Векторный анализ

1.1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = 4\ln(3+x^2)-8xyz$ в точке $M(1, 1, 1)$ по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

1.2. Найти градиент и лапласиан от функций $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r})$, $\ln|\boldsymbol{r}|$ и $|\boldsymbol{r}|^m$, $m \in \mathbb{Z}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки.

1.3. Найти векторные линии векторных полей:

$$1)\ \boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j};$$
$$2)\ \boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}.$$

1.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - \alpha x\boldsymbol{j} + e^z\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

1.5. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, если

$$\boldsymbol{A} = 3y^2\boldsymbol{i} - 3x^2\boldsymbol{j} - (y^2 + 2x)\boldsymbol{k}.$$

1.6. Вычислить:

$$1)\ (\boldsymbol{\nabla}, \varphi(r)\boldsymbol{r}),$$
$$2)\ [\boldsymbol{\nabla}, \varphi(r)\boldsymbol{r}],$$
$$3)\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nabla})\varphi(r)\boldsymbol{r}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{a} \text{ – постоянный вектор.}$$

1.7. Вычислить при $\varphi = \frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})}{r^3}$:

$$1)\ \operatorname{grad}\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{r}), \qquad 2)\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{r}).$$

1.8. Вычислить лапласиан следующих скалярных полей ($\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$)

$$1)\ u = \frac{q}{r}, \quad q = const;$$
$$2)\ u = \frac{1}{r}v(\boldsymbol{r}),$$

если в последнем выражении функция $v(\boldsymbol{r})$ – гармоническая функция.

1.9. Используя формулу Остроградского-Гаусса, найти поток векторного поля

$$\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$$

через внешнюю поверхность куба $|x| < a$, $|y| < a$, $|z| < a$.

1.10. Найти потенциал электростатического поля заряженного шара, радиус которого r_0, а плотность заряда – сферически симметричная функция, равная

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

1.11. Вычислить градиенты скалярных полей:

$$1)\ u = \begin{cases} \varphi_0 - \pi\rho^2, & \rho \le a, \\ \varphi_0 - \pi a^2 \left(1 + 2\ln\frac{\rho}{a}\right), & \rho \ge a; \end{cases}$$

$$2)\ u = \rho + z\cos\varphi,$$

заданных в цилиндрических координатах ρ, φ, z.

1.12. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = 12x^2yz\boldsymbol{i} + 4x^3z\boldsymbol{j} + (4x^3y - 2e^{2z})\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

1.13. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{e}_\rho - z\boldsymbol{e}_\varphi + \cos\varphi\boldsymbol{e}_z$, заданного в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z), через замкнутую поверхность, образованную цилиндром $\rho = 2$ и плоскостями $z = 0$ и $z = 2$.

1.14. Специальная система координат вытянутого эллипсоида вращения u, v, φ в $\mathbb{R}^3$ связана с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = a\operatorname{sh}u\sin v\cos\varphi, \quad y = a\operatorname{sh}u\sin v\sin\varphi, \quad z = a\operatorname{ch}u\cos v,$$

$$0 \le u < +\infty, \quad 0 \le v \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для градиента в указанных координатах.

Векторный анализ

2.1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x + \ln(z^2 + y^2)$ в точке $M(2, 1, 1)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

2.2. Вычислить дивергенцию, ротор и лапласиан векторных полей $\boldsymbol{c}|\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{c}\ln|\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{c}|\boldsymbol{r}|^m$ и $\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}|^m$, $m \in \mathbb{Z}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки.

2.3. Найти векторные линии векторных полей:

$$1)\ \boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k};$$
$$2)\ \boldsymbol{A} = (x^2 - y^2 - z^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} + 2xz\boldsymbol{k}.$$

2.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + e^{2z}\boldsymbol{j} + \alpha y e^{2z}\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

2.5. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, если

$$\boldsymbol{A} = ye^z\boldsymbol{i} + ze^x\boldsymbol{j} + xe^y\boldsymbol{k}.$$

2.6. Доказать, что

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{F} + [\boldsymbol{F}, \operatorname{rot}\boldsymbol{F}] = 0$$

при $\boldsymbol{F}^2 = const$.

2.7. Вычислить при $\varphi = \frac{(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{r})}{r^3}$:

$$1)\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{r}), \quad 2)\ \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi.$$

2.8. Вычислить $\Delta\boldsymbol{a}$, где

$$1)\ \boldsymbol{a} = x^3y\boldsymbol{i} + y^3z\boldsymbol{j} + z^3x\boldsymbol{k},$$
$$2)\ \boldsymbol{a} = \frac{x}{y}\boldsymbol{i} + \frac{y}{z}\boldsymbol{j} + \frac{z}{x}\boldsymbol{k}.$$

2.9. Найти по формуле Стокса циркуляцию поля $\boldsymbol{a}$ вдоль контура L, ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат, если

$$\boldsymbol{a} = z^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}, \quad L = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}.$$

2.10. Найти потенциал электростатического поля заряженного шара, радиус которого r_0, а плотность заряда – сферически симметричная функция, равная

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r_0}{r_0 + \alpha r}, \quad \alpha > 0.$$

2.11. Вычислить градиенты скалярных полей:

$$1)\ u = E_0 r\cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right),$$
$$2)\ u = \mu\frac{\cos\theta}{r^2},$$

заданных в сферических координатах r, θ, φ.

2.12. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = ye^z\boldsymbol{i} + ze^x\boldsymbol{j} + xe^y\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$.

2.13. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{l}), \quad L:\ \varphi = \frac{\pi}{4},\ z = 0,\ 0 \le \rho \le 1$$

от векторного поля $\boldsymbol{a} = 2\rho\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \rho\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \rho\varphi\boldsymbol{e}_z$, заданного в цилиндрических координатах (ρ, φ, z).

2.14. Специальная система координат сплюснутого эллипсоида вращения u, v, φ в $\mathbb{R}^3$ связана с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = a\operatorname{ch}u\sin v\cos\varphi, \quad y = a\operatorname{ch}u\sin v\sin\varphi, \quad z = a\operatorname{sh}u\cos v,$$

$$0 \le u < +\infty, \quad 0 \le v \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для дивергенции в указанных координатах.

Векторный анализ

3.1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении, перпендикулярном к лиинии уровня, проходящей через эту точку.

3.2. Пусть в пространственной области D задана дифференцируемая векторная функция $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Найти скорость изменения этой функции при движении точки вдоль кривой, заданной векторным уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

3.3. Найти векторные линии векторных полей:

1) $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$;

2) поля $\boldsymbol{E} = \dfrac{q\boldsymbol{r}}{r^3}$ точечного заряда q, где r – расстояние от точки наблюдения до заряда.

