензорный анализ

12.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (2, 4, 3), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + (1/2)\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

12.2. Разложить тензор

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -6 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

на сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Для симметричного тензора найти собственные значения и собственные векторы. Записать вид тензора в главных осях.

12.3. В некотором базисе известно соотношение $A^i B_i^k = C^k$. Доказать, что

1) B_i^k– тензор 2-го ранга, если A^i и C^k– векторы,

2) A^i– вектор, если B_i^k– тензор 2-го ранга и C^k– вектор.

12.4. Тензор типа $(0, 3)$ в базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ пространства V_2 задан матрицей A. Найти его матрицу в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 0 \end{array}\right), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2. \end{cases}$$

12.5. Пусть x_1, x_2 – векторы, а f_1, f_2 – ковекторы. Найти компоненты тензора $f_1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_1 \otimes f_2$, если

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3, & -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2, & 0 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} -1, & 3 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0, & 5 \end{pmatrix}.$$

12.6. Тензор $A = (a_j^i)$ задан матрицей

$$(a_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить инварианты: 1) a_i^i; 2) $a_{[i}^i a_{k]}^k$; 3) $a_{[i}^i a_j^j a_{k]}^k$.

12.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 1, \quad T = (T_j^i) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

12.8. Раскрыть для $n = 3$ выражения:

$$1)\ \delta_{ij}^{kl} x^i y^j, \quad 2)\ \delta_{ij}^{12} x^i y^j, \quad 3)\ \delta_{ij}^{13} x^i y^j.$$

12.9. Метрический тензор g_{ij} и тензор $a^i_{\cdot jk}$ заданы соответственно матрицами:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^i_{\cdot jk} = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Найти матрицу тензора: 1) a_{ijk}; 2) $a^{ij}_{\cdot\cdot k}$; 3) $a^{i\cdot k}_{\cdot j \cdot}$; 4) a^{ijk}.

12.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по ковариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора $A^{i\cdot k}_{\cdot j \cdot}$ в этом базисе.

12.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = \frac{u^3}{\ln^2 x}, \quad y = \frac{\ln x}{v^3}$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = u^2 v^2 \boldsymbol{e}_u + uv\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

12.12. Показать, что

$$\nabla_i R^i_j = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} R.$$

Тензорный анализ

13.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (-3, 2, 4), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = (1/2)\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

13.2. Разложить тензор

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

на сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Для симметричного тензора найти собственные значения и собственные векторы. Записать вид тензора в главных осях.

13.3. Даны тензоры c_{ij}^k, d^{ij}, u^i, v_i. Величины g, h_{jk}^i определены в каждом базисе формулами $g = c_{ij}^k d^{jm} u^i u^k v_k$ и $h_{jk}^i = c_{mj}^n d^{im} v_n v_k$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать, что g есть инвариант, а h_{jk}^i – два раза ковариантный и один раз контравариантный тензор.

13.4. В некоторой декартовой системе координат даны компоненты тензора

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На какой угол φ вокруг оси Oz нужно повернуть систему координат, чтобы в новой системе координат компонента T'_{12} стала равной нулю? Чему равны остальные компоненты T'_{ij} в новой системе координат?

13.5. Тензор A типа $(0, 3)$ и тензор B типа $(0, 1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2. Найти тип и матрицу тензора $A \otimes B$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

13.6. Тензоры c^{ij}, d_j^i, b_i заданы матрицами

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1, & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить свертки: 1) $c^{ij} d_i^k$; 2) $c^{ij} d_j^k$; 3) $c^{ij} d_j^k b_k$.

13.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 2, \quad T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

13.8. Доказать, что

$$\delta^{ijk}_{lmn} a^{lmn} = a^{ijk} - a^{ikj} + a^{jki} - a^{jik} + a^{kij} - a^{kji}.$$

13.9. Метрический тензор g^{ij} и тензор $a^{ij}_{\cdot\cdot k}$ заданы соответственно матрицами:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^{ij}_{\cdot\cdot k} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Найти матрицу тензора: 1) a^{ijk}; 2) $a^{\cdot\cdot k}_{ij}$; 3) $a^{\cdot j \cdot}_{i \cdot k}$; 4) a_{ijk}.

13.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{\cdot jk}_{i\cdot\cdot}) = \left(\begin{array}{cc|cc} -4 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по контравариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора A^{ijk} в этом базисе.

13.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = u + 2\operatorname{tg} x, \quad y = v + \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 \leq x < \pi/2$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = (2v - u)^2 \boldsymbol{e}_u + (v - u)\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

13.12. Найти символы Кристоффеля в 2-мерном пространстве-времени

$$ds^2 = dv^2 - v^2 dt^2.$$

Тензорный анализ

14.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (-1, 7, 14), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 8\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = (8/7)\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

14.2. Разложить тензор

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

на сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Для симметричного тензора найти собственные значения и собственные векторы. Записать вид тензора в главных осях.

