Томский политехнический университет

А.Н. Мягкий

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Содержание

Предисловие

Вариационное исчисление – раздел математики, посвященный исследованию методов отыскания экстремальных (наименьших или наибольших) значений функционалов, зависящих от выбора одной или нескольких функций при разного рода ограничениях (фазовых, дифференциальных, интегральных), накладываемых на эти функции.

Понятие функционала является важным обобщением понятия функции из математического анализа. При этом существенное отличие функционала от функции состоит в том, что значения его аргументов не числа, как у обычной функции, а функции одного или нескольких переменных. Таким образом, функционал определяет отображение, которое каждой функции определенного класса ставит в соответствие число – значение функционала. С геометрической точки зрения разница между функционалом и функцией состоит в том, что обычная функция есть функция точки на прямой, плоскости или в пространстве, тогда как функционал есть функция более сложных геометрических объектов, например, линий или поверхностей.

В пособии подробно рассматриваются следующие элементарные задачи классического вариационного исчисления: задача с закрепленными концами, задача с подвижными границами, задача на условный экстремум, задача Больца и некоторые другие. Отдельно представлены вариационные задачи в параметрической форме и задачи, допускающие в качестве решений кривые с точками излома. Вводится понятие второй вариации функционала. Формулируются и детально разбираются необходимые и достаточные условия слабого и сильного экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления. Приводится общая схема исследования функционала на экстремум. Наряду с вышеперечисленным в пособии изложены основы теории Гамильтона–Якоби, в рамках которой формулируется один из важнейших вариационных принципов классической механики – принцип Гамильтона. В заключение приводятся некоторые сведения из теории прямых методов вариационного исчисления. В частности, обсуждается конечно-разностный метод Эйлера и метод Ритца.

При изучении разделов данного пособия требуется знание основ математического анализа и линейной алгебры. Предполагается, что читатель знаком с элементарными приемами дифференцирования и интегрирования функций, умеет решать простейшие дифференциальные уравнения.

Основные источники, использованные при написании этого пособия, включены в список рекомендуемой литературы, размещенный в конце книги. Там же приводится список задачников и пособий, использование которых на практических занятиях может быть полезным с точки зрения более полного усвоения студентами теоретического материала курса.

Автор выражает признательность П.О. Казинскому и А.Л. Лиску за ценные замечания, сделанные в процессе подготовки рукописи.

1 Функционалы

1.1 Функциональные пространства

Введем понятие линейного нормированного пространства.

Определение. Непустое множество E элементов x, y, z, ... произвольной природы называется *линейным пространством над полем* $\mathbb{R}$, если на этом множестве определены операции сложения элементов и умножения их на числа, причем выполнены следующие аксиомы: $\forall x, y, z \in E$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) существует такой элемент θ (нулевой элемент), что $x + \theta = x$ для любого $x \in E$;

4) для каждого $x \in E$ существует такой элемент $-x$ (противоположный элемент), что $x + (-x) = \theta$;

5) $1 \cdot x = x$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Определение. *Нормой* в линейном пространстве E называется отображение $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in E$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Определение. Линейное пространство E с заданной на нем нормой называется *линейным нормированным пространством.* Число $\|x\|$ называется *нормой элемента* x.

Определение. Множество M элементов x, y, z, ... произвольной природы называется *метрическим пространством*, если задано отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, которое каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in M$ ставит в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$ такое, что

1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$ причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \ \ \forall x, y \in M$;

3) $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z) \ \ \forall x, y, z \in M$.

Число $\rho(x,y)$ называется *расстоянием* между элементами x и y, а отображение ρ – *метрикой*, заданной на данном множестве M. Элементы метрического пространства будем называть *точками*. Следует заметить, что метрическое пространство не обязательно является линейным.

В метрическом пространстве можно ввести понятие сходимости последовательности элементов.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\} \subset M$ сходится к элементу $x_0 \in M$, если $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначение: $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Определение. Последовательность $\{x_n\} \subset M$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для любых $n, m \geq N$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Определение. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу этого пространства.

В линейном нормированном пространстве E отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, определенное равенством

$$\rho(x,y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E,$$

является метрикой. Действительно, нетрудно проверить, что аксиомы метрики вытекают из аксиом нормы. Таким образом, всякое линейное нормированное пространство является метрическим. Обратное, в общем случае, неверно.

Отсюда следует, что общие понятия метрического пространства переносятся на случай нормированного пространства. В частности, сходимость последовательности элементов в линейном нормированном пространстве определяется следующим образом.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\} \subset E$ сходится (по норме пространства E) к элементу $x_0 \in E$, если $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Упражнение 1. Докажите, что если $x_n \to x_0$, то $\|x_n\| \to \|x_0\|$ при $n \to \infty$, причем обратное неверно.

Если линейное нормированное пространство является полным по метрике, порожденной нормой, то оно называется *банаховым*.

Пространство, элементы которого есть функции $y(x)$, называют *функциональными пространствами.* Не существует какого-либо "универсального" функционального пространства. Это пространство приходится выбирать в зависимости от характера рассматриваемой вариационной задачи.

Приведем примеры линейных нормированных функциональных пространств, наиболее часто используемых в задачах классического вариационного исчисления:

1) *Пространство* $C^k[a,b]$ – множество всевозможных функций, определенных на отрезке $[a,b]$ и имеющих на этом отрезке непрерывные производные до k-го порядка включительно. Операции сложения функций и умножения функций на число определяются обычным образом. Норму элемента $y(x) \in C^k[a,b]$ определим формулой
$$\|y\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \max_{a \le x \le b} |y^{(i)}(x)|.$$
Сходимость в $C^k[a,b]$ означает равномерную сходимость как последовательности самих функций, так и последовательностей их производных i-го порядка $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

2) *Пространство* $C[a,b]$ – множество всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. Норма элемента $y(x) \in C[a,b]$ определяется по формуле
$$\|y\|_C = \max_{a \le x \le b} |y(x)|.$$

3) *Пространство* $C^1[a,b]$ – множество всевозможных функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ вместе со своей первой производной. Норма элемента $y(x) \in C[a,b]$ определяется по формуле
$$\|y\|_{C^1} = \max_{a \le x \le b} |y(x)| + \max_{a \le x \le b} |y'(x)|.$$

4) *Пространство* $KC[a,b]$ – множество *кусочно-непрерывных* функций на отрезке $[a,b]$, т.е. таких функций, которые могут иметь лишь конечное число разрывов, причем разрывы только первого рода. Пространство $KC[a,b]$ является естественным расширением пространства $C[a,b]$. Норму в этом пространстве можно определить по формуле
$$\|y\|_{KC} = \sup_{a \le x \le b} |y(x)|.$$

5) *Пространство* $KC^1[a,b]$ – множество всевозможных функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ и имеющих кусочно-непрерывную

производную на этом отрезке, причем последняя имеет конечное число разрывов первого рода. Такие функции называют *кусочно-гладкими* функциями. Пространство $KC^1[a,b]$ является естественным расширением пространства $C^1[a,b]$. Норму в этом пространстве определим так же, как в пространстве $C[a,b]$.

Упражнение 2. Показать, что пространство $C^k[a,b]$ с введенной выше нормой $\|\cdot\|_{C^k}$ является банаховым.

Упражнение 3. Показать, что норму в пространстве $C^k[a,b]$ можно определить также соотношением

$$\|y\|_{C^k} = \max_{a\le x\le b}\left\{|y(x)|, |y'(x)|, \ldots, |y^{(k)}(x)|\right\}.$$

Введем понятие расстояния между функциями и понятие окрестности функции в линейных нормированных функциональных пространствах $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$.

Определение. *Расстоянием в пространстве* $C[a,b]$ между функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из этого пространства называется неотрицательное число

$$\rho_0(y_1,y_2) = \|y_1 - y_2\|_C = \max_{a\le x\le b}|y_1(x) - y_2(x)|.$$

Определение. *Расстоянием в пространстве* $C^1[a,b]$ между функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из этого пространства называется неотрицательное число

$$\rho_1(y_1,y_2) = \|y_1 - y_2\|_{C^1} = \max_{a\le x\le b}|y_1(x) - y_2(x)| + \max_{a\le x\le b}|y_1'(x) - y_2'(x)|.$$

Пример 1. Найти расстояние между функциями $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) = x^3$, $x \in [0,1]$ по норме пространства: а) $C[0,1]$; б) $C^1[0,1]$.

► а) Расстояние между функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ по норме пространства $C[0,1]$ определяется формулой

$$\rho_0(y_1,y_2) = \|y_1 - y_2\|_C = \max_{x\in[0,1]}|x^2 - x^3|.$$

Найдем наибольшее значение функции $y(x) = |x^2 - x^3|$ на отрезке $[0,1]$. Из необходимого условия экстремума функции получаем критические точки: $x = 0$ и $x = 2/3$. Вторая производная в точке $x = 2/3$ отрицательна, поэтому в ней достигается локальный максимум. На концах отрезка $[0,1]$ функция $y(x)$ обращается в нуль. Следовательно, в точке $x = 2/3$ функция $y(x)$ достигает своего наибольшего значения на отрезке $[0,1]$, равного $4/27$. Тогда

$$\rho_0(y_1,y_2) = \frac{4}{27}.$$

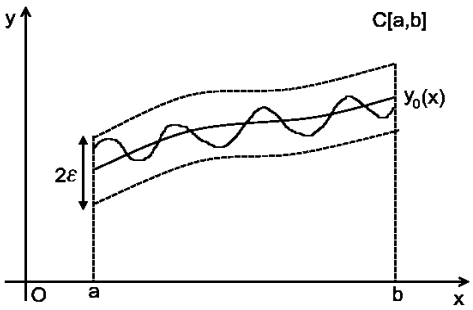

Рис. 1.

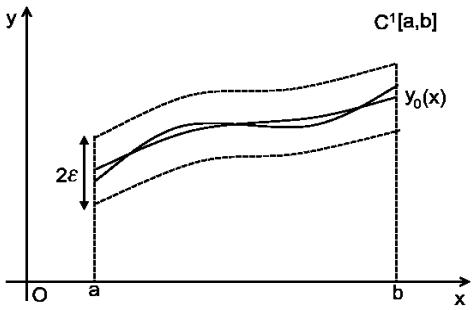

Рис. 2.

б) Расстояние между функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ по норме пространства $C^1[0,1]$ определяется формулой

$$\rho_1(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{C^1} = \max_{x\in[0,1]} |x^2 - x^3| + \max_{x\in[0,1]} |2x - 3x^2|.$$

Так как максимальное значение первого слагаемого уже известно, то исследуем второе слагаемое. Необходимое условие экстремума функции $y(x) = |2x - 3x^2|$ дает $x = 1/3$. Значение функции на границе равны 0 и 1, а значение в точке $x = 1/3$ равно $1/3$. Поэтому наибольшее значение функции $y(x)$ достигается в точке $x = 1$. Отсюда

$$\rho_1(y_1, y_2) = \frac{4}{27} + 1 = \frac{31}{27}.$$

◀

Определение. *Сильной ε-окрестностью* функции $y_0(x)$ называется множество функций

$$U_0(y_0, \varepsilon) = \{y(x) \in C[a,b] : \ \|y_0 - y\|_C < \varepsilon\}.$$

Определение. *Слабой ε-окрестностью* функции $y_0(x)$ называется множество функций

$$U_1(y_0, \varepsilon) = \{y(x) \in C^1[a,b] : \ \|y_0 - y\|_{C^1} < \varepsilon\}.$$

Если функция $y(x)$ принадлежит сильной ε-окрестности функции $y_0(x)$, то геометрически это означает близость этих функций по ординатам (см. рис. 1); если же функция $y(x)$ принадлежит слабой ε-окрестности функции $y_0(x)$, то это означает, что данные функции *близки как по ординатам, так и по направлениям касательных* в соответствующих точках (см. рис. 2).