3.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + (x - 2z)\boldsymbol{j} + \alpha y\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

3.5. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, если

$$\boldsymbol{A} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}.$$

3.6. Пусть вектор-функции $\boldsymbol{a}(r)$ и $\boldsymbol{b}(r)$ дифференцируемы, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$. Доказать, что:

$$1)\ \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}(r), \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}(r) + (\boldsymbol{a}'(r), \boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}}{r};$$

$$2)\ \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}(r), \boldsymbol{b}(r)) = ((\boldsymbol{a}'(r), \boldsymbol{b}(r)) + (\boldsymbol{a}(r), \boldsymbol{b}'(r)))\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

3.7. Найти $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(r)$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$.

3.8. Показать, что

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2(\boldsymbol{\nabla}u, \boldsymbol{\nabla}v).$$

3.9. Пусть поле u дважды непрерывно дифференцируемо в Ω, G – область из Ω такая, что $\overline{G} \subset \Omega$ и граница ∂G является поверхностью уровня поля u. Доказать, что

$$\iiint\limits_G \Delta u dv = \pm \iint\limits_{\partial G} |\boldsymbol{\nabla}u| d\sigma,$$

где следует выбрать один из знаков. Объяснить выбор знака.

3.10. Найти потенциал электростатического поля заряженного шара, радиус которого r_0, а плотность заряда – сферически симметричная функция, равная

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{r_0^2 + \alpha^2 r^2}, \quad \alpha > 0.$$

3.11. Вычислить градиенты скалярных полей:

$$1)\ u = \frac{qa^2}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta),$$
$$2)\ u = 2\pi\rho\left(R^2 - \frac{1}{3}r^2\right),$$

заданных в сферических координатах r, θ, φ.

3.12. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = (y\sin 2xy + z\sin 2xz)\boldsymbol{i} + (x\sin 2xy + 1)\boldsymbol{j} + x\sin 2xz\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

3.13. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{l}), \quad L:\ \rho = R,\ z = \varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

от векторного поля $\boldsymbol{a} = \ln\rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \rho^2\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \rho^2\boldsymbol{e}_z$, заданного в цилиндрических координатах (ρ, φ, z).

3.14. Специальная система координат эллиптического цилиндра u, v, z в $\mathbb{R}^3$ связана с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = a\operatorname{ch}u\cos v, \quad y = a\operatorname{sh}u\sin v, \quad z = z,$$

$$0 \le u < +\infty, \quad 0 \le v \le 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для ротора в указанных координатах.

Векторный анализ

4.1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$ в точке $M(2, 4, 4)$ по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности $4z+2x^2-y^2 = 8$, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

4.2. Найти напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$, если распределение потенциала φ в пространстве имеет вид:

$$1)\ \varphi = -Az^2, \quad 2)\ \varphi = k \ln r, \quad 3)\ \varphi = \frac{(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{r})}{r^3}.$$

4.3. По заданному потенциалу скоростей плоского движения идеальной несжимаемой жидкости без источников и стоков найти траектории движения частиц жидкости, а также величину и направление скорости движения, если

$$1)\ \varphi = x, \quad 2)\ \varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

4.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = \alpha xz\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

4.5. Найти такую дифференцируемую функцию $f(r)$, чтобы поле $\boldsymbol{A} = f(r)\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$, было соленоидальным.

4.6. Проверить указанные равенства, используя символ ∇ и правила действия с ним (u, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ – дифференцируемые скалярное и векторные поля, $\boldsymbol{c}$ – постоянный вектор)

$$1)\ \operatorname{rot}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + [\operatorname{grad} u, \boldsymbol{a}];$$
$$2)\ \operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}.$$

4.7. В части пространства, свободной от источников, магнитное поле $\boldsymbol{H}$ удовлетворяет уравнениям:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

Показать, что отсюда следует

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \Delta\varphi = 0,$$

где φ — потенциал поля $\boldsymbol{H}$.

4.8. Проверить, являются ли следующие скалярные поля гармоническими:

$$1)\ u = x^2 + 2xy - y^2,$$
$$2)\ u = x^2y + y^2z + z^2x,$$
$$3)\ u = \ln(x^2 - y^2).$$

4.9. Используя формулу Остроградского-Гаусса, найти поток векторного поля

$$\boldsymbol{a} = (z - y)\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + (y - x)\boldsymbol{k}$$

через полную внешнюю поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$, $x + y - z = 1$, $y = 0$, $x = 0$.

4.10. Вычислить объемный потенциал шара радиуса r_0, если заряд внутри шара распределен со сферически симметричной плотностью

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{\alpha r}{r_0}}, \quad \alpha > 0,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4.11. Вычислить дивергенцию векторов:

$$1)\ \boldsymbol{a} = \frac{2\cos\theta}{r^2}\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta,$$
$$2)\ \boldsymbol{a} = \frac{\cos\varphi}{r}\boldsymbol{e}_r + \varphi\boldsymbol{e}_\varphi - \frac{2}{r}\boldsymbol{e}_\theta,$$

заданных в сферических координатах r, θ, φ.

4.12. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$.

4.13. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + \varphi\boldsymbol{e}_\varphi - z\boldsymbol{e}_z$, заданного в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z), через замкнутую поверхность, образованную цилиндром $\rho = 1$, полуплоскостями $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ и плоскостями $z = 1$, $z = -1$.

4.14. Параболические координаты σ, τ, φ в $\mathbb{R}^3$ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = \sigma\tau\cos\varphi, \quad y = \sigma\tau\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2),$$

$$0 \le \sigma < +\infty, \quad 0 \le \tau < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для градиента в указанных координатах.

Векторный анализ

5.1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$ в точке $M(1, 5, -2)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l} = 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

5.2. Найти напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$, если распределение потенциала φ в пространстве имеет вид:

$$1)\ \varphi = -\frac{q}{x}, \quad 2)\ \varphi = Ae^{ax}, \quad 3)\ \varphi = q\frac{e^{-r/a}}{r}.$$

5.3. По заданному потенциалу скоростей плоского движения идеальной несжимаемой жидкости без источников и стоков найти траектории движения частиц жидкости, а также величину и направление скорости движения, если

$$1)\ \varphi = x, \quad 2)\ \varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

5.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = y^{3/2}\boldsymbol{i} + \alpha xy^{1/2}\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

5.5. Найти векторный потенциал магнитного поля бесконечного прямого проводника постоянного тока I (ось Oz направлена по проводнику)

$$\boldsymbol{H} = 2I\frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}.$$

5.6. Проверить указанные равенства, используя символ ∇ и правила действия с ним (u, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ – дифференцируемые скалярное и векторные поля, $\boldsymbol{c}$ – постоянный вектор)

$$1)\ \operatorname{rot}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{c}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a};$$
$$2)\ \operatorname{div}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = (\boldsymbol{b}, \operatorname{rot}\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \operatorname{rot}\boldsymbol{b}).$$

5.7. Доказать равенства

$$1)\ [\boldsymbol{\nabla}, u\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{\nabla}u, \boldsymbol{a}] + u[\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{a}];$$
$$2)\ (\boldsymbol{\nabla}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = (\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{a}]) - (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{b}]).$$

5.8. Проверить, являются ли следующие скалярные поля гармоническими:

$$1)\ u = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$
$$2)\ u = \ln(2z + y),$$
$$3)\ u = \ln(x^2 - y^2).$$

5.9. Используя формулу Стокса, вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})d\sigma,$$

где $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$, а поверхность интегрирования S есть сечение цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ плоскостью $y+z = 2$. Единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ имеет неотрицательную проекцию на ось Oz.