14.3. В некотором базисе известно соотношение $F = A^{ij}B_{jk}C_i^k$. Доказать, что

1) F– скаляр, если A^{ij}, B_{jk}, C_i^k– тензоры 2-го ранга,
2) B_{jk}– тензор 2-го ранга, если F– скаляр, а A^{ij}, C_i^k– тензоры 2-го ранга.

14.4. Тензор типа $(0,3)$ в базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ пространства V_2 задан матрицей A. Найти его матрицу в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 4 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = -\boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2. \end{cases}$$

14.5. Тензор A типа $(0,3)$ и тензор B типа $(0,1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2. Найти тип и матрицу тензора $A \otimes B$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

14.6. Не используя сокращенных обозначений, выпишите все компоненты тензоров, заданных в пространстве V_2:

$$x^{(i}y^{j)}, \quad x^{(k}a_i^{i)}, \quad a^i_{[i}a^k_{k]}.$$

14.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 1, \quad T = (T^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

14.8. Раскрыть для $n = 2$ выражения:

$$1)\ \varepsilon^{ij}a_i^1a_j^2, \quad 2)\ \varepsilon^{ij}a_i^2a_j^1, \quad 3)\ a_i^ka_j^l\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{kl}\det(a_j^i).$$

14.9. Метрический тензор g^{ij} и тензор $a^{ij}_{\cdot\cdot k}$ заданы соответственно матрицами:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^{ij}_{\cdot\cdot k} = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Найти матрицу тензора: 1) a^{ijk}; 2) $a^{\cdot\cdot k}_{ij}$; 3) $a^{\cdot j \cdot}_{i \cdot k}$; 4) a_{ijk}.

14.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{i \cdot k}_{\cdot j \cdot}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по контравариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора $A^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ в этом базисе.

14.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = (1 + ue^{x})e^{2x}, \quad y = (1 + e^{2x}/v)e^{2x}$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = u\boldsymbol{e}_u - 2v\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

14.12. Показать, что операции опускания и поднятия индексов перестановочны с ковариантным дифференцированием.

Тензорный анализ

15.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (-12, 6, 1), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + (7/6)\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = 7\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

15.2. Разложить тензор

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -4 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

на сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Для симметричного тензора найти собственные значения и собственные векторы. Записать вид тензора в главных осях.

15.3. Даны тензоры c^i_{jk}, d^{ij}, u^i, v_i. Величины g, h определены в каждом базисе формулами $g = c^i_{jk} u^j u^k v_i$ и $h = c^i_{jk} d^{jk} v_i$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать, что эти величины являются инвариантами.

15.4. Доказать, что произведение компонент векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ образует тензор второго ранга. Найти компоненты этого тензора в системе координат K, если известны компоненты $\boldsymbol{A} = \{1, -1, 2\}$ в системе K и $\boldsymbol{B}' = \{0, 2, 1\}$ — в системе K', получаемой из K поворотом вокруг оси Oz на $90°$.

15.5. Тензор A типа $(0, 3)$ и тензор B типа $(0, 1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2. Найти тип и матрицу тензора $B \otimes A$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

15.6. Тензоры c_{ij}, d^i_j, a^i заданы матрицами

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1, & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить свертки: 1) $c_{ij} d^i_k$; 2) $c_{ij} d^j_k$; 3) $c_{ij} d^i_k a^j$.

15.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 3, \quad T = (T^{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

15.8. Показать, что

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{lmn} = \delta^{ijk}_{lmn}, \quad \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta^{ij}_{lm}.$$

15.9. Метрический тензор g_{ij} и тензор a_{ij} заданы соответственно матрицами:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора: 1) $a^{i}_{\cdot j}$; 2) $a_{i\cdot}^{\cdot j}$; 3) a^{ij}.

15.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по ковариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора $A^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}$ в этом базисе.

15.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = 2u + \operatorname{tg} x, \quad y = 2v - \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 \le x < \pi/2$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = uv\boldsymbol{e}_u + (u^2 + v^2)\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

15.12. Показать, что операции ковариантного дифференцирования и свертки перестановочны.

Тензорный анализ

16.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (1, 6, 12), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = (7/6)\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

16.2. Разложить тензор

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

на сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Для симметричного тензора найти собственные значения и собственные векторы. Записать вид тензора в главных осях.

16.3. В некотором базисе известно соотношение $T^m_{nk} = A^{mi}B_{ink}$. Доказать, что

1) A^{mi}– тензор 2-го ранга, если T^m_{nk}, B_{ink}– тензоры 3-го ранга,

2) B_{ink}– тензор 3-го ранга, если T^m_{nk}, A^{mi}– тензоры 3-го и 2-го рангов соответственно.

