Список вопросов к экзамену по курсу
"Интегральные уравнения и вариационное исчисление"

1. Линейное нормированное пространство. Метрическое пространство. Функциональные пространства $C^k[a,b]$, $L_2[a,b]$.

2. Понятие функционала. Линейный функционал. Дифференцируемость функционала по Фреше/Гато. Доказать, что если функционал $J[y]$ дифференцируем по Фреше в точке y_0, то его дифференциал Гато в точке y_0 существует и совпадает с дифференциалом Фреше.

3. Локальный и абсолютный экстремум функционала. Сильный и слабый локальный экстремум. Необходимое условие экстремума функционала (док-во).

4. Сформулировать простейшую вариационную задачу с закрепленными концами и получить необходимое условие экстремума для этой задачи. Определить случаи, в которых возможно понизить порядок уравнения Эйлера.

5. Решить вариационную задачу (задача о брахистохроне):
   Определить кривую в вертикальной плоскости, соединяющую заданные точки M_1 и M_2, не лежащие на одной вертикальной прямой, при движении по которой материальная точка под действием силы тяжести скатится из точки M_1 в точку M_2 в кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

6. Задачи на условный экстремум. Сформулировать задачу Лагранжа с закрепленными концами и фазовыми/дифференциальными ограничениями. Сформулировать изопериметрическую задачу с закрепленными концами и получить необходимые условия экстремума для этой задачи.

7. Дважды дифференцируемый функционал. Вторая вариация функционала. Необходимое условие экстремума второго порядка (док-во).

8. Сформулировать необходимые условия экстремума второго порядка для задачи с закрепленными концами. Доказать необходимое условие Лежандра слабого экстремума.

9. Задача о таутохроне. Обобщенное уравнение Абеля и его решение.

10. Метод определителей Фредгольма (изложить и обосновать). Построить резольвенту интегрального уравнения Фредгольма с помощью минора $D(x,y;\lambda)$ и определителя $D(\lambda)$ Фредгольма.

11. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Сформулировать и доказать свойства собственных функций.

12. Интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром (схема решения). Сформулировать теоремы Фредгольма для случая вырожденного ядра. Альтернатива Фредгольма.

13. Сжимающий оператор. Неподвижная точка сжимающего оператора. Теорема о существовании неподвижной точки у сжимающего оператора (док-во). Метод последовательных приближений. Оценка ошибки n-го приближения.

14. На основе принципа сжимающих отображений определить условия существования и единственности решения неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода в пространстве $C[a,b]$ (в пространстве $L_2[a,b]$). Сформулировать метод последовательных приближений для уравнения Фредгольма.

15. Показать, что если $K(x,y)$ – непрерывное ядро уравнения Фредгольма 2-го рода и

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \quad M = \sup_{a\le x\le b} |K(x,y)|,$$

то резольвента $R(x,y;\lambda)$ данного интегрального уравнения есть сумма равномерно и абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,y)$, где $K_n(x,y)$, $n = 1,2,\ldots$ – итерированные (повторные) ядра этого уравнения.

16. На основе принципа сжимающих отображений определить условия существования и единственности решения неоднородного уравнения Вольтерра 2-го рода в пространстве непрерывных функций. Сформулировать метод последовательных приближений для уравнения Вольтерра.

17. Показать, что при любых значениях параметра λ резольвента $R(x,y;\lambda)$ уравнения Вольтерра с ядром $K(x,y)$ есть сумма равномерно и абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,y)$, где $K_n(x,y)$, $n = 1,2,\ldots$ – итерированные (повторные) ядра этого уравнения.

18. Применение преобразования Лапласа к решению интегральных уравнений Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов. Построение резольвенты данного уравнения.

Литература

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Едиториал УРСС, 1998.

2. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: Изд-во МГТУ, 1999.

3. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.

4. Волков В.Т., Ягола А.Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций. Учеб. пособие для вузов. – М.: Университет, 2008.

5. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. Методы математической физики. IV. Уравнения математической физики. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002.

6. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. – М.: Изд. МГУ, 1989.

7. Краснов М.П. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1981.

8. Краснов М.П., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1973.

9. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах: Учебн. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2000.

10. Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. – М.: Наука, 1968.