5.10. Вычислить объемный потенциал шара радиуса r_0, если заряд внутри шара распределен со сферически симметричной плотностью

$$\rho(r) = \rho_0 \operatorname{sh} \frac{\alpha r}{r_0}, \quad \alpha > 0,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

5.11. Вычислить ротор осесимметричных полей:

$$1)\ \boldsymbol{a} = a_\rho(\rho, z)\boldsymbol{e}_\rho + a_z(\rho, z)\boldsymbol{e}_z,$$
$$2)\ \boldsymbol{a} = \rho^2 z\boldsymbol{e}_\rho - \rho z^2\boldsymbol{e}_z.$$

5.12. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = (2x\sin y - y\sin x)\boldsymbol{i} + (x^2\cos y - z + \cos x)\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

5.13. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = r^2\theta\boldsymbol{e}_r + re^\theta\boldsymbol{e}_\theta$, заданного в сферической системе координат (r, θ, φ), через внешнюю сторону верхней полусферы радиуса R с центром в начале координат.

5.14. Координаты параболического цилиндра σ, τ, z в $\mathbb{R}^3$ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = \sigma\tau, \quad y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), \quad z = z,$$

$$-\infty < \sigma < +\infty, \quad 0 \le \tau < +\infty 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для дивергенции в указанных координатах.

Векторный анализ

6.1. Найти производную скалярного поля $u = xyz$ в точке $M_0(1, -1, 1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2, 3, 1)$.

6.2. Найти градиент скалярной функции φ:

$$1)\ \varphi = r^3(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}), \quad 2)\ \varphi = ((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}))\sin(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})), \quad 3)\ \varphi = (\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{a}r, \boldsymbol{b}]).$$

6.3. Магнитное поле прямого бесконечного проводника постоянного тока $I (I > 0)$ задается как поле вектора напряженности $\boldsymbol{H}$. Если ось Oz совместить с проводником по направлению тока, то

$$\boldsymbol{H} = 2I\frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}.$$

Найти векторные линии напряженности магнитного поля.

6.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = \alpha z\boldsymbol{i} - 4e^{-y}\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

6.5. Электрический заряд q, движущийся с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$, создает в пространстве (вакууме) в фиксированный момент времени магнитное поле напряженности

$$\boldsymbol{H}(M) = \frac{[q\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}]}{4\pi r^3},$$

где $\boldsymbol{r}$ – вектор с началом в заряде, а концом в M, $r = |\boldsymbol{r}|$. Найти векторный потенциал этого поля.

6.6. Получить формулы:

1) $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}, u\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}u,\ \boldsymbol{c} = const$;
2) $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}, u\boldsymbol{A}) = u\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A})\boldsymbol{\nabla}u + [\boldsymbol{\nabla}u, [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A}]] + (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}u + (\boldsymbol{\nabla}u, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}$;
3) $[\boldsymbol{\nabla}, [\boldsymbol{\nabla}u, \boldsymbol{c}]] = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}u - \boldsymbol{c}\Delta u$.

6.7. Доказать равенства

1) $[\boldsymbol{\nabla}, [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{a}]] = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{a}) - \Delta\boldsymbol{a}$;
2) $[\boldsymbol{\nabla}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]] = (\boldsymbol{a}, \nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}, \nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{a})$.

6.8. Найти

1) все гармонические поля, зависящие только от x;

2) все решения уравнения Пуассона $\Delta u = x^{n-2}$, зависящие только отx.

6.9. Пусть u и $\boldsymbol{a}$ — непрерывно дифференцируемые поля в Ω, G – область из Ω, $\overline{G} \subset \Omega$, ∂G — кусочно-гладкая поверхность, ориентированная внешней нормалью. Доказать, что

$$\iint\limits_{\partial G}(u\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})d\sigma = \iiint\limits_{G}(u(\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nabla}u))dv.$$

6.10. В шаре, радиус которого r_0, распределен заряд со сферически симметричной плотностью $\rho(r) = \rho_0\left(k - \frac{r}{r_0}\right)$. Существуют ли значения k такие, что электрическое поле вне шара равно нулю? Каков потенциал шара в этом случае?

6.11. Вычислить ротор полей:

$$1)\ \boldsymbol{a} = \sin\varphi \boldsymbol{e}_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi - \rho z \boldsymbol{e}_z,$$

$$2)\ \boldsymbol{a} = \frac{\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta.$$

6.12. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = ye^{x^2}\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} - (2xyze^{x^2} + z^2)\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$.

6.13. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{l}), \quad L:\ r = 1,\ \varphi = 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

от векторного поля $\boldsymbol{a} = r\sin\theta\boldsymbol{e}_r + 3\theta^2\boldsymbol{e}_\theta + \varphi\rho\boldsymbol{e}_\varphi$, заданного в сферических координатах (r, θ, φ).

6.14. Бицилиндрические координаты σ, τ, z в $\mathbb{R}^3$ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad y = \frac{a\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad z = z,$$

$$0 \leq \sigma < 2\pi, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для ротора в указанных координатах.

Векторный анализ

7.1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x^2y/4-\sqrt{x^2 + 5z^2}$ в точке $M(-2, 1/2, 1)$ по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности $z^2 = x^2 + 4y^2 - 4$, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

7.2. Найти градиент скалярной функции φ:

$$1)\ \varphi = \frac{e^{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r})}}{r}, \quad 2)\ \varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r})^3}{r^2}, \quad 3)\ \varphi = \frac{\sin r}{r}.$$

7.3. Найти векторные линии векторных полей:

1) $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$;
2) $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ – постоянные векторы,

где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

7.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = ze^{x+y}\boldsymbol{i} - \alpha ze^{x+y}\boldsymbol{j} + e^{x+y}\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

7.5. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, если

$$\boldsymbol{A} = 2y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k}.$$

7.6. Показать, что

1) $\operatorname{div}[\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v] = 0$;
2) векторы$\boldsymbol{A} = u\boldsymbol{\nabla} v$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ перпендикулярны.

7.7. Доказать равенства

1) $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2(\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v)$;
2) $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}, \nabla)\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}, \operatorname{rot} \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}, \operatorname{rot} \boldsymbol{a}]$.

7.8. Показать, что

1) $\Delta f(\varphi) = f'(\varphi)\Delta\varphi + f''(\varphi)(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2$;
2) $\Delta\varphi^\alpha = \alpha\varphi^{\alpha-2}[\varphi\Delta\varphi + (\alpha - 1)(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2]$.