Аналогично вводятся понятия расстояния и окрестности в функциональных пространствах $C^k[a,b]$.

Определение. *Расстоянием k-го порядка* между функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из пространства $C^k[a,b]$ называется неотрицательное число

$$\rho_k(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \max_{a \le x \le b} |y_1^{(i)}(x) - y_2^{(i)}(x)|.$$

Определение. *Окрестностью k-го порядка* (радиуса ε) функции $y_0(x) \in C^k[a,b]$ называется множество функций

$$U_k(y_0, \varepsilon) = \{y(x) \in C^k[a,b] : \ \|y_0 - y\|_{C^k} < \varepsilon\}.$$

Если функция $y(x)$ принадлежит ε-окрестности k-го порядка функции $y_0(x) \in C^k[a,b]$, то она принадлежит и ε-окрестности любого меньшего порядка этой функции, т.е. очевидно вложение

$$U_k(y_0, \varepsilon) \subset U_{k-1}(y_0, \varepsilon) \subset \ldots \subset U_1(y_0, \varepsilon) \subset U_0(y_0, \varepsilon).$$

В частности, слабая окрестность функции $y_0(x) \in C^1[a,b]$ всегда содержится в сильной окрестности этой же функции. Обратное в общем случае неверно.

Пример 2. Пусть задана функциональная последовательность

$$y_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Показать, что элементы этой последовательности принадлежат лишь сильной окрестности функции $y_0(x) = 0$.

► Действительно,

$$\max_{a \le x \le b} |y_n(x) - y_0(x)| = \max_{a \le x \le b} \frac{|\sin nx|}{n} = \frac{1}{n},$$

$$\max_{a \le x \le b} |y_n'(x) - y_0'(x)| = \max_{a \le x \le b} |\cos nx| = 1,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\max_{a \le x \le b} |y_n^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| = \max_{a \le x \le b} \left| n^{k-1} \sin\left(nx + \frac{\pi}{2}k\right) \right| = n^{k-1}.$$

Нетрудно видеть, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ возможно подобрать такое значение $n = N \in \mathbb{N}$, начиная с которого элементы последовательности удовлетворяют неравенству $\|y_n(x) - y_0(x)\|_C < \varepsilon$, т.е. последовательность $\{y_n(x)\}$ принадлежит сильной ε-окрестности функции $y_0(x) = 0$, причем $\lim\limits_{n \to \infty} y_n(x) = y_0(x)$. ◄

Упражнение 4. Пусть задана функциональная последовательность

$$y_n(x) = \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Показать, что при $\alpha > 0$ все элементы последовательности, начиная с некоторого номера, принадлежат лишь сильной окрестности функции $y_0(x) = 0$, а при $\alpha > 1$ также и слабой окрестности этой функции.

1.2 Понятие функционала

Как известно, понятие функции связано с возможностью установления соответствия между двумя множествами чисел, одно из которых называют областью определения, а другое – множеством значений функции.

Понятие функционала позволяет установить соответствие между множеством определенного класса функций, например, непрерывных, дифференцируемых, определенных на конечном или бесконечном промежутке, и множеством чисел.

Пусть $\mathcal{M}$ – непустое подмножество линейного нормированного пространства E, элементы которого есть функции $y = y(x)$.

Определение. *Функционалом* называется отображение J, ставящее в соответствие каждому элементу $y \in \mathcal{M}$ действительное число $J[y]$.

Записывают:

$$J: \ \mathcal{M} \subset E \to \mathbb{R} \quad \text{или} \quad J = J[y], \quad y \in \mathcal{M} \subset E.$$

Множество $\mathcal{M}$ называется *областью определения* функционала и обозначается $D(J)$; число $J[y]$ называется *значением* функционала на элементе y. Функции из области определения функционала будем называть *допустимыми функциями.* Аргумент функционала, т.е. функцию $y(x)$, как элемент некоторого функционального пространства в дальнейшем часто будем называть *точкой.*

В задачах классического вариационного исчисления обычно имеют дело с функционалами следующих типов:

- интегральные функционалы

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, \quad y(x) \in C^1[a, b];$$

- терминальные функционалы

$$J[y] = f(y(a), y(b)), \quad y(x) \in C[a, b];$$

- смешанные функционалы

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx + f(y(a), y(b)), \quad y(x) \in C^1[a, b],$$

где $F(x, y, y')$, $f(y(a), y(b))$ — заданные функции. При этом функцию $F(x, y, y')$ называют *интегрантом*, функцию $f(y(a), y(b))$ – *терминантом.*

Пример 3. Приведем типичные примеры функционалов.

1. Функционал
$$J[y] = y'(x_0), \quad y(x) \in C^1[a,b],$$
где x_0 – фиксированная точка из отрезка $[a,b]$, ставит в соответствие функции $y(x) \in C^1[a,b]$ число, равное значению производной этой функции в точке x_0. Областью определения данного функционала является множество непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$.

2. Функционал
$$J[y] = \int\limits_a^b y(x)dx, \quad y(x) \in C[a,b]$$
ставит в соответствие любой непрерывной кривой, определенной на отрезке $[a,b]$, площадь под ней.

Как известно, функция одной переменной называется непрерывной в некоторой точке, если бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое приращение функции. Аналогичным образом определяется и условие непрерывности функционала на заданном элементе линейного нормированного пространства.

Определение. Функционал $J[y]$ называется *непрерывным* в точке $y_0 \in E$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in E$, удовлетворяющих условию $\|y - y_0\| < \delta$ выполняется неравенство
$$|J[y] - J[y_0]| < \varepsilon.$$

Из определения следует, что функционал $J[y]$ является непрерывным в точке $y_0 \in E$, если для любой последовательности $\{y_n\} \subset E$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} J[y_n] = J[y_0]$.

Функционал называется *непрерывным на множестве* $\mathcal{M} \subset E$, если он непрерывен в каждой точке этого множества.

Пусть функционал $J[y]$ определен на функциональном пространстве $C^1[a,b]$. Выберем некоторую функцию $y_0(x)$ из этого функционального пространства. Известно, что функции, принадлежащие слабой окрестности данной функции $y_0(x)$, принадлежат также и сильной окрестности этой функции. Поэтому если функционал на функции $y_0(x)$ обладает некоторым свойством по отношению к функциям из ее сильной окрестности, то этим же свойством он будет обладать и по отношению к функциям из ее слабой окрестности. В частности, из непрерывности функционала $J[y]$ на функции $y_0(x) \in C^1[a,b]$ по норме $\|\cdot\|_C$ следует его непрерывность на этой функции по норме $\|\cdot\|_{C^1}$. Обратное в общем случае неверно.

Пример 4. Исследовать непрерывность функционала

$$J[y] = \int\limits_0^\pi (y')^2 dx, \quad y(x) \in C^1[0,\pi],$$

на функции $y_0(x) = 0$ в ее сильной и слабой окрестности.

► 1) Рассмотрим последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Нетрудно показать, что функции $y_n(x)$ принадлежат лишь сильной окрестности функции $y_0(x) = 0$ (см. пример 2), причем

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0(x).$$

При этом

$$J[y_n] = \int\limits_0^\pi \cos^2 nx dx = \frac{\pi}{2}, \quad J[y_0] = 0.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} J[y_n] \neq J[y_0]$, а, значит, данный функционал разрывен на функции $y_0(x) = 0$ в ее сильной окрестности.

2) Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что существует такое число $\delta > 0$, что как только $\|y - y_0\|_{C^1} = \max\limits_{x\in[0,\pi]} |y(x)| + \max\limits_{x\in[0,\pi]} |y'(x)| < \delta$, то $|J[y] - J[y_0]| < \varepsilon$. Имеем

$$|J[y] - J[y_0]| = \int\limits_0^\pi (y'(x))^2 dx \leq \pi \left\{ \max_{x\in[0,\pi]} |y'(x)| \right\}^2 \leq \pi \|y - y_0\|^2_{C^1}.$$

Выберем $\delta = (\frac{\varepsilon}{\pi})^{1/2}$. Тогда для всех $y(x) \in C^1[0,\pi]$, для которых выполнено неравенство $\|y - y_0\|_{C^1} < (\frac{\varepsilon}{\pi})^{1/2}$, будем иметь $|J[y] - J[y_0]| < \varepsilon$. Согласно определению, это означает, что данный функционал непрерывен на функции $y_0(x) = 0$ в ее слабой окрестности. Можно показать, что этот функционал будет непрерывным не только на функции $y_0(x) = 0$, но и на любой функции $y(x)$ из пространства $C^1[0,\pi]$. ◄

Определение. Функционал $J[y]$ называется *линейным*, если для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и любых функций $y_1(x), y_2(x) \in E$ справедливо равенство

$$J[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 J[y_1] + \alpha_2 J[y_2].$$

Упражнение 5. Доказать, что если линейный функционал непрерывен в какой-либо одной точке $y_0 \in E$, то он непрерывен на E.

Определение. Линейный функционал $J[y]$ называется *ограниченным*, если существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$|J[y]| \leq K \, \|y\|, \quad \forall y \in E.$$

Наименьшая из постоянных K, удовлетворяющих этому неравенству, называется *нормой линейного функционала* $J[y]$ и обозначается $\|J\|$.

Таким образом,

$$|J[y]| \leq \|J\| \, \|y\|.$$

Можно показать, что

$$\|J\| = \sup_{\|y\| \neq 0} \frac{|J[y]|}{\|y\|} = \sup_{\|y\| \leq 1} |J[y]|.$$

Упражнение 6. Доказать, что норма функционала обладает всеми свойствами нормы, т.е.

1) $\|J\| \geq 0$, причем $\|J\| = 0 \Leftrightarrow J[y] = 0$;

2) $\|\alpha J\| = |\alpha| \cdot \|J\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

3) $\|J_1 + J_2\| \leq \|J_1\| + \|J_2\|$.

Упражнение 7. Доказать, что линейный функционал непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Пример 5. Приведем примеры линейных функционалов.

1. Функционал

$$J[y] = \int_a^b \alpha(x) y(x) dx, \quad y(x) \in C[a, b],$$

где $\alpha(x)$ – заданная непрерывная функция, является линейным и ограниченным. Можно показать, что этот функционал является также и непрерывным в пространстве $C[a, b]$ (см. упражнение 7).