16.4. Тензор типа $(2, 1)$ в базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ пространства V_2 задан матрицей A. Найти его матрицу в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2. \end{cases}$$

16.5. Тензор A типа $(0, 3)$ и тензор B типа $(0, 1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2. Найти тип и матрицу тензора $B \otimes A$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

16.6. Не используя сокращенных обозначений, выпишите все компоненты тензоров, заданных в пространстве V_2:

$$x^{[i}y^{j]}, \quad x^{[k}a^{i]}_i, \quad a^i_{(i}a^k_{k)}.$$

16.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 2, \quad T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

16.8. Доказать, что для любого тензора A^i_j

$$\varepsilon_{ijkl}A^i_m A^j_n A^k_s A^l_t = \varepsilon_{mnst}\det(A^i_j).$$

16.9. Метрический тензор g^{ij} и тензор a^{ij} заданы соответственно матрицами:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad a^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора: 1) $a^{i\cdot}_{\cdot j}$; 2) $a^{\cdot j}_{i\cdot}$; 3) a_{ij}.

16.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A^{\cdot j \cdot}_{i \cdot k}) = \left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 2 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по ковариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора $A^{ij\cdot}_{\cdot\cdot k}$ в этом базисе.

16.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = \sqrt{x} + u^2, \quad y = (1 + \sqrt{x}/v^2)\sqrt{x}, \quad x > 0$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для квадрата длины элементарного вектора $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = u^2 v^2 \boldsymbol{e}_u + u(u + v)\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

16.12. Доказать, что вторые производные скалярного поля коммутируют, т.е. $S_{;ij} = S_{;ji}$.

Тензорный анализ

17.1. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известны его координаты в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и задано преобразование от одного базиса к другому

$$\boldsymbol{x} = (10, 5, 1), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + (6/5)\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}'_2 = 6\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Построить базис, взаимный с базисом $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

17.2. Разложить тензор

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -7 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

на сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Для симметричного тензора найти собственные значения и собственные векторы. Записать вид тензора в главных осях.

17.3. Даны тензоры c^{ij}_k, d_{ij}, u^i, v_i. Величины g, h определены в каждом базисе формулами $g = c^{ij}_k u^k v_i v_j$ и $h = c^{ij}_k d_{ij} u^k$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать, что эти величины являются инвариантами.

17.4. Доказать, что произведение компонент векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ образует тензор второго ранга. Найти компоненты этого тензора в системе координат K', если известны компоненты $\boldsymbol{A} = \{1, 0, 2\}$ и $\boldsymbol{B} = \{-1, 2, 3\}$ в системе K и матрица, связывающая систему K с системой K':

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17.5. Тензор A типа $(1, 2)$ и тензор B типа $(0, 1)$ заданы в некотором базисе линейного пространства V_2. Найти тип и матрицу тензора $A \otimes B$, если

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

17.6. Тензоры $A = (a^{ij}_k)$, $B = (b_i)$ заданы матрицами

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} -1, & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы сверток: 1) a^{ij}_i, 2) a^{ij}_j; 3) $a^{ij}_j b_i$.

17.7. Псевдотензор T веса M задан в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Найти компоненты тензора в новом базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$, связанным со старым базисом матрицей перехода B, если

$$M = 1, \quad T = (T^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

17.8. Преобразовать выражения, используя символ Леви-Чивита

$$1)\ ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]), \quad 2)\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

17.9. Метрический тензор g_{ij} и тензор $a^i_{\cdot j}$ заданы соответственно матрицами:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^i_{\cdot j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу тензора: 1) a_{ij}; 2) $a_{i\cdot}^{\cdot j}$; 3) a^{ij}.

17.10. В ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задан тензор

$$A = (A_{i\cdot\cdot}^{\cdot jk}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

1) Представить тензор A в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора по контравариантным индексам.
2) Найти координаты тензора A в базисе $\mathcal{E}' = \{4\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.
3) Найти метрический тензор в базисе $\mathcal{E}'$ и вычислить координаты тензора A^{ijk} в этом базисе.

17.11. На плоскости заданы криволинейные координаты (u, v), связанные с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$y = x^2 + 2u, \quad y = 2v - x^2$$

1) Построить ковариантный и контравариантный локальный базис.
2) Построить метрический тензор и записать выражение для $d\boldsymbol{r}^2$.
3) Найти ковариантную производную векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v) = (u + v)\boldsymbol{e}_u + (u^2 - v^2)\boldsymbol{e}_v$.
4) Найти компоненты векторного поля $\boldsymbol{A}(u, v)$ в декартовой системе координат.
5) Записать уравнения геодезических линий.
6) Вычислить тензор Римана.

17.12. F^{ij} – антисимметричный тензор. Доказать, что

$$F_i{}^j{}_{;k} F^k{}_j = -F_{ij;k} F^{jk}.$$