7.9. Используя формулу Остроградского-Гаусса, найти поток векторного поля

$$\boldsymbol{a} = y^2z\boldsymbol{i} - yz^2\boldsymbol{j} + x(y^2 + z^2)\boldsymbol{k}$$

через полную внешнюю поверхность цилиндра $y^2 + z^2 \le a^2$, $0 \le x \le a$.

7.10. Найти потенциал электростатического поля заряженного шара, радиус которого r_0, а плотность заряда – сферически симметричная функция, равная

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r_0 r}{r_0^2 + \alpha^2 r^2}, \quad \alpha > 0.$$

7.11. Вычислить ротор полей:

$$1)\ \boldsymbol{a} = r\boldsymbol{e}_r + (b+r)\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi,$$
$$2)\ \boldsymbol{a} = (2r + b\cos\theta)\boldsymbol{e}_r - b\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta + r\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi.$$

7.12. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{y}\right)\boldsymbol{i} + \frac{1-x}{y^2}\boldsymbol{j} + (2-3z^2)\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

7.13. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta$, заданного в сферической системе координат (r,θ,φ), через внешнюю сторону сферы радиуса R с центром в начале координат.

7.14. Тороидальные координаты σ, τ, φ в $\mathbb{R}^3$ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\tau\cos\varphi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad y = \frac{a\operatorname{sh}\tau\sin\varphi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad z = \frac{a\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma},$$
$$-\pi \le \sigma \le \pi, \quad 0 \le \tau < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для градиента в указанных координатах.

Векторный анализ

8.1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = y\ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z$ в точке $M(0, 1, 1)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

8.2. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$:

$$1)\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})^n,\ n \in \mathbb{Z}, \quad 2)\ \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}]\operatorname{tg} r^2, \quad 3)\ \boldsymbol{A} = \left[\frac{\boldsymbol{a}}{r}, (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\right],$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ – постоянные векторы.

8.3. Найти векторные линии векторных полей:

$$1)\ \boldsymbol{A} = f(r)\boldsymbol{r};$$
$$2)\ \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}],\ \boldsymbol{c} = const,$$

где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$.

8.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = \frac{2xy}{\sqrt{1+x^2}}\boldsymbol{i} - \alpha\sqrt{1+x^2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

8.5. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, если

$$\boldsymbol{A} = ye^{x^2}\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} - \left(2xyze^{x^2} + z^2\right)\boldsymbol{k}.$$

8.6. Вычислить $[\boldsymbol{\nabla}, [\boldsymbol{c}, f(r)\boldsymbol{r}]]$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, $r = |\boldsymbol{r}|$ — длина радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, а функция $f(r)$ дифференцируема.

8.7. Записать выражения для $\boldsymbol{\nabla}u$ и $\boldsymbol{\nabla}^2 u$ для центральных (сферических) и осевых (цилиндрических) скалярных полей $u = u(r)$ соответственно в сферических и цилиндрических координатах.

8.8. Показать, что

$$1)\ \Delta\ln\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\varphi}{\varphi}\right)^2;$$
$$2)\ \Delta e^{\varphi} = e^{\varphi}[\Delta\varphi + (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2].$$

8.9. Используя формулу Стокса, вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})d\sigma,$$

где $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, а поверхность интегрирования S есть треугольник с вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ имеет неотрицательную проекцию на ось Oz.

8.10. Вычислить объемный потенциал шара радиуса r_0, если заряд внутри шара распределен со сферически симметричной плотностью

$$\rho(r) = \rho_0 \cos \frac{\alpha r}{r_0}, \quad \alpha > 0,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

8.11. Найти градиенты скалярных полей:

$$1)\ u(\rho, \varphi, z) = \rho^2 + 2\rho \cos \varphi - e^z \sin \varphi;$$
$$2)\ u(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \theta.$$

8.12. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = x(z^2 - y^2)\boldsymbol{i} + y(x^2 - z^2)\boldsymbol{j} + z(y^2 - x^2)\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$.

8.13. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{l}), \quad L: \ \varphi = \pi, \ \theta = \frac{\pi}{4}, \ 0 \le r \le 1$$

от векторного поля $\boldsymbol{a} = 3r^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \boldsymbol{e}_r + \theta\varphi \boldsymbol{e}_\theta + \sin^2 \varphi \boldsymbol{e}_\varphi$, заданного в сферических координатах (r, θ, φ).

8.14. Биполярные координаты σ, τ, φ в $\mathbb{R}^3$ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = \frac{a \sin\sigma \cos\varphi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad y = \frac{a \sin\sigma \sin\varphi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad z = \frac{a \operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma},$$
$$-\infty < \tau < +\infty, \quad 0 \le \sigma < \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для дивергенции в указанных координатах.

Векторный анализ

9.1. Вычислить производную скалярного поля $u = \operatorname{arctg}(xy)$ в точке $M_0(1,1)$, принадлежащей параболе $y = x^2$, по направлению этой кривой (в направлении возрастания абсциссы).

9.2. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$:

$$1)\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}\sin(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}), \quad 2)\ \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}]\cos\frac{1}{r}, \quad 3)\ \boldsymbol{A} = \frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r})},$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}$ – постоянные векторы.

9.3. Найти векторные линии векторных полей:

$$1)\ \boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k};$$
$$2)\ \boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},\ \text{где } a_1, a_2, a_3 = const.$$

9.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\boldsymbol{i} + \frac{\alpha y^3 z}{\sqrt{1+y^4}}\boldsymbol{j} + \sqrt{1+y^4}\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

9.5. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, если

$$\boldsymbol{A} = x(z^2 - y^2)\boldsymbol{i} + y(x^2 - z^2)\boldsymbol{j} + z(y^2 - x^2)\boldsymbol{k}.$$

9.6. Показать, что для производной $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a}$ векторного поля $\boldsymbol{a}$ по направлению векторного поля $\boldsymbol{b}$ выполняется равенство

$$2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{\nabla},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]] + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nabla},\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\nabla},\boldsymbol{a}) - [\boldsymbol{a},[\boldsymbol{\nabla},\boldsymbol{b}]] - [\boldsymbol{b},[\boldsymbol{\nabla},\boldsymbol{a}]].$$

9.7. В электродинамике показывается, что напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля с плотностью ρ объемного заряда q в каждой точке области Ω поля удовлетворяет уравнениям Максвелла для электростатического поля

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0.$$

Найти поле $\boldsymbol{E}$.

9.8. Показать, что если функция ψ является решением уравнения $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ и $\boldsymbol{a}$ – некоторый постоянный вектор, то векторные функции

$$\boldsymbol{F}_1 = \operatorname{grad}\psi, \quad \boldsymbol{F}_2 = \operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\psi), \quad \boldsymbol{F}_3 = \operatorname{rot}\boldsymbol{F}_2$$

удовлетворяют уравнению $\Delta\boldsymbol{F} + k^2\boldsymbol{F} = 0$.