2. Функционал

$$J[y] = \alpha y(a) + \beta y'(b), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad y(x) \in C^1[a, b],$$

является линейным и ограниченным, а следовательно, и непрерывным на любой функции из пространства $C^1[a, b]$. При этом заметим, что функционал, определяемый тем же самым равенством, но заданный на пространстве $C[a, b]$, линейным уже не является, так как он определен не на всем $C[a, b]$, а лишь на подпространстве непрерывно дифференцируемых функций.

2 Вариация и экстремум функционала

2.1 Определение вариации функционала

Пусть задан функционал

$$J = J[y], \quad y(x) \in \mathcal{M} \subset E.$$

Фиксируем функцию $y_0(x)$ из области определения $\mathcal{M}$ функционала. Тогда любую другую функцию $y(x) \in \mathcal{M}$ можно представить в виде

$$y(x) = y_0(x) + \delta y(x).$$

Определение. *Вариацией*, или *приращением*, $\delta y(x)$ аргумента $y_0(x)$ функционала $J[y]$ называется разность между двумя функциями $y(x)$ и $y_0(x)$, принадлежащими области определения функционала:

$$\delta y(x) = y(x) - y_0(x).$$

Вариацию $\delta y(x)$ функции $y_0(x) \in \mathcal{M}$ называют *допустимой вариацией*, если $y_0(x) + \delta y(x) \in \mathcal{M}$.

Для дифференцируемых функций следует различать производную вариации $(\delta y(x))'$ и вариацию производной $\delta(y'(x))$. Первое понятие означает производную от допустимой вариации $\delta y(x)$, а второе – любую допустимую вариацию функции $y'(x)$.

Определение. *Приращением функционала* $J[y]$ в точке y_0, отвечающим приращению аргумента δy, называется величина

$$\Delta J[y_0] = J[y_0 + \delta y] - J[y_0].$$

Выражение $\Delta J[y_0]$ при фиксированной функции $y_0(x)$ представляет собой функционал от $\delta y(x)$ (вообще говоря, нелинейный).

Определение. Функционал $J[y]$ называется *дифференцируемым по Фреше* в точке y_0, если его приращение $\Delta J[y_0] = J[y_0 + \delta y] - J[y_0]$ представимо в виде

$$\Delta J[y_0] = L[y_0, \delta y] + r[y_0, \delta y], \tag{1}$$

где $L[y_0, \delta y]$ – линейный относительно δy функционал, а $|r[y_0, \delta y]| = o(\|\delta y\|)$ при $\|\delta y\| \to 0$. Линейный функционал $L[y_0, \delta y]$ называют *сильным дифференциалом*, или *дифференциалом Фреше*, функционала $J[y]$ в точке y_0 и обозначают $dJ[y_0, \delta y]$.

Соотношение (1) можно также записать в виде

$$\Delta J[y_0] = dJ[y_0, \delta y] + \gamma[y_0, \delta y] \cdot \|\delta y\|,$$

где $\gamma \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$.

Упражнение 8. Показать, что из дифференцируемости по Фреше функционала $J[y]$ в точке y_0 следует его непрерывность в этой точке.

Пример 6. Рассмотрим интегральный функционал

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx,$$

определенный в функциональном пространстве $C^1[a, b]$. Пусть $F(x, y, y')$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных (т.е. функция непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в области $a \le x \le b$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < y' < +\infty$). Покажем, что функционал дифференцируем по Фреше и найдем его сильный дифференциал.

► Запишем приращение функционала на некоторой функции $y(x) \in C^1[a, b]$, соответствующее приращению $\delta y(x)$ аргумента:

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int\limits_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y')dx - \int\limits_a^b F(x, y, y')dx.$$

Применим к подынтегральной функции $F(x, y + \delta y, y' + \delta y')$ формулу Тейлора:

$$F(x, y + \delta y, y' + \delta y') = F(x, y, y') + F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y' +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[F_{yy}(x, \bar{y}, \bar{y}')(\delta y)^2 + 2F_{yy'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\delta y\delta y' + F_{y'y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')(\delta y')^2\right],$$

где $\bar{y} = y + \theta\delta y$, $\bar{y}' = y' + \theta\delta y'$, $0 < \theta < 1$. Тогда

$$\Delta J = \int\limits_a^b [F_y\delta y + F_{y'}\delta y']\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left[\bar{F}_{yy}(\delta y)^2 + 2\bar{F}_{yy'}\delta y\delta y' + \bar{F}_{y'y'}(\delta y')^2\right] dx.$$

Здесь черта над вторыми производными означает, что они берутся для аргументов x, $\bar{y}$, $\bar{y}'$. Первое слагаемое линейно относительно δy и $\delta y'$. Поскольку все вторые частные производные функции $F(x, y, y')$ по y и y' ограничены (это следует из непрерывности функции F и ее про-

изводных), то для второго слагаемого справедлива оценка

$$\left|\int\limits_a^b \left[\bar{F}_{yy}(\delta y)^2 + 2\bar{F}_{yy'}\delta y\delta y' + \bar{F}_{y'y'}(\delta y')^2\right] dx\right| \leq$$

$$\leq M\int\limits_a^b (|\delta y|^2 + 2|\delta y||\delta y'| + |\delta y'|^2)dx \leq$$

$$\leq M(b-a)\|\delta y\|^2_{C^1} = o(\|\delta y\|_{C^1}), \quad \|\delta y\|_{C^1} \to 0.$$

Здесь

$$M = \max_{a\leq x\leq b}\left\{|\bar{F}_{yy}|, |\bar{F}_{yy'}|, |\bar{F}_{y'y'}|\right\}.$$

Таким образом, второе слагаемое в приращении функционала есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с величиной $\|\delta y\|_{C^1}$ при $\|\delta y\|_{C^1} \to 0$. Следовательно, приращение функционала можно представить в виде суммы функционала, линейного относительно δy, и бесконечно малой высшего порядка относительно $\|\delta y\|$ при $\|\delta y\|_{C^1} \to 0$. Таким образом, функционал является дифференцируемым по Фреше в функциональном пространстве $C^1[a,b]$ и его дифференциал Фреше имеет вид

$$dJ[y,\delta y] = \int\limits_a^b \left[F_y(x,y,y')\delta y + F_{y'}(x,y,y')\delta y'\right] dx.$$

◀

Зафиксируем аргумент $y_0(x) \in \mathcal{M}$ функционала $J[y]$ и некоторую вариацию $\delta y(x)$ этого аргумента и рассмотрим семейство кривых

$$y(x,\alpha) = y_0(x) + \alpha\delta y(x),$$

где α – произвольный параметр. На кривых $y(x,\alpha)$ функционал $J[y]$ превращается в функцию параметра α, т.е.

$$J[y_0 + \alpha\delta y] = \Phi(\alpha).$$

Пусть существует производная функции $\Phi(\alpha)$ по параметру α.

Определение. *Первой вариацией $\delta J[y_0,\delta y]$ функционала $J[y]$* в точке y_0 называют предел

$$\delta J[y_0,\delta y] = \lim_{\alpha\to 0}\frac{J[y_0+\alpha\delta y] - J[y_0]}{\alpha} = \frac{d}{d\alpha}J[y_0+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}.$$

Этот предел представляет собой функционал, который каждой допустимой вариации δy при фиксированном аргументе $y_0 \in \mathcal{M}$ ставит в соответствие число. Вариация есть однородный функционал от δy, так как

$$\delta J[y_0, \lambda\delta y] = \lambda\delta J[y_0, \delta y],$$

но она может и не быть аддитивным по δy функционалом. Если функционал $\delta J[y_0, \delta y]$ линеен по δy, то его называют *слабым дифференциалом*, или *дифференциалом Гато*, в точке y_0 и обозначают $DJ[y_0, \delta y]$, а функционал $J[y]$ при этом называют *дифференцируемым по Гато* в данной точке. Таким образом, если функционал $J[y]$ дифференцируем по Гато в точке y_0, то для любого фиксированного δy имеет место равенство

$$J[y_0 + \alpha\delta y] = J[y_0] + \alpha DJ[y_0, \delta y] + r[\delta y, \alpha],$$

где $|r[\delta y, \alpha]| = o(\alpha)$ при $\alpha \to 0$.

Теорема 1. *Если функционал $J[y]$ дифференцируем по Фреше в точке y_0, то его дифференциал Гато в точке y_0 существует и совпадает с дифференциалом Фреше.*

Доказательство. Зафиксируем некоторую вариацию δy в точке y_0 и вычислим предел

$$\delta J[y_0, \delta y] = \lim_{\alpha\to 0} \frac{J[y_0 + \alpha\delta y] - J[y_0]}{\alpha}.$$

Заменяя в числителе дроби приращение функционала его выражением из (1) и учитывая, что $L[y_0, \alpha\delta y] = \alpha L[y_0, \delta y]$ в силу линейности дифференциала Фреше, получаем

$$\delta J[y_0, \delta y] = \lim_{\alpha\to 0} \frac{L[y_0, \alpha\delta y] + r[y_0, \alpha\delta y]}{\alpha} = L[y_0, \delta y] + \lim_{\alpha\to 0} \frac{r[y_0, \alpha\delta y]}{\alpha}. \quad (2)$$

Заметим, что

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{r[y_0, \alpha\delta y]}{\alpha} = \operatorname{sgn}\alpha \cdot \|\delta y\| \cdot \lim_{\alpha\to 0} \frac{r[y_0, \alpha\delta y]}{\|\alpha\delta y\|} = 0. \quad (3)$$

Тогда из равенства (2) с учетом (3) следует

$$\delta J[y_0, \delta y] = L[y_0, \delta y] \quad \Rightarrow \quad DJ[y_0, \delta y] = dJ[y_0, \delta y].$$

Таким образом, первая вариация дифференцируемого по Фреше функционала представляет собой функционал, линейный по δy. Поэтому, согласно определению, этот функционал есть дифференциал Гато, равный дифференциалу Фреше. □

Из сформулированной выше теоремы следует, что функционал, дифференцируемый по Фреше в данной точке, также дифференцируем в этой точке по Гато. Обратное в общем случае неверно: дифференциал Гато или вариация функционала может существовать у недифференцируемого по Фреше функционала. Отметим также, что функционал, дифференцируемый по Гато, не обязан быть непрерывным.

Пример 7. Пусть задан функционал

$$J[y] = \sqrt[3]{y^3(a) + y^3(b)}, \quad y(x) \in C[a, b].$$

Найти вариацию функционала в точке $y_0(x) = 0$.

► Рассмотрим функцию

$$\Phi(\alpha) = J[y_0 + \alpha\delta y] = \sqrt[3]{(\alpha\delta y(a))^3 + (\alpha\delta y(b))^3},$$

где $\delta y(x)$ – некоторое допустимое приращение аргумента. Вариация функционала в точке y_0, согласно определению, есть производная функции $\Phi(\alpha)$ при $\alpha = 0$:

$$\delta J[y_0, \delta y] = \Phi'(0) = \sqrt[3]{(\delta y(a))^3 + (\delta y(b))^3}.$$

Заметим, что полученное выражение не является линейным относительно $\delta y(x)$, что означает недифференцируемость данного функционала по Гато (а значит, и по Фреше) в точке $y_0(x) = 0$. ◄

Пример 8. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx,$$

заданный на функциональном пространстве $C^1[a, b]$. Выясним достаточные условия существования первой вариации этого функционала.

► Вычисление первой вариации сводится к дифференцированию интеграла

$$J[y + \alpha\delta y] = \int\limits_a^b F(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx$$

по параметру α и вычислению предела при $\alpha \to 0$:

$$\delta J[y, \delta y] = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha} F(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b [F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y']\, dx.$$

Заметим, что для законности такого дифференцирования достаточно непрерывности функции F и ее частных производных F_y и $F_{y'}$, что является более слабым условием, чем достаточные условия существования дифференциала Фреше для данного функционала (см. пример 6). Первая вариация является линейным функционалом относительно δy, т.е. представляет собой дифференциал Гато. ◀

Пример 9. Показать, что функционал

$$J[y] = \int\limits_0^\pi [(y')^2 + y + x]dx + 3y(1), \quad y(x) \in C^1[0, \pi],$$

дифференцируем по Фреше и найти его первую вариацию.

▶ Рассмотрим приращение функционала на некоторой функции $y(x) \in C^1[0, \pi]$, соответствующее приращению $\delta y(x)$ аргумента, и выделим линейную относительно $\delta y(x)$ часть этого приращения:

$$\Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y] =$$

$$= \int\limits_0^\pi [(y' + \delta y')^2 + y + \delta y + x]dx - \int\limits_0^\pi [(y')^2 + y + x]dx + 3[y(1) + \delta y(1)] - 3y(1) =$$

$$= \int\limits_0^\pi [2y'\delta y' + \delta y]dx + 3\delta y(1) + \int\limits_0^\pi (\delta y')^2 dx.$$

Заметим, что первые два слагаемых линейны по δy, а для второго слагаемого справедлива оценка

$$\int\limits_0^\pi (\delta y')^2 dx \le \int\limits_0^\pi (|\delta y| + |\delta y'|)^2 dx \le \pi\|\delta y\|^2_{C^1} = o(\|\delta y\|_{C^1}), \quad \|\delta y\|_{C^1} \to 0.$$

Отсюда следует, что функционал является дифференцируемым по Фреше и дифференциал Фреше запишется в виде

$$dJ[y] = \int\limits_0^{\pi} [2y'\delta y' + \delta y]dx + 3\delta y(1).$$

В силу установленной дифференцируемости функционала и теоремы 1 его первая вариация будет совпадать с дифференциалом Фреше. ◀

Упражнение 9. Показать, что смешанный функционал

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx + f(y(a), y(b)), \quad y(x) \in C^1[a, b],$$

где $F(x, y, y')$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, а $f(\xi, \eta)$ – непрерывно дифференцируема по каждому аргументу, является дифференцируемым по Фреше и его вариация имеет вид

$$\delta J[y, \delta y] = \int\limits_a^b [F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y']\, dx + \frac{\partial f}{\partial \xi}\delta y(a) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\delta y(b),$$

где $\xi = y(a)$, $\eta = y(b)$.

Упражнение 10. Показать, что функционал

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y)dx, \quad y(x) \in C[a, b],$$

где $F(x, y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, дифференцируем по Фреше и его вариация имеет вид

$$\delta J[y, \delta y] = \int\limits_a^b F_y(x, y)\delta y dx.$$

2.2 Необходимое условие экстремума

Определение. Говорят, что функционал $J[y]$ имеет в точке y_0 *локальный минимум* (*максимум*), если существует окрестность $U(y_0, \varepsilon)$ точки y_0 такая, что

$$J[y] \geq J[y_0] \quad (J[y] \leq J[y_0]), \quad \forall y \in U(y_0, \varepsilon). \tag{4}$$

Точки, в которых $J[y]$ имеет локальный минимум или локальный максимум, называют *точками локального экстремума.*

Определение. Экстремум функционала $J[y]$ по всей совокупности функций, на которых он определен, называется *абсолютным* (*или глобальным*) *экстремумом.*

Заметим, что в определении локального экстремума фигурирует понятие окрестности, поэтому локальный экстремум (в отличие от абсолютного) зависит от нормы, действующей в функциональном пространстве, на котором задан данный функционал.

Пусть функционал $J[y]$ определен на некотором множестве функций из пространства $C^1[a,b]$. Эти функции можно также считать элементами функционального пространства $C[a,b]$, поскольку имеет место включение $C^1[a,b] \subset C[a,b]$. Тогда на заданном множестве непрерывно дифференцируемых функций можно использовать как норму $\|\cdot\|_C$, так и норму $\|\cdot\|_{C^1}$. В соответствии с этим различают сильный и слабый локальный экстремумы функционала.

Определение. Функция $y_0(x) \in C^1[a,b]$ *доставляет слабый локальный минимум* (*максимум*) функционалу $J[y]$, если найдется такая слабая ε-окрестность функции $y_0(x)$, что для любой функции $y(x)$ из этой окрестности выполнено неравенство

$$J[y] \geq J[y_0] \quad (J[y] \leq J[y_0]).$$

Определение. Функция $y_0(x) \in C^1[a,b]$ *доставляет сильный локальный минимум* (*максимум*) функционалу $J[y]$, если найдется такая сильная ε-окрестность функции $y_0(x)$, что для любой функции $y(x)$ из этой окрестности выполнено неравенство

$$J[y] \geq J[y_0] \quad (J[y] \leq J[y_0]).$$

Если функция $y_0(x) \in C^1[a,b]$ доставляет сильный, то она доставляет и слабый экстремум функционалу. Действительно, поскольку всякая функция, принадлежащая слабой ε-окрестности функции $y_0(x)$, заведомо входит в ее же сильную ε-окрестность, то всякий сильный экстремум одновременно является и слабым. Обратное, вообще говоря, неверно (см. пример 10).

Если функционал определен на множестве непрерывно дифференцируемых функций, то наличие в некоторой точке этого множества абсолютного экстремума влечет наличие в этой же точке одновременно сильного и слабого локального экстремума. Обратное неверно, т.е. не всякий локальный экстремум будет абсолютным.

Пример 10. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_0^\pi y^2[1-(y')^2]dx, \quad y(x) \in C^1[0,\pi]. \tag{5}$$

Покажем, что функция $y_0(x) = 0$ доставляет функционалу только слабый локальный экстремум, сильный локальный экстремум при этом отсутствует.

► Нетрудно видеть, что функция $y_0(x) = 0$ доставляет слабый минимум функционалу (5). Действительно, для $y_0(x) = 0$ функционал $J[y_0] = 0$. Рассмотрим кривые из ε-окрестности первого порядка функции $y_0(x) = 0$, $x \in [0, \pi]$, т.е. такие что

$$\|y - y_0\|_{C^1} = \max_{x\in[0,\pi]} |y(x)| + \max_{x\in[0,\pi]} |y'(x)| < \varepsilon.$$

Если $0 < \varepsilon < 1$, то $|y'(x)| < 1$. Подынтегральная функция при $y(x) \neq 0$ положительна, и, следовательно, функционал (5) обращается в нуль лишь при $y(x) = 0$. Отсюда следует, что на функции $y_0(x) = 0$ достигается слабый минимум.

В тоже время сильный экстремум в этой точке не достигается. Для доказательства этого факта рассмотрим последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

сходящуюся при $n \to \infty$ к функции $y(x) = 0$. Тогда

$$J[y_n] = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx(1 - n\cos^2 nx)dx = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8}$$

и при достаточно большом n на кривых $y_n(x)$ функционал $J[y] < 0$. С другой стороны, все эти кривые при больших n лежат в сколь угодно малой окрестности нулевого порядка функции $y_0(x) = 0$ (см. упр. 4). А значит, сильный экстремум на функции $y_0(x) = 0$ не достигается. Таким образом, слабый экстремум не обязан быть сильным. ◄

Теорема 2 (необходимое условие экстремума).
Пусть $y_0 \in \mathcal{M}$ – точка локального экстремума функционала $J[y]$ и функционал $J[y]$ имеет первую вариацию (дифференцируем по Фреше) в точке y_0. Тогда

$$\delta J[y_0, \delta y] = 0 \quad (dJ[y_0, \delta y] = 0) \quad \forall \delta y \in E.$$

Доказательство. Пусть y_0 – точка локального экстремума функционала $J[y]$. Возьмем произвольный, но фиксированный элемент $\delta y \in E$. Рассмотрим функцию $\Phi(\alpha) = J[y_0 + \alpha\delta y]$. Поскольку y_0 – точка локального экстремума функционала, то $\alpha = 0$ – точка локального экстремума функции $\Phi(\alpha)$. По теореме Ферма для функции одной переменной $\Phi'(0) = 0$. По определению первой вариации $\delta J[y_0, \delta y] = \Phi'(0) = 0$. В силу произвольности δy имеем $\delta J[y_0, \delta y] = 0$, $\forall \delta y \in E$.

Если функционал $J[y]$ дифференцируем по Фреше в точке y_0, то в этой точке он имеет первую вариацию и $dJ[y_0, \delta y] = \delta J[y_0, \delta y]$. Поскольку из уже доказанного следует, что эта вариация равна нулю, то и $dJ[y_0, \delta y] = 0$, $\delta y \in E$, в силу определения дифференцируемости по Фреше. $\square$

Определение. Точки, в которых первая вариация функционала обращается в нуль, называются *стационарными точками.*

Замечание. Необходимое условие слабого экстремума на множестве непрерывно дифференцируемых функций из пространства $C^1[a, b]$ является одновременно необходимым условием сильного экстремума. Кроме того, так как абсолютный экстремум функционала является и локальным экстремумом (сильным и слабым), то теорема определяет также необходимое условие абсолютного экстремума функционала на этом множестве.

3 Основные леммы вариационного исчисления

Лемма 1 (Лагранж). *Если для любой функции $\eta(x) \in C^1[a,b]$, такой что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = 0, \tag{6}$$

где функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно и на отрезке $[a,b]$ есть по крайней мере одна точка x_0, в которой функция $f(x)$ не обращается в нуль: $f(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_0) > 0$. Из непрерывности $f(x)$ на $[a,b]$ следует, что $f(x)$ будет сохранять знак и в некотором промежутке $(x_1, x_2) \subset (a,b)$, окружающем точку x_0. В качестве $\eta(x)$ выбираем функцию, сохраняющую знак на (x_1, x_2) и обращающуюся в нуль вне этого промежутка, например

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (x_1, x_2); \\ (x-x_1)^2(x-x_2)^2, & x \in (x_1, x_2). \end{cases}$$

Нетрудно показать, что функция $\eta(x)$ удовлетворяет условиям леммы, т.е. имеет непрерывную производную и удовлетворяет условию $\eta(a) = \eta(b) = 0$, и для нее рассматриваемый интеграл должен быть равен нулю. Однако

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)(x-x_1)^2(x-x_2)^2 dx > 0,$$

что противоречит условию леммы.

Таким образом, сделанное выше предположение о том, что $f(x)$ отлична от нуля хотя бы в одной точке, ведет к нарушению условий леммы. Следовательно, если условия леммы выполнены, то $f(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$. □

Замечание.