9.9. Пусть ограниченная область G имеет кусочно-гладкую границу ∂G, функция u, определенная в $\overline{G}$, гармонична в G, а $\operatorname{grad} u$ непрерывен в $\overline{G}$. Доказать, что

$$\iint\limits_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}d\sigma = 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ – нормаль к ∂G.

9.10. Вычислить объемный потенциал шара радиуса r_0, если заряд внутри шара распределен со сферически симметричной плотностью

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r_0}{r} \sin \frac{\alpha r}{r_0}, \quad \alpha > 0,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

9.11. Найти дивергенции векторных полей:

1) $\boldsymbol{a}(\rho, \varphi, z) = \varphi \operatorname{arctg} \rho \boldsymbol{e}_\rho + 2\boldsymbol{e}_\varphi - z^2 e^z \boldsymbol{e}_z$ (ρ, φ, z – цилиндрические координаты);

2) $\boldsymbol{a}(r, \theta, \varphi) = \dfrac{2\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \dfrac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta$ (r, θ, φ – сферические координаты).

9.12. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{x + y + z}$$

и найти $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

9.13. Вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}$ по заданному контуру L

$$\boldsymbol{a} = \rho \sin\varphi \boldsymbol{e}_\rho + 2\rho\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + z\varphi \boldsymbol{e}_z, \quad L: \ \rho = 1, \ z = 0, \ \varphi = 0, \ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

9.14. Вытянутые сфероидальные координаты λ, μ, φ в $\mathbb{R}^3$ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \cos\varphi, \quad z = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \sin\varphi.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для ротора в указанных координатах.

Векторный анализ

10.1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = xz^2 - \sqrt{x^3 y}$ в точке $M(2, 2, 4)$ по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности $x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0$, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

10.2. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\boldsymbol{A}$:

$$1)\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{c} e^{(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r})}, \quad 2)\ \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}] \sin r, \quad 3)\ \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} e^{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r})}.$$

10.3. Найти векторные линии векторных полей:

$$1)\ \boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k};$$
$$2)\ \boldsymbol{A} = x^3\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}.$$

10.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = z^3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \alpha x z^2 \boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

10.5. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, если

$$\boldsymbol{A} = (1 + 2xy)\boldsymbol{i} - y^2 z\boldsymbol{j} + (z^2 y - 2zy + 1)\boldsymbol{k}.$$

10.6. Доказать формулы

$$(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r})}{r^3}\right) = -[\boldsymbol{\nabla}, \frac{[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}]}{r^3}],$$

где $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторная функция радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ точки, $r = |\boldsymbol{r}|$ и $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

10.7. Записать формулу Остроградского-Гаусса для вектора $\operatorname{grad}\varphi$. Пользуясь полученным соотношением, показать, что если φ — гармоническая функция в области Ω, ограниченной поверхностью S, то

$$\iint\limits_S \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

10.8. Вычислить лапласиан векторного поля

$$1)\ \boldsymbol{a} = \frac{[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{r}]}{r^2},$$
$$2)\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}(r),$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – постоянный вектор.

10.9. Используя формулу Остроградского-Гаусса, найти поток векторного поля

$$\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$$

через полную внешнюю поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le H$.

10.10. Найти объемный потенциал шара, радиус которого r_0, если плотность равна

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \cos\theta.$$

10.11. Найти ротор векторных полей:

$$1)\ \boldsymbol{a}(\rho, \varphi, z) = \cos\varphi \boldsymbol{e}_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi + \rho^2 \boldsymbol{e}_z;$$
$$2)\ \boldsymbol{a}(r, \theta, \varphi) = r^2 \boldsymbol{e}_r + 2\cos\theta \boldsymbol{e}_\theta - \varphi \boldsymbol{e}_\varphi.$$

10.12. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = (1 + 2xy)\boldsymbol{i} - y^2 z\boldsymbol{j} + (z^2 y - 2zy + 1)\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$.

10.13. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{e}_r + r\sin\theta \boldsymbol{e}_\theta - 3r\varphi\sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi$, заданного в сферической системе координат (r, θ, φ), через замкнутую поверхность, ограниченную верхней полусферой $r = R$ и плоскостью $\theta = \pi/2$.

10.14. Сплюснутые сфероидальные координаты λ, μ, φ в $\mathbb{R}^3$ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = c\lambda\mu\sin\varphi, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = c\lambda\mu\cos\varphi.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для градиента в указанных координатах.

Векторный анализ

11.1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = \sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$ в точке $M(\pi/2, 3\pi/2, 3)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$.

11.2. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\boldsymbol{A}$:

$$1)\ \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}], \quad 2)\ \boldsymbol{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{r}]}{r^3}, \quad 3)\ \boldsymbol{A} = [\frac{\boldsymbol{a}}{r}, \boldsymbol{r}].$$

11.3. Найти векторные линии векторных полей:

$$1)\ \boldsymbol{A} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j};$$
$$2)\ \boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}.$$

11.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = (z^2 + 3x^2)\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + \alpha z(x + y)\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

11.5. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, если

$$\boldsymbol{A} = xy\boldsymbol{i} - (y + x)\boldsymbol{j} + (z - zy)\boldsymbol{k}.$$

11.6. Для каждого из перечисленных векторных полей $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{c}|\boldsymbol{r}|, \quad \boldsymbol{c}\ln|\boldsymbol{r}|, \quad \boldsymbol{c}|\boldsymbol{r}|^m, \quad \boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}|^m, m \in \mathbb{Z},$$

где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, найти $[\boldsymbol{\nabla}, [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A}]]$, $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A})$ и $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}$.

11.7. Найти

$$1)\ \operatorname{div}\operatorname{grad}(uv),$$
$$2)\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}(u\boldsymbol{c}),$$

где u, v – дважды дифференцируемые скалярные функции, $\boldsymbol{c}$ – постоянный вектор.

11.8. Вычислить лапласиан следующих скалярных полей

$$1)\ u = \frac{1}{r^n},$$
$$2)\ u = \frac{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{r})}{r^2}.$$

11.9. Найти по формуле Стокса циркуляцию поля $\boldsymbol{a}$ вдоль контура L, ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат, если

$$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad L = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geq 0\}.$$

11.10. Найти объемный потенциал шара, радиус которого r_0, если плотность равна

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0\frac{r}{r_0}\sin\theta\cos\varphi.$$

11.11. Найти все гармонические функции вида (ρ, φ, z – цилиндрические координаты):

$$1)\ u = u(\rho), \quad 2)\ u = u(\varphi), \quad 3)\ u = u(z).$$

11.12. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

11.13. Вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}$ по заданному контуру L

$$\boldsymbol{a} = \rho\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \rho z^2\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \rho^2\cos z\boldsymbol{e}_z, \quad L:\ \rho = R,\ z = 1.$$

11.14. Специальная система координат вытянутого эллипсоида вращения u, v, φ в $\mathbb{R}^3$ связана с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = a\operatorname{sh}u\sin v\cos\varphi, \quad y = a\operatorname{sh}u\sin v\sin\varphi, \quad z = a\operatorname{ch}u\cos v,$$

$$0 \le u < +\infty, \quad 0 \le v \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для дивергенции в указанных координатах.