1. Лемма остается справедливой, если условие (6) выполняется для функций $\eta(x)$, имеющих на $[a,b]$ непрерывные производные до n-го порядка включительно и удовлетворяющих условиям

$$\eta^{(k)}(a) = \eta^{(k)}(b) = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

2. Лемма остается справедливой для двукратных, трехкратных интегралов и вообще интегралов любой кратности (см. [11]).

Лемма 2 (Дюбуа–Реймон). *Если для любой функции $\eta(x) \in C^1[a,b]$, такой что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\eta'(x)dx = 0, \tag{7}$$

где функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $f(x) = \mathrm{const}$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существуют две точки x_1 и x_2 такие, что $f(x_1) < f(x_2)$. Покажем, что в этом случае существует функция $\eta(x)$, которая удовлетворяет условиям леммы и для которой равенство (7) не имеет места. Пусть M – произвольное число, такое, что $f(x_1) < M < f(x_2)$. В силу непрерывности функции $f(x)$ существуют такие непересекающиеся интервалы (α, β) и (α', β'), содержащие соответственно точки x_1 и x_2, что для любых $x \in (\alpha, \beta)$ и $x' \in (\alpha', \beta')$ справедливо $f(x) < M < f(x')$. В качестве функции $\eta'(x)$ выберем любую непрерывную функцию, положительную на интервале (α, β), отрицательную на интервале (α', β') и равную нулю вне этих интервалов и такую, что

$$\int_a^b \eta'(x)dx = \int_\alpha^\beta \eta'(x)dx + \int_{\alpha'}^{\beta'} \eta'(x)dx = 0.$$

Тогда функция $\eta(x)$ определяется формулой

$$\eta(x) = \int_a^x \eta'(x)dx$$

и, как нетрудно показать, удовлетворяет условиям леммы. При этом

$$\int_a^b (f(x)-M)\eta'(x)dx = \int_\alpha^\beta (f(x)-M)\eta'(x)dx + \int_{\alpha'}^{\beta'} (f(x)-M)\eta'(x)dx < 0,$$

поскольку оба слагаемых отрицательны. Отсюда следует, что

$$\int_a^b f(x)\eta'(x)dx = \int_a^b (f(x)-M)\eta'(x)dx + M\int_a^b \eta'(x)dx =$$

$$= \int_a^b (f(x)-M)\eta'(x)dx < 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. □

Лемма 3. *Если для любой функции* $\eta(x) \in C^1[a,b]$, *такой что* $\eta(a) = \eta(b) = 0$, *выполнено условие*

$$\int\limits_a^b [\varphi(x)\eta(x) + \psi(x)\eta'(x)]\, dx = 0, \tag{8}$$

где функции $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *непрерывны на* $[a,b]$, *то* $\psi(x)$ *непрерывно дифференцируема и*

$$\varphi(x) - \frac{d}{dx}\,\psi(x) = 0.$$

Доказательство. Обозначим через $\Phi(x)$ произвольную первообразную функции $\varphi(x)$, т.е.

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x \varphi(y)dy + C_0, \quad C_0 = \text{const}.$$

Проинтегрируем первое слагаемое в (8) по частям:

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\eta(x)dx = \eta(x)\Phi(x)|_a^b - \int\limits_a^b \Phi(x)\eta'(x)dx = -\int\limits_a^b \Phi(x)\eta'(x)dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b [\varphi(x)\eta(x) + \psi(x)\eta'(x)]dx = \int\limits_a^b [-\Phi(x) + \psi(x)]\eta'(x)dx = 0$$

при любом выборе постоянной C_0. Из леммы 2 следует, что

$$\psi(x) - \Phi(x) = \text{const}.$$

Тогда

$$\psi'(x) = \Phi'(x) = \varphi(x),$$

т.е. функция $\psi(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция. □

Следует отметить, что в данной лемме дифференцируемость функции $\psi(x)$ заранее не предполагалась.

4 Простейшая задача вариационного исчисления

4.1 Необходимое условие экстремума

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx, \tag{9}$$

определенный на множестве функций $y(x) \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих *граничным условиям*:

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{10}$$

Обычно предполагается, что функция $F(x, y, y')$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно.

Задача нахождения слабого локального экстремума функционала (9) на множестве непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям (10), называется *простейшей задачей вариационного исчисления*, или *задачей с закрепленными концами*.

Геометрически вариационная задача с закрепленными концами означает, что среди всех гладких кривых, соединяющих точки $M_1(a, A)$ и $M_2(b, B)$, требуется найти кривую, на которой функционал (9) достигает экстремума (см. рис. 3).

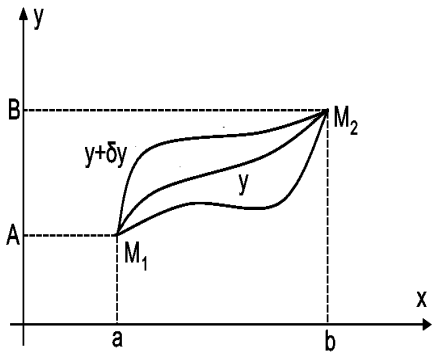

Рис. 3.

Областью определения функционала (9) будем считать множество

$$\mathcal{M} = \left\{ y(x) \in C^1[a, b] : \ y(a) = A, \ y(b) = B \right\}.$$

Функции $y(x) \in \mathcal{M}$ называют *допустимыми* функциями.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами)**.** *Пусть*

1) *функция $y(x) \in C^2[a, b]$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче с закрепленными концами* (9), (10)*;*

2) *функция $F(x, y, y')$ обладает непрерывными частными производными до второго порядка включительно.*

Тогда функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть функция $y(x) \in \mathcal{M}$ доставляет слабый локальный экстремум функционалу (9). Любая допустимая вариация $\delta y(x)$ этой функции должна принадлежать множеству

$$\mathcal{M}_0 = \left\{\delta y(x) \in C^1[a,b] : \ \delta y(a) = \delta y(b) = 0\right\}.$$

Это объясняется тем, что граничные условия (10) фиксируют значение допустимых функций на концах отрезка, а следовательно, вариация функции $y(x)$ в этих точках будет равна нулю.

В силу условий гладкости интегранта $F(x,y,y')$ можно утверждать, что функционал (9) дифференцируем (по Фреше) в точке y (см. пример 6). Следовательно, существует первая вариация $\delta J[y,\delta y]$ функционала в этой точке. Используя необходимое условие экстремума для дифференцируемого функционала (см. теорему 2), получаем равенство

$$\delta J[y,\delta y] = \int\limits_a^b \left[F_y(x,y,y')\delta y + F_{y'}(x,y,y')\delta y'\right] dx = 0, \ \ \forall \delta y(x) \in \mathcal{M}_0. \tag{12}$$

Здесь $\delta y'(x)$ – производная допустимой вариации, т.е. $\delta y'(x) = (\delta y(x))'$. Интегрируя по частям второе слагаемое в выражении (12) и учитывая, что $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, получим

$$\int_a^b F_{y'}\delta y' dx = \left[F_{y'}\delta y\right]\Big|_a^b - \int\limits_a^b \left(\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx = -\int\limits_a^b \left(\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx.$$

Полученный в результате интеграл будет существовать, так как его подынтегральная функция является непрерывной в силу условий гладкости, наложенных на интегрант $F(x,y,y')$. Тогда соотношение (12) может быть записано в виде

$$\int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y(x) dx = 0, \ \forall \delta y(x) \in \mathcal{M}_0,$$

где частные производные функции $F(x,y,y')$ вычисляются в точке $(x, y(x), y'(x))$. По лемме Лагранжа отсюда следует уравнение (11). $\square$

Определение. Уравнение (11) называют *уравнением Эйлера*, или *Эйлера–Лагранжа*, для функционала (9). Интегральные кривые уравнения Эйлера называют *экстремалями* данного функционала. Всякая экстремаль функционала, являющаяся допустимой функцией, называется *допустимой экстремалью*.

Таким образом, решение простейшей вариационной задачи следует искать только среди допустимых экстремалей функционала (9), т.е. среди решений уравнения Эйлера, удовлетворяющих граничным условиям (10).

Предполагая, что функция $y(x)$ является дважды дифференцируемой, преобразуем второе слагаемое в уравнении (11):

$$\frac{d}{dx}F_{y'} = F_{y'x} + F_{y'y}y' + F_{y'y'}y''.$$

С учетом этого запишем уравнение Эйлера в следующей форме:

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_y = 0.$$

Нетрудно видеть, что если выполняется неравенство $F_{y'y'} \neq 0$, то уравнение Эйлера представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

Экстремали функционала (9) образуют двухпараметрическое семейство интегральных кривых $y = y(x, C_1, C_2)$. Допустимые экстремали функционала находят, определяя параметры C_1 и C_2 из граничных условий (10), т.е. решая систему уравнений

$$y(a, C_1, C_2) = A, \quad y(b, C_1, C_2) = B.$$

Из этой системы не всегда можно однозначно определить значения параметров C_1, C_2. Здесь возможны различные варианты: задача может иметь одно решение, любое конечное число решений, бесконечно много решений или не иметь ни одного.

Уравнение Эйлера можно получить для меньших условий гладкости, наложенных на интегрант $F(x, y, y')$, если вместо леммы Лагранжа использовать лемму Дюбуа–Реймона. В этом случае теорему о необходимом условии экстремума можно доказать и без предположения непрерывности $y''(x)$.

Теорема 4 (необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами)**.** *Пусть*

1) *функция $y(x) \in C^1[a, b]$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче с закрепленными концами* (9), (10)*;*

2) *функции $F(x, y, y')$, $F_y(x, y, y')$, $F_{y'}(x, y, y')$ непрерывны как функции трех переменных.*

Тогда $F_{y'}(x, y(x), y'(x))$ – непрерывно дифференцируемая функция переменной x из пространства $C^1[a, b]$ и функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Доказательство. Пусть функция $y(x) \in \mathcal{M}$ доставляет слабый локальный экстремум функционалу (9). Возьмем произвольную, но фиксированную вариацию $\delta y(x) \in \mathcal{M}_0$. Рассмотрим функцию $\Phi(\alpha) = J[y + \alpha\delta y]$, где α – параметр. Из условий гладкости, наложенных на функции $F(x, y, y')$, $y(x)$, $\delta y(x)$, следует, что функция $\Phi(\alpha)$ дифференцируема в точке $\alpha = 0$ и у функционала (9) существует первая вариация в точке y (см. пример 8)

$$\delta J[y, \delta y] = \Phi'(0) = \int\limits_a^b [F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y']\, dx.$$

Из необходимого условия экстремума функционала (см. теорему 2) следует, что в точке y выполнено равенство

$$\int\limits_a^b [F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y']\, dx = 0, \quad \forall \delta y(x) \in \mathcal{M}_0.$$

Здесь мы не можем, как в предыдущей теореме, брать второй интеграл по частям, поскольку не задана дифференцируемость функции $F_{y'}(x, y(x), y'(x))$. Однако в силу леммы 3 (которая есть следствие леммы Дюбуа–Реймона) функция $F_{y'}(x, y(x), y'(x))$ непрерывно дифференцируема по переменной x на промежутке $[a, b]$ и выполняется равенство

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x \in [a, b].$$

Теорема доказана. □

Заметим, что поскольку всякий сильный экстремум функционала, определенного на пространстве $C^1[a, b]$, есть одновременно и слабый экстремум, то сформулированные выше теорема 3 и теорема 4 дают необходимое условие и для сильного экстремума данного функционала. Так как абсолютный экстремум функционала на множестве $\mathcal{M}$ является и локальным экстремумом, то теорема 3 и теорема 4 дают необходимое условие абсолютного экстремума функционала (9) на множестве $\mathcal{M}$.

Необходимое условие экстремума требует, чтобы экстремаль функционала была, по крайней мере, непрерывно дифференцируема, т.е. принадлежала пространству $C^1[a, b]$. Оказывается, это требование можно ослабить. В частности, простейшая вариационная задача имеет смысл уже тогда, когда требуется только кусочная непрерывность первой производной экстремали, т.е. функционал можно определить на пространстве $KC^1[a, b]$.

Упражнение 11. Покажите, что экстремаль удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) - F_x = 0$$

или в интегральной форме

$$F - y'F_{y'} - \int\limits_a^x F_x dx = C.$$

Упражнение 12. Показать, что если к подынтегральной функции $F(x, y, y')$ функционала (9) добавить полную производную по x от какой-либо функции $f(x, y)$:

$$F_1(x, y, y') = F(x, y, y') + \frac{d}{dx} f(x, y),$$

то вид уравнения Эйлера останется неизменным.

Пример 11. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_1^e [x^2(y')^2 + 6y^2 + 100yx^2 \ln x]dx, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 3e^2.$$

► Запишем уравнение Эйлера:

$$100x^2 \ln x + 12y - \frac{d}{dx}\left(2x^2 y'\right) = 0$$

или

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 50x^2 \ln x.$$

Общее решение уравнения Эйлера

$$y(x) = C_1 x^{-3} + C_2 x^2 + x^2(5\ln^2 x - 2\ln x),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, определяет экстремали функционала. Из граничных условий находим постоянные C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 = 0 \\ y(e) = C_1 e^{-3} + C_2 e^2 + 3e^2 = 3e^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0.$$

В результате допустимой экстремалью будет функция

$$y_0(x) = x^2(5\ln^2 x - 2\ln x).$$

Покажем, что допустимая экстремаль доставляет функционалу абсолютный минимум на множестве функций

$$\mathcal{M} = \{y(x) \in C^1[1,e] : \ y(1) = 0, \ y(e) = 3e^2\}.$$

Рассмотрим приращение функционала на допустимой экстремали. Для любых $\eta(x) \in C^1[1,e]$, таких что $\eta(1) = \eta(e) = 0$, имеем

$$\Delta J[y_0] = J[y_0 + \eta] - J[y_0] =$$
$$= \int\limits_1^e [2x^2 y_0' \eta' + 12 y_0 \eta + 100 \eta x^2 \ln x + x^2 (\eta')^2 + 6\eta^2] dx.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получим

$$\int\limits_1^e 2x^2 y_0' \eta' dx = 2x^2 y_0' \eta \Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{d}{dx}\left(2x^2 y_0'\right) \eta dx = -\int\limits_1^e (100x^2 \ln x + 12 y_0) \eta dx.$$

Здесь мы учли, что $\eta(1) = \eta(e) = 0$, а $y_0(x)$ есть решение уравнения Эйлера. Тогда приращение функционала определяется выражением

$$\Delta J[y_0] = \int\limits_1^e [x^2 (\eta')^2 + 6(\eta)^2] dx \geq 0.$$

Таким образом, допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет функционалу абсолютный экстремум. ◄

Рассмотрим пример, показывающий, что уравнение Эйлера необходимое, но не достаточное условие экстремума функционала (9).

Пример 12. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_0^{3\pi/2} [(y')^2 - y^2] dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

► Уравнение Эйлера:

$$y'' + y = 0.$$

Общее решение:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Единственная допустимая экстремаль: $y_0(x) = 0$.

Рассмотрим последовательность допустимых функций

$$y_n^k(x) = \frac{1}{n} \sin kx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 2; \ \frac{2}{3}.$$

Нетрудно видеть, что эта последовательность в метрике пространства $C^1[0, 3\pi/2]$ стремится к функции $y_0(x)$ при $n \to \infty$. При этом

$$J[y_n^k] = \frac{3\pi}{4n^2}\,(k^2 - 1).$$

Следовательно,

$$J[y_n^k] < 0 = J[y_0] \quad \text{при} \quad k = \frac{2}{3},$$

$$J[y_n^k] > 0 = J[y_0] \quad \text{при} \quad k = 2.$$

Таким образом, допустимая экстремаль существует и единственна, но не доставляет экстремум функционалу. ◀

Пример 13. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}}(y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

▶ Уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dx}(2x^{\frac{2}{3}}y') = 0.$$

Общее решение:

$$y(x) = 3C_1 x^{\frac{1}{3}} + C_2.$$

Учитывая граничные условия, получим экстремаль $y_0(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

Отметим, что найденная экстремаль не является допустимой, так как не принадлежит функциональному пространству $C^1[0, 1]$. Тем не менее, можно показать, что эта экстремаль доставляет абсолютный минимум функционалу. Действительно,

$$\Delta J[y_0] = J[y_0 + \eta] - J[y_0] =$$
$$= \int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \eta'\right)^2 dx - \int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)^2 dx = \frac{2}{3}\eta\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}}(\eta')^2 dx \geq 0.$$

Таким образом, экстремаль существует и единственна, доставляет абсолютный экстремум, но при этом является недопустимой. Этот пример показывает, что пространство $C^1[0, 1]$ не является естественным для данной задачи и функционал необходимо исследовать на пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$. ◀

Пример 14. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_{-1}^{1} x^2 (y')^2 dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

► Уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dx}\left(2x^2 y'\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 y' = C.$$

Общее решение:

$$y(x) = C_1 x^{-1} + C_2.$$

Единственная экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям: $y_0(x) = x^{-1}$. Эта экстремаль не является допустимой, причем она не принадлежит ни пространству $C^1[-1,1]$, ни пространству $C[-1,1]$.

Нетрудно видеть, что $J[y] \geq 0$, причем $J[y] = 0$ только при $y'(x) \equiv 0$, т.е. $y(x) = C$, где $C = \text{const}$. Функция $y(x) = C$ принадлежит пространству $C^1[-1,1]$, но не удовлетворяет заданным граничным условиям. В итоге, функционал имеет нижнюю грань, но она не достигается на кривых из пространства $C^1[-1,1]$, удовлетворяющих граничным условиям.

Рассмотрим последовательность допустимых функций

$$y_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\operatorname{arctg} n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

В пределе при $n \to \infty$ получим функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad -1 \leq x < 0, \\ \ \ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ +1, & \text{если} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Функция $y_0(x) = \operatorname{sign} x$ удовлетворяет заданным граничным условиям, причем $J[y_0] = 0$.

На функциях $y_n(x)$ функционал принимает значение

$$J[y_n] = \int\limits_{-1}^{1} \frac{n^2 x^2 dx}{(1 + n^2 x^2)^2 \operatorname{arctg}^2(n)} = \frac{2}{n \operatorname{arctg}^2 n}\left(1 - \frac{1}{n}\operatorname{arctg} n\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} J[y_n] = J[y_0] = 0.$$

Таким образом, нижняя грань функционала достигается только на кусочно-непрерывной функции $y_0(x) = \operatorname{sign} x$, принадлежащей функциональному пространству $KC[-1,1]$. ◄

Пример 15. Пусть

$$J[y] = \int\limits_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2r(x)y]dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

где функция $p(x) > 0$ – непрерывно дифференцируемая, а $q(x) \geq 0$ и $r(x)$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции. Показать, что если $y_0(x)$ является экстремалью функционала $J[y]$, то на ней реализуется минимум этого функционала.

► Запишем уравнение Эйлера для данного функционала:

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y = r(x).$$

При сформулированных предположениях относительно функций $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ это уравнение с дополнительными условиями $y(a) = A$, $y(b) = B$ имеет единственное решение $y_0(x)$, которое и определяет экстремаль в рассматриваемой задаче.

Пусть $\eta(x) \in C^1[a, b]$ и $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Определим знак приращения функционала на исследуемой экстремали. Имеем

$$\Delta J[y_0] = J[y_0 + \eta] - J[y_0] =$$

$$= \int\limits_a^b \left[p(x)((y_0' + \eta')^2 - {y_0'}^2) + q(x)((y_0 + \eta)^2 - {y_0'}^2) + 2r(x)\eta\right] dx =$$

$$= 2\int\limits_a^b [p(x)y_0'\eta' + q(x)y_0\eta + r(x)\eta]\, dx + \int\limits_a^b p(x)\eta'^2 dx + \int\limits_a^b q(x)\eta^2 dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в первом интеграле и учитывая тот факт, что функция $y_0(x)$ является решением уравнения Эйлера, получим

$$\int\limits_a^b [p(x)y_0'\eta' + q(x)y_0\eta + r(x)\eta]\, dx =$$

$$= \underbrace{p(x)y_0(x)\eta(x)|_a^b}_{=0} + \int\limits_a^b [-(p(x)y_0')' + q(x)y_0 + r(x)]\, \eta dx = 0.$$

Нетрудно видеть, что оставшиеся два интеграла в выражении, определяющем приращение функционала, неотрицательны. В результате $\Delta J[y_0] > 0$, поэтому на экстремали $y_0(x)$ достигается (абсолютный) минимум исследуемого функционала, что и требовалось доказать. ◄

4.2 Регулярные экстремали

Уравнение Эйлера для функционала (9) есть дифференциальное уравнение второго порядка, так что решение уравнения Эйлера должно иметь вторую производную. Может оказаться, что кривая, на которой данный функционал достигает экстремума, не является дважды дифференцируемой.

Выясним условия, при которых можно гарантировать существование второй производной у функции $y(x)$, представляющей собой решение уравнения Эйлера.

Теорема 5. *Пусть $y = y(x)$ есть решение уравнения Эйлера. Если функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то во всех точках (x, y), в которых*

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0,$$

функция $y = y(x)$ имеет непрерывную вторую производную.

Доказательство. Рассмотрим полное приращение функции $F_{y'}(x, y, y')$. Из теоремы о среднем значении следует, что

$$\begin{aligned}\Delta F_{y'} &= F_{y'}(x + \Delta x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F_{y'}(x, y, y') = \\ &= \Delta x \bar{F}_{y'x} + \Delta y \bar{F}_{y'y} + \Delta y' \bar{F}_{y'y'},\end{aligned}$$

где

$$\bar{F}_{y'x} = F_{y'x}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y, y' + \theta_3 \Delta y'), \quad 0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1,$$

и аналогично определяются $\bar{F}_{y'y}$, $\bar{F}_{y'y'}$.

Из определения производной имеем

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\bar{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \bar{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \bar{F}_{y'y'} \right].$$

Этот предел существует, так как $F_{y'}$ имеет производную по x, в силу уравнения Эйлера она равна F_y.