Векторный анализ

12.1. Найти производную скалярного поля $u = xe^y + ye^x - z^2$ в точке $M_0(3,0,2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2,-1,3)$.

12.2. Векторный потенциал магнитного поля кругового (радиуса a) тока I на больших расстояниях R ($R \geq a$) от него определяется по формуле

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{R^3}[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{R}],$$

где μ – магнитный момент тока. Вычислить напряженность поля $\boldsymbol{H}$.

12.3. Найти векторные линии векторных полей:

$$1)\ \boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k};$$
$$2)\ \boldsymbol{A} = z\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}.$$

12.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + (x + \alpha z)\boldsymbol{j} - (2z + y)\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

12.5. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, если

$$\boldsymbol{A} = x^2yz\boldsymbol{i} + 2xyz\boldsymbol{j} - z^2(xy + x)\boldsymbol{k}.$$

12.6. Доказать, что вектор $\boldsymbol{F} = u\boldsymbol{\nabla}v$ ортогонален к $[\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{F}]$.

12.7. Найти

$$1)\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F}, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{F} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k},$$
$$2)\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F}, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{F} = xy^2\boldsymbol{i} + yz^2\boldsymbol{j} + zx^2\boldsymbol{k}.$$

12.8. Вычислить лапласиан следующих скалярных полей

$$1)\ u = \frac{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{r})}{r^n},$$
$$2)\ u = f(r).$$

12.9. Пусть ограниченная область G имеет кусочно-гладкую границу ∂G, функция u, определенная в $\overline{G}$, гармонична в G, а $\operatorname{grad} u$ непрерывен в $\overline{G}$. Доказать, что если $u = 0$ на ∂G, то $u = 0$ в $\overline{G}$, т.е. гармоническая функция однозначно определяется своими значениями на границе.

12.10. Найти ньютонов потенциал шара, радиус которого r_0, а плотность массы

$$\rho(x,y,z) = \rho_0\frac{z}{r_0}.$$

12.11. Найти все гармонические функции вида (r, θ, φ – сферические координаты):

$$1)\ u = u(r), \quad 2)\ u = u(\theta), \quad 3)\ u = u(\varphi).$$

12.12. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} - (y + x)\boldsymbol{j} + (z - zy)\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$.

12.13. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = r^2\boldsymbol{e}_r + 2\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta - \varphi\boldsymbol{e}_\varphi$, заданного в сферической системе координат (r, θ, φ), через замкнутую поверхность, ограниченную координатными поверхностями $r = R$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\theta = \pi/2$ и лежащую в первом октанте.

12.14. Специальная система координат сплюснутого эллипсоида вращения u, v, φ в $\mathbb{R}^3$ связана с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = a \operatorname{ch} u \sin v \cos\varphi, \quad y = a \operatorname{ch} u \sin v \sin\varphi, \quad z = a \operatorname{sh} u \cos v,$$

$$0 \le u < +\infty, \quad 0 \le v \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для ротора в указанных координатах.

Векторный анализ

13.1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = \operatorname{arctg}(y/x) + xz$ в точке $M(2, 2, -1)$ по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности $x^2+y^2-2z = 10$, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

13.2. Найти дивергенцию и ротор следующих векторов:

$$1)\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})\boldsymbol{b},$$
$$2)\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}],$$
$$3)\ [\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}]], \quad \text{где } \boldsymbol{a} \text{ и } \boldsymbol{b} \text{ – постоянные векторы.}$$

13.3. Найти векторную линию поля $\boldsymbol{A}$, проходящую через точку M, если

$$1)\ \boldsymbol{A} = x^2\boldsymbol{i} - y^3\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k},\ M(1/2; -1/2; 1);$$
$$2)\ \boldsymbol{A} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k},\ M(1; 1; 0).$$

13.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = \alpha xz^2\boldsymbol{i} - y^3\boldsymbol{j} - 2x^2z\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

13.5. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, если

$$\boldsymbol{A} = (y^2 + z^2)\boldsymbol{i} - (xy + z^3)\boldsymbol{j} + (y^2 + zx)\boldsymbol{k}.$$

13.6. Доказать, что вектор $\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v]$ соленоидален, если u и v – дифференцируемые скалярные функции.

13.7. Найти

$$1)\ \operatorname{div}\operatorname{grad}(uv),$$
$$2)\ \Delta\boldsymbol{F}, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{F} = x(y^2 + z^2)\boldsymbol{i} + y(x^2 + z^2)\boldsymbol{j} + z(x^2 + y^2)\boldsymbol{k},$$

где u, v – дважды дифференцируемые скалярные функции.

13.8. Вычислить $\Delta\boldsymbol{a}$, где

$$1)\ \boldsymbol{a} = \ln(y^2 + z^2)\boldsymbol{i} + \ln(z^2 + x^2)\boldsymbol{j} + \ln(x^2 + y^2)\boldsymbol{k},$$
$$2)\ \boldsymbol{a} = \frac{x}{y}\boldsymbol{i} + \frac{y}{z}\boldsymbol{j} + \frac{z}{x}\boldsymbol{k}.$$

13.9. Используя формулу Остроградского-Гаусса, найти поток векторного поля

$$\boldsymbol{a} = (x + z)\boldsymbol{i} + (y + x)\boldsymbol{j} + (z + y)\boldsymbol{k}$$

через внешнюю поверхность тела $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le y$.

13.10. Найти ньютонов потенциал шара, радиус которого r_0, а плотность массы

$$\rho(x, y, z) = \rho_0\frac{z^2}{r_0^2}.$$

13.11. Найти Δu, если

$$1)\ u(\rho, \varphi, z) = \rho^2\varphi + z^2\varphi^3 - \rho\varphi^2;$$
$$2)\ u(r, \theta, \varphi) = r^2\varphi\theta + r^3\varphi^2 + \varphi + \theta^2.$$

13.12. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = e^x \sin y \boldsymbol{i} + e^x \cos y \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

13.13. Вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}$ по заданному контуру L

$$\boldsymbol{a} = \rho \sin \varphi \boldsymbol{e}_\rho + \rho \cos z \boldsymbol{e}_\varphi + \rho\varphi \boldsymbol{e}_z, \quad L: \ \rho = \sin\varphi,\ z = 0,\ 0 \le \varphi \le \pi.$$

13.14. Специальная система координат эллиптического цилиндра u, v, z в $\mathbb{R}^3$ связана с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = z,$$

$$0 \le u < +\infty, \quad 0 \le v \le 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для градиента в указанных координатах.