Так как вторые производные функции $F(x, y, y')$ по условию непрерывны, то $\bar{F}_{y'x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к $F_{y'x}$. Второе слагаемое при $\Delta x \to 0$ также имеет предел. Это вытекает из существования y' и непрерывности второй производной $F_{y'y}$. Но тогда существует предел и третьего слагаемого (так как предел всей суммы существует), т.е. существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} \bar{F}_{y'y'}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\bar{F}_{y'y'}$ стремится к пределу $F_{y'y'} \neq 0$ и, значит, существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y''.$$

Из уравнения Эйлера нетрудно найти выражение для y'':

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y'' = \frac{\frac{d}{dx} F_{y'} - F_{y'x} - F_{y'y} y'}{F_{y'y'}},$$

из которого видно, что y'' непрерывна всюду, где $F_{y'y'} \neq 0$. □

Следствие. *Экстремаль $y = y(x)$ может иметь излом только в точках, где*

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Точки экстремали $y = y(x)$, в которых $F_{y'y'} \neq 0$, называют *регулярными*. Если все точки экстремали регулярны, то сама экстремаль называется *регулярной*, или *неособенной*. Для регулярных экстремалей уравнению Эйлера можно придать вид

$$y'' = f(x, y, y').$$

Пример 16. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_{-1}^{1} y^2 (1 - y')^2 dx, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

В соответствии с доказанной выше теоремой экстремаль функционала может иметь излом только в точках, лежащих на оси Ox. Действительно,

$$F_{y'y'} = 2y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Заметим, что минимальное значение функционала, равное нулю, достигается на функции

$$y_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$$

принадлежащей функциональному пространству $KC^1[-1, 1]$. Хотя функция $y_0(x)$ не имеет второй производной, она удовлетворяет уравнению Эйлера для данного функционала. Действительно, запишем уравнение Эйлера и подставим функцию $y = y_0(x)$:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y_0 (1 - y_0')^2 + \frac{d}{dx} \left[2y_0^2 (1 - y_0') \right] = 0. \qquad (13)$$

Согласно определению функции $y_0(x)$, имеем

$$F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = -2y_0^2 (1 - y_0') \equiv 0, \quad x \in [-1, 1],$$

а значит, и $\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$, и хотя уравнение Эйлера (13) формально имеет второй порядок, а $y_0''(x)$ не существует, подстановка функции $y_0(x)$ в уравнение Эйлера обращает его в тождество.

4.3 Случаи понижения порядка уравнения Эйлера

Уравнение Эйлера является дифференциальным уравнением второго порядка и интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях. Приведем некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Как оказывается, в ряде случаев его порядок удается понизить.

1. $F(x, y, y') = F(x, y)$

Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид

$$F_y(x, y) = 0,$$

т.е. является не дифференциальным, а алгебраическим уравнением. Его решение $y = y(x)$ (если оно существует) не содержит произвола и поэтому, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$. Следовательно, решение краевой задачи для уравнения Эйлера, в общем случае, не существует.

Замечание. Лишь в тех случаях, когда кривая $y(x)$ проходит через граничные точки (a, A) и (b, B), ее можно рассматривать как экстремаль, на которой функционал принимает стационарное значение.

2. $F(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'$

Уравнение Эйлера записывается в форме

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Это уравнение не является дифференциальным, и краевая задача для этого уравнения, вообще говоря, решения не имеет (см. замечание к случаю 1).

Замечание. Если

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$ и значение функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b (P + Qy')dx = \int\limits_{(a,A)}^{(b,B)} (Pdx + Qdy) = u(a, A) - u(b, B)$$

не зависит от выбора кривой, соединяющей точки (a, A) и (b, B). Так как значение функционала постоянно на множестве допустимых функций, то вариационная задача теряет смысл.

3. $F(x, y, y') = F(x, y')$

Уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0.$$

Проинтегрировав, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$F_{y'}(x, y') = C, \tag{14}$$

где C – произвольная постоянная. Дальнейшее интегрирование производится путем разрешения относительно производной либо путем введения параметра.

Соотношение (14) называют *первым интегралом* уравнения Эйлера, а функцию $F_{y'}(x, y')$, сохраняющую свое значение на решении данного уравнения, – *интегралом импульса.*

4. $F(x, y, y') = F(y, y')$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y - F_{y'y} y' - F_{y'y'} y'' = 0.$$

Если умножить левую и правую часть уравнения на y', то левая часть превращается в полную производную по x. Поэтому уравнение Эйлера может быть записано в виде

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' F_{y'} \right) = 0$$

и имеет первый интеграл

$$F - y' F_{y'} = C.$$

Дальнейшее интегрирование также производится методами, развитыми для дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

Функцию

$$H(y, y') = y' F_{y'} - F,$$

сохраняющую постоянное значение на решении уравнения Эйлера, называют *интегралом энергии.*

5. $F(x, y, y') = F(y')$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$y'' F_{y'y'}(y') = 0.$$

Далее возможны два варианта:

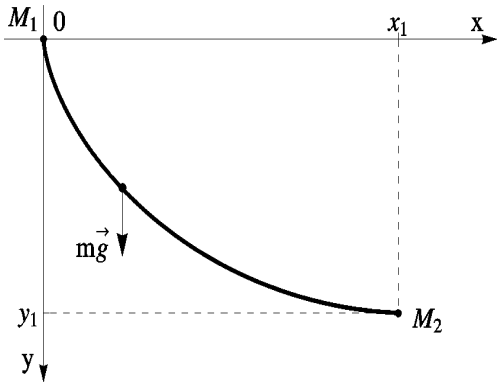

Рис. 4.

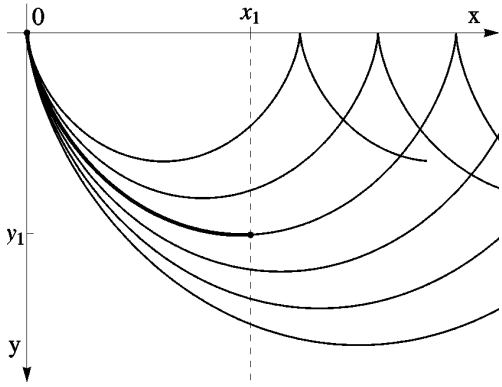

Рис. 5.

а) $y'' = 0$

Общее решение:

$$y = C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Тогда решением краевой задачи будет прямая

$$y(x) = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a),$$

проходящая через точки (a, A) и (b, B).

б) $F_{y'y'}(y') = 0$

Сделаем замену $y' = p$. Получается алгебраическое уравнение $F_{pp}(p) = 0$. Если p_i, $i = 1, 2, \ldots$, – корни этого уравнения, то $y' = p_i$. В результате решением уравнения Эйлера будет система функций

$$y_i(x) = p_i x + C_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Эти решения содержатся в общем решении предыдущего пункта.

Пример 17 (задача о брахистохроне – кривой наискорейшего спуска)**.** Определить кривую в вертикальной плоскости, соединяющую заданные точки M_1 и M_2, не лежащие на одной вертикальной прямой, при движении по которой материальная точка под действием силы тяжести скатится из точки M_1 в точку M_2 в кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

► Поместим начало координат в точку M_1. Ось Ox направим горизонтально, ось Oy – вертикально вниз (рис. 4). Конечная точка – $M_2(x_1, y_1)$.

Пусть $y = y(x)$ – уравнение искомой кривой. Начальную скорость материальной точки будем считать равной нулю. Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

где m – масса материальной точки. Отсюда $v = \sqrt{2gy}$ и, следовательно,

$$dt = \frac{dl}{v} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx.$$

Время движения по кривой определяется функционалом

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx$$

при условиях

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{15}$$

Определим траекторию, для которой функционал $T[y]$ принимает минимальное значение. Заметим, что подынтегральная функция не зависит от переменной x явно. В этом случае уравнение Эйлера сводится к дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} = C \quad \Rightarrow \quad y(1+(y')^2) = 2C_1.$$

Введем параметр t, полагая $y' = \operatorname{ctg}(t/2)$. Тогда получим

$$y(t) = \frac{2C_1}{1+\operatorname{ctg}^2(t/2)} = 2C_1 \sin^2(t/2) = C_1(1-\cos t).$$

Теперь определим $x(t)$:

$$dx = \frac{dy}{y'} = 2C_1 \sin^2(t/2)dt = C_1(1-\cos t)dt \;\Rightarrow\; x(t) = C_1(t-\sin t)+C_2.$$

В силу начального условия $x(0) = y(0) = 0$ находим постоянную интегрирования $C_2 = 0$. Параметрическое уравнение искомой кривой имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1(t-\sin t), \\ y = C_1(1-\cos t). \end{cases} \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что искомая кривая принадлежит семейству циклоид (рис. 5). Постоянная C_1 может быть найдена из второго граничного

условия, $y(x_1) = y_1$. Для этого потребуется найти решение системы уравнений

$$x_1 = C_1(t_0 - \sin t_0), \quad y_1 = C_1(1 - \cos t_0),$$

или

$$\frac{1 - \cos t_0}{t_0 - \sin t_0} = \frac{y_1}{x_1}, \quad 2C_1 = \frac{2y_1}{1 - \cos t_0} = \frac{y_1}{\sin^2(t_0/2)}.$$

Можно показать, что система имеет единственное решение на интервале $0 < t_0 < \pi$. Найденное значение C_1 выделяет из семейства экстремалей (16) ту единственную, которая удовлетворяет краевым условиям (15).

Таким образом, кривая наискорейшего спуска (брахистохрона) представляет собой циклоиду, соединяющую точки $M_1(0,0)$ и $M_2(x_1, y_1)$. При этом значение функционала $T[y]$, т.е. время, за которое материальная точка скатится из начала координат в точку $M_2(x_1, y_1)$, равно

$$T = \int\limits_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}} dx = 2\sqrt{2C_1} \int\limits_0^{t_0/2} dt = \sqrt{y_1} \frac{t_0}{\sin(t_0/2)}.$$

Задачу о брахистохроне можно отнести к более общему классу вариационных задач – *задач о максимальном быстродействии*: дан некоторый объект, определяемый набором функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$. Требуется перевести этот объект из положения A в положение B за наименьшее время. ◀

Замечание. Строго говоря, предположения, при которых было выведено уравнение Эйлера, для задачи о брахистохроне не выполняются, так как при $y = 0$ подынтегральная функция терпит разрыв. Поэтому предложенный выше вывод уравнения Эйлера можно рассматривать как эвристический. Строгие рассуждения можно найти в книге [13].

Пример 18 (задача о поверхности вращения наименьшей площади)**.** Пусть даны две точки плоскости: $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$. Требуется соединить точки A и B кривой $y = y(x)$, лежащей выше оси Ox и обладающей тем свойством, что поверхность, образованная вращением кривой $y = y(x)$ вокруг оси абсцисс имеет наименьшую возможную площадь.