Векторный анализ

14.1. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z) = x^3 + \sqrt{y^2+z^2}$ в точке $M(1,-3,4)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

14.2. Найти дивергенцию и ротор следующих векторов:

$$1)\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{r})\boldsymbol{r},$$
$$2)\ \varphi(r)[\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}],$$
$$3)\ [\boldsymbol{r},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}]],\quad \text{где}\ \ \boldsymbol{a} \text{ – постоянный вектор.}$$

14.3. Найти векторную линию поля $\boldsymbol{A}$, проходящую через точку M, если

$$1)\ \boldsymbol{A} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k},\ \ c = const,\ \ M(1;0;0);$$
$$2)\ \boldsymbol{A} = x^2\boldsymbol{i} - y^3\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k},\ \ M(1/2;-1/2;1).$$

14.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = -\frac{2xz}{x^2+y^2+1}\boldsymbol{i} + \frac{\alpha yz}{x^2+y^2+1}\boldsymbol{j} + \frac{1}{x^2+y^2+1}\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

14.5. Найти такую дифференцируемую функцию Φ, чтобы поле $\boldsymbol{A} = \Phi(r)\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$, было соленоидальным.

14.6. Найти

$$1)\ \operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}),$$
$$2)\ \operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{F}),$$

где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор, u – скалярная функция, $\boldsymbol{F}$ – векторная функция.

14.7. Доказать, что любое решение уравнения $[\boldsymbol{\nabla},[\boldsymbol{\nabla},\boldsymbol{F}]] = k^2\boldsymbol{F}$, удовлетворяющее условию соленоидальности, удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца $\Delta\boldsymbol{F} + k^2\boldsymbol{F} = 0$.

14.8. Вычислить лапласиан следующих скалярных полей ($\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$)

$$1)\ u = 2\mu\ln\frac{1}{r},\quad \mu = const;$$
$$2)\ u = r^2 v(\boldsymbol{r}),$$

если в последнем выражении функция $v(\boldsymbol{r})$ – гармоническая функция.

14.9. Используя формулу Стокса, вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})d\sigma,$$

где $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} - xz\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, а поверхность интегрирования S есть часть параболоида $x^2 + y^2 = z$, $0 \le z \le 1$. Единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ имеет неотрицательную проекцию на ось Oz.

14.10. Найти потенциал электростатического поля заряженного шара, радиус которого r_0, а плотность заряда – сферически симметричная функция, равная

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

14.11. Найти вектор напряженности магнитного поля при заданном векторном потенциале $\boldsymbol{A} = \{A_\rho, A_\varphi, A_z\}$. Найти $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$.

$$1)\ \boldsymbol{A} = \left\{0, \frac{1}{2}H_0\rho, 0\right\}, \quad 2)\ \boldsymbol{A} = A_0\left\{z\rho^2, 0, -\rho z^2\right\}.$$

14.12. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = x^2yz\boldsymbol{i} + 2xyz\boldsymbol{j} - z^2(xy + x)\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$.

14.13. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = r^2\boldsymbol{e}_r$, заданного в сферической системе координат (r, θ, φ), через замкнутую поверхность, ограниченную верхней полусферой $r = R$ и плоскостью $\theta = \pi/2$.

14.14. Параболические координаты σ, τ, φ в $\mathbb{R}^3$ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = \sigma\tau\cos\varphi, \quad y = \sigma\tau\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2),$$

$$0 \le \sigma < +\infty, \quad 0 \le \tau < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для дивергенции в указанных координатах.

Векторный анализ

15.1. Вычислить производную скалярного поля $u = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0(1, 2)$, принадлежащей параболе $y^2 = 4x$, по направлению этой кривой.

15.2. Вычислить:

$$\begin{aligned}&1)\ \operatorname{grad}(\boldsymbol{F}(r), \boldsymbol{r}),\\&2)\ \operatorname{div}(\varphi(r)\boldsymbol{F}(r)),\\&3)\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nabla})\varphi(r)\boldsymbol{F}(r), \quad \text{где } \ \boldsymbol{a} \text{ – постоянный вектор.}\end{aligned}$$

15.3. Определить векторные линии полей

$$\begin{aligned}&1)\ \boldsymbol{A} = f(r)\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k};\\&2)\ \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - -\text{постоянные векторы.}\end{aligned}$$

15.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = y^2 e^{xy^2}\boldsymbol{i} + \alpha xye^{xy^2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

15.5. Найти векторный потенциал магнитного поля бесконечного прямого проводника постоянного тока I (ось Oz направлена по проводнику)

$$\boldsymbol{H} = 2I\frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}.$$

15.6. В простейшем случае непроводящей однородной и изотропной среды при отсутствии зарядов и токов законы классической теории электромагнетизма постулируются в виде системы уравнений Максвелла

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{H}], \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{E}],$$

$$(\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{E}) = 0, \quad (\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{H}) = 0.$$

Показать, что вектор $\boldsymbol{E}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\boldsymbol{E}.$$

15.7. Найти ($\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$):

$$1)\ \operatorname{div}\operatorname{grad} r^2, \quad 2)\ \operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{c}),\ \boldsymbol{c} = const, \quad 3)\ \operatorname{div}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}],\ \boldsymbol{c} = const.$$

15.8. Проверить, являются ли следующие скалярные поля гармоническими:

$$\begin{aligned}&1)\ u = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},\\&2)\ u = \ln(zyz),\\&3)\ u = \ln(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

15.9. Пусть ограниченная область G имеет кусочно-гладкую границу ∂G, функция u, определенная в $\overline{G}$, гармонична в G, а $\operatorname{grad} u$ непрерывен в $\overline{G}$. Доказать, что если $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$ на ∂G, то $u = const$ в $\overline{G}$, т.е. гармоническая функция определяется с точностью до постоянной значениями своей нормальной производной на границе.

15.10. Вычислить объемный потенциал шара радиуса r_0, если заряд внутри шара распределен со сферически симметричной плотностью

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{\alpha r}{r_0}}, \quad \alpha > 0,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

15.11. Найти вектор напряженности магнитного поля при заданном векторном потенциале $\boldsymbol{A} = \{A_\rho, A_\varphi, A_z\}$. Найти $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$.

$$1)\ \boldsymbol{A} = \{0, 0, B \ln \rho\}, \quad 2)\ \boldsymbol{A} = A_0 \left\{ z\rho^2, z^3\varphi, -\frac{z^4}{4\rho} \right\}.$$

15.12. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

15.13. Вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}$ по заданному контуру L

$$\boldsymbol{a} = e^r \sin\theta \boldsymbol{e}_r + r^2 \sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi, \quad L:\ r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{4}.$$

15.14. Координаты параболического цилиндра σ, τ, z в $\mathbb{R}^3$ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = \sigma\tau, \quad y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), \quad z = z,$$

$$-\infty < \sigma < +\infty, \quad 0 \le \tau < +\infty 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для ротора в указанных координатах.

Векторный анализ

16.1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z$ в точке $M(3, 4, 1)$ по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности $x^2 + y^2 = 24z + 1$, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

16.2. Вычислить:

$$1)\ \operatorname{grad}(\boldsymbol{F}(r), \boldsymbol{G}(r)),$$
$$2)\ \operatorname{rot}(\varphi(r)\boldsymbol{F}(r)),$$
$$3)\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nabla})\varphi(r)\boldsymbol{F}(r), \quad \text{где } \boldsymbol{a} \text{ – постоянный вектор.}$$

16.3. Определить векторные линии полей

$$1)\ \boldsymbol{A} = \frac{1}{x}\boldsymbol{i} + \frac{1}{y}\boldsymbol{j} + \frac{1}{z}\boldsymbol{k};$$
$$2)\ \boldsymbol{A} = (z - y)\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + (y - x)\boldsymbol{k}.$$

16.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = \alpha e^{y-x}\boldsymbol{i} + e^{y-x}\boldsymbol{j} - 3z^2\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

16.5. Электрический заряд q, движущийся с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$, создает в пространстве (вакууме) в фиксированный момент времени магнитное поле напряженности

$$\boldsymbol{H}(M) = \frac{[q\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}]}{4\pi r^3},$$

где $\boldsymbol{r}$ – вектор с началом в заряде, а концом в M, $r = |\boldsymbol{r}|$. Найти векторный потенциал этого поля.

16.6. В простейшем случае непроводящей однородной и изотропной среды при отсутствии зарядов и токов законы классической теории электромагнетизма постулируются в виде системы уравнений Максвелла

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{H}], \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{E}],$$
$$(\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{E}) = 0, \quad (\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{H}) = 0.$$

Показать, что вектор $\boldsymbol{H}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\boldsymbol{H}.$$

16.7. Найти ($\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$):

$$1)\ \operatorname{div}\operatorname{grad}(1/r), \quad 2)\ \operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{r}), \quad 3)\ \operatorname{div}[\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}]],\ \boldsymbol{c} = const.$$

16.8. Вычислить лапласиан векторного поля

$$1)\ \boldsymbol{a} = \frac{[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{r}]}{r^4},$$
$$2)\ \boldsymbol{a} = f(r)[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{r}],$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – постоянный вектор.

16.9. Используя формулу Остроградского-Гаусса, найти поток векторного поля

$$\boldsymbol{a} = x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$$

через внешнюю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

16.10. Найти потенциал электростатического поля заряженного шара, радиус которого r_0, а плотность заряда – сферически симметричная функция, равная

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r_0}{r_0 + \alpha r}, \quad \alpha > 0.$$

16.11. Найти вектор напряженности магнитного поля при заданном векторном потенциале $\boldsymbol{A} = \{A_\rho, A_\varphi, A_z\}$. Найти $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$.

$$1)\ \boldsymbol{A} = \left\{\frac{C}{\rho}, 0, 0\right\}, \quad 2)\ \boldsymbol{A} = A_0\left\{-\frac{\sin\varphi}{\rho^2}, \frac{\cos\varphi}{\rho^2}, -\frac{1}{z\rho}\right\}.$$

16.12. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = (y^2 + z^2)\boldsymbol{i} - (xy + z^3)\boldsymbol{j} + (y^2 + zx)\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$.

16.13. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{l}), \quad L:\ r = \frac{1}{\sin\theta},\ \varphi = \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

от векторного поля $\boldsymbol{a} = \sin^\theta \boldsymbol{e}_r + \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta + r^2\theta \boldsymbol{e}_\varphi$, заданного в сферических координатах (r, θ, φ).

16.14. Бицилиндрические координаты σ, τ, z в $\mathbb{R}^3$ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad y = \frac{a\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad z = z,$$

$$0 \leq \sigma < 2\pi, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для градиента в указанных координатах.

Векторный анализ

17.1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ в точке $M(1, -3, 4)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

17.2. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – постоянные векторы, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$. Найти $\operatorname{grad} u$, если:

$$1)\ u = (1/r), \quad 2)\ u = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}), \quad 3)\ u = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}]|^2.$$

17.3. Определить векторные линии полей

$$1)\ \boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},\ a_i = const,\ i = 1, 2, 3;$$
$$2)\ \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}],\ \boldsymbol{a} = const,\ \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

17.4. Определить значение параметра α, при котором векторное поле

$$\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + \alpha z e^{-y}\boldsymbol{j} + e^{-y}\boldsymbol{k}$$

будет потенциальным, и найти его скалярный потенциал.

17.5. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, если

$$\boldsymbol{A} = (x^2 - yz + 2)\boldsymbol{i} - 2xy\boldsymbol{j} + (yx^3)\boldsymbol{k}.$$

17.6. Вычислить

$$1)\ r^3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nabla})^2 r, \quad 2)\ \operatorname{div}[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r}] + (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\nabla})\frac{1}{r},$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ – постоянные векторы, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

17.7. Найти ($\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$):

$$1)\ \operatorname{div}\operatorname{grad} f(r), \quad 2)\ \operatorname{div}(r\boldsymbol{c}),\ \boldsymbol{c} = const, \quad 3)\ \operatorname{div}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}],\ \boldsymbol{c} = const.$$

17.8. Показать, что

$$1)\ \Delta f(\varphi) = f'(\varphi)\Delta\varphi + f''(\varphi)(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2;$$
$$2)\ \Delta\varphi^\alpha = \alpha\varphi^{\alpha-2}[\varphi\Delta\varphi + (\alpha - 1)(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2].$$

17.9. Найти по формуле Стокса циркуляцию поля $\boldsymbol{a}$ вдоль контура L, ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат, если

$$\boldsymbol{a} = zx\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}, \quad L = \{y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}.$$

17.10. Вычислить объемный потенциал шара радиуса r_0, если заряд внутри шара распределен со сферически симметричной плотностью

$$\rho(r) = \rho_0 \operatorname{sh}\frac{\alpha r}{r_0}, \quad \alpha > 0,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

17.11. Найти вектор напряженности магнитного поля при заданном векторном потенциале $\boldsymbol{A} = \{A_r, A_\theta, A_\varphi\}$. Найти $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$.

$$1)\ \boldsymbol{A} = A_0 \left\{ \frac{2\cos\theta}{r^2}, \frac{\sin\theta}{2r^2}, 0 \right\}, \quad 2)\ \boldsymbol{A} = A_0 \left\{ r, 0, a + r\sin\theta \right\}.$$

17.12. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля

$$\boldsymbol{a} = yz(2x+y+z)\boldsymbol{i} + xz(x+2y+z)\boldsymbol{j} + xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$$

и найти $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

17.13. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = r^2 \boldsymbol{e}_r$, заданного в сферической системе координат (r, θ, φ), через замкнутую поверхность, ограниченную верхней полусферой $r = R$ и плоскостью $\theta = \pi/2$.

17.14. Тороидальные координаты σ, τ, φ в $\mathbb{R}^3$ связаны с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x = \frac{a \operatorname{sh}\tau \cos\varphi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh}\tau \sin\varphi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad z = \frac{a \sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma},$$

$$-\pi \le \sigma \le \pi, \quad 0 \le \tau < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Найти:

1) координатные линии и координатные поверхности системы координат;
2) локальный базис системы координат;
3) коэффициенты Ламе;
4) выражение для дивергенции в указанных координатах.