▶ Задача сводится к отысканию минимума функционала

$$S[y] = 2\pi \int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

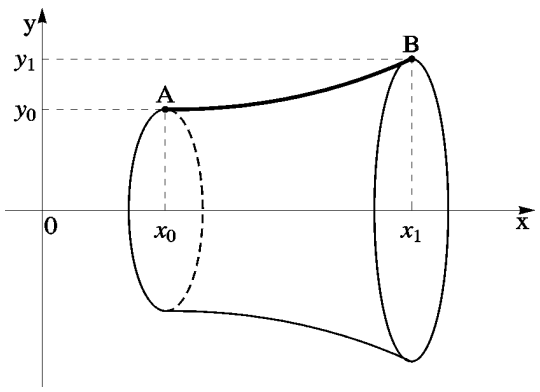

Рис. 6.

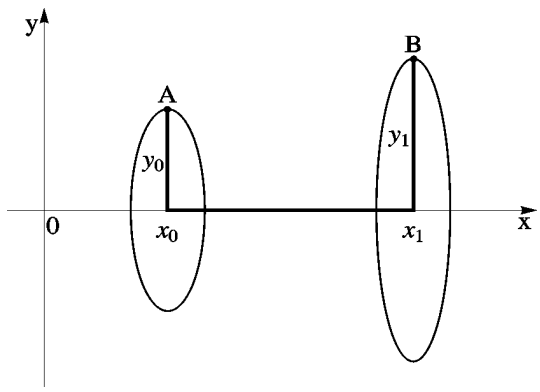

Рис. 7.

Поскольку подынтегральная функция

$$F(x, y, y') = 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}$$

не зависит от x явно, то выпишем первый интеграл уравнения Эйлера

$$F - y'F_{y'} = C$$

или

$$y\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C.$$

Разрешив это равенство относительно y', получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = \sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}} = dx.$$

Общим решением дифференциального уравнения будет семейство *цепных линий*

$$y = C\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{C} + \tilde{C}\right), \tag{17}$$

вращая которые вокруг оси абсцисс, получим поверхности наименьшей площади, называемые *катеноидами* (см. рис. 6).

Постоянные C и $\tilde{C}$ находятся из граничных условий

$$y(x_0) = C\,\mathrm{ch}\left(\frac{x_0}{C} + \tilde{C}\right) = y_0, \quad y(x_1) = C\,\mathrm{ch}\left(\frac{x_1}{C} + \tilde{C}\right) = y_1.$$

Выберем для простоты концы кривой симметричными относительно оси Oy, т.е. рассмотрим краевую задачу

$$y(-a) = y(a) = D > 0.$$

Тогда $\tilde{C} = 0$, а параметр C определяется из условия

$$D = C \operatorname{ch} \frac{a}{C} \equiv f(C). \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что $C > 0$, так как $D > 0$ и функция $y = \operatorname{ch} x$ принимает значения в верхней полуплоскости. Так как

$$f'(C) = \operatorname{ch} \frac{a}{C} \left(1 - \frac{a}{C} \operatorname{th} \frac{a}{C}\right), \quad f''(C) = \frac{a^2}{C^3} \operatorname{ch} \frac{a}{C} > 0,$$

то график функции $f(C)$ на полуоси $C > 0$ выпуклый вниз и функция имеет на этом интервале единственный экстремум (минимум) ($f(+0) = +\infty$, $f(+\infty) = +\infty$).

Пусть функция $f(C)$ имеет минимум в точке C_0: $f(C_0) = D_0$, $D_0 > 0$. Если $0 < D < D_0$, уравнение (18) решения не имеет, а следовательно, экстремали, соединяющей граничные точки, нет. При $D = D_0$ будет одна экстремаль, а при $D > D_0$ таких экстремалей будет две. В последнем случае уравнение (18) имеет два решения C_1, C_2, причем $0 < C_1 < C_0 < C_2$. Меньшему из них ($C = C_1$) будет соответствовать более низкая цепная линия, а большему ($C = C_2$) – более высокая.

Итак, в зависимости от положения точек A и B возможны следующие случаи:

1) Через точки A и B можно провести единственную экстремаль. Тогда эта экстремаль и является решением задачи.

2) Через точки A и B проходят две экстремали. В этом случае одна из них реализует минимум поверхности вращения, а вторая – нет. Проверка этого факта будет проведена в одном из последующих параграфов.

3) Не существует ни одной кривой вида (17), проходящей через точки A и B. Это означает, что в классе функций из $C^1[x_0, x_1]$, проходящих через данные точки, экстремум функционала не достигается. В этом случае решением вариационной задачи является ломаная. Наименьшее значение площади поверхности вращения будет достигаться на ломаной с вершинами (x_0, y_0), $(x_0, 0)$, $(x_1, 0)$, (x_1, y_1), т.е. поверхность вращения состоит из двух кругов радиусов y_0 и y_1 с центрами в точках $(x_0, 0)$ и $(x_1, 0)$ соответственно, соединенных отрезком $[x_0, x_1]$ оси Ox (см. рис. 7). Этот факт иллюстрируется хорошо известными опытами с мыльной пленкой, натянутой на два проволочных кольца. Мыльная пленка, вследствие сильного поверхностного натяжения, стремится занять положение с минимальной площадью поверхности. Поэтому при раздвигании этих колец на расстояние больше критического мыльная пленка лопается и заполняет каждое кольцо по отдельности. Это и есть поверхность вращения найденной ломаной экстремали.

Задача о поверхности вращения с минимальной площадью является частным случаем *задачи Плато*: среди всех поверхностей, имеющих в качестве своей границы данный контур Γ, найти такую, которая имеет минимальную площадь. Рассмотренная выше задача соответствует случаю, когда контур Γ состоит из двух окружностей, полученных при вращении точек A и B вокруг оси абсцисс. Решением этой задачи, как мы уже выяснили, служит катеноид. ◀

Упражнение 13. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b \psi(y)\sqrt{1+(y')^2}dx,$$

где $\psi(y)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

4.4 Инвариантность уравнения Эйлера

Для упрощения решения уравнения Эйлера часто используют замену переменных. Покажем, что данную замену можно делать не в самом уравнении, а непосредственно в интеграле, представляющем рассматриваемый функционал, а затем уже для нового функционала записать уравнение Эйлера. Решение этого уравнения с помощью обратной замены переменных определяет решение исходного уравнения Эйлера.

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x,y,y')dx \tag{19}$$

Уравнение Эйлера для данного функционала

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \tag{20}$$

Пусть пара дважды непрерывно дифференцируемых функций

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}, \quad J = \frac{\mathcal{D}(x,y)}{\mathcal{D}(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0$$

взаимно однозначно отображает полосу

$$\Pi_1 = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ -\infty \le y \le +\infty\}$$

на полосу

$$\Pi_2 = \{(u,v):\ \alpha \le u \le \beta,\ -\infty \le v \le +\infty\}.$$

Тогда с учетом того, что

$$dx = (\varphi_u + \varphi_v v')du, \quad dy = (\psi_u + \psi_v v')du,$$

получим

$$\int\limits_a^b F(x, y, y')dx = \int\limits_\alpha^\beta F\left[\varphi(u, v), \psi(u, v), \frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'}\right](\varphi_u + \varphi_v v')du =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \Phi[u, v(u), v'(u)]du = \bar{J}[v(u)]. \quad (21)$$

Уравнение Эйлера для функционала $\bar{J}[v(u)]$ имеет вид

$$\Phi_v - \frac{d}{du}\Phi_{v'} = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) эквивалентно уравнению (20), т.е. если функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала (19), то функция $v = v(u)$ удовлетворяет соответствующему уравнению (22). Иначе говоря, *свойство кривой быть экстремалью не зависит от выбора системы координат.*

Экстремали функционала (19) получаются из экстремалей функционала (21), если сделать обратную замену

$$u = \bar{\varphi}(x, y), \quad v = \bar{\psi}(x, y).$$

Таким образом, если функционал (19) преобразуется посредством замены переменной или одновременной заменой искомой функции и независимой переменной, то экстремум функционала по-прежнему находится из уравнения Эйлера, но уже для преобразованного подынтегрального выражения.

Пример 19. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{\ln 2} [e^{-x}(y')^2 - e^x y^2]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\ln 2) = 2,$$

воспользовавшись инвариантностью уравнения Эйлера.

► Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид

$$y'' - y' + e^{2x}y = 0.$$

Как известно, общей схемы решения таких уравнений нет. Поэтому в функционале сделаем замену переменных

$$x = \ln u, \quad y = v.$$

Исходный функционал преобразуется к виду

$$\bar{J}[v] = \int\limits_1^2 [e^{-\ln u} u^2 (v')^2 - e^{\ln u} v^2] \frac{du}{u} = \int\limits_1^2 [(v')^2 - v^2] du.$$

Уравнением Эйлера для функционала $\bar{J}[v]$ будет уравнение

$$v'' + v = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$v = C_1 \cos u + C_2 \sin u,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Переходя к координатам x и y, получаем

$$y = C_1 \cos e^x + C_2 \sin e^x.$$

С учетом граничных условий запишем вид допустимой экстремали исходной вариационной задачи

$$y = (2\cos 1 - 2)\cos e^x + \left(2 \operatorname{ctg} 1 - \frac{\cos 2}{\sin 1}\right) \sin e^x.$$

◀

5 Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления

5.1 Функционалы, содержащие производные высших порядков

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})dx, \tag{23}$$

с граничными условиями вида

$$\begin{aligned} y(a) = A_0, \quad y'(a) = A_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = A_n, \\ y(b) = B_0, \quad y'(b) = B_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(b) = B_n. \end{aligned} \tag{24}$$

Будем считать подынтегральную функцию F дифференцируемой $n+2$ раза. Предположим, что экстремум достигается на кривой $y = y(x)$, дифференцируемой $2n$ раз.

Определим необходимые условия экстремума функционала $J[y]$. Для этого рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\delta y(x).$$

Все функции, принадлежащие этому семейству, будем считать $2n$ раз дифференцируемыми функциями. Если рассматривать значение функционала $J[y]$ только на кривых семейства $y = y(x, \alpha)$, то функционал превратится в функцию параметра α, достигающую экстремума при $\alpha = 0$. Поскольку $y(x, 0) = y(x)$, то экстремум функции $\Phi(\alpha) = J[y + \alpha\delta y]$ соответствует экстремуму функционала $J[y]$. Следовательно,

$$\delta J[y, \delta y] = \Phi'(0) = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Построим вариацию функционала

$$\delta J[y, \delta y] = \left[\frac{d}{d\alpha}\int\limits_a^b F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha), \ldots, y^{(n)}(x, \alpha))\right]\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(F_y\delta y + F_{y'}\delta y' + \ldots + F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right) dx.$$

Интегрируем по частям второе слагаемое в правой части один раз:

$$\int\limits_a^b F_{y'}\delta y' dx = [F_{y'}\delta y]|_a^b - \int\limits_a^b \left(\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\, dx,$$

третье слагаемое – два раза:

$$\int\limits_a^b F_{y''}\delta y'' dx = [F_{y''}\delta y']|_a^b - \left[\left(\frac{d}{dx}F_{y''}\right)\delta y\right]\Bigg|_a^b + \int\limits_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\right)\delta y\, dx$$

и т.д., последнее слагаемое – n раз:

$$\int\limits_a^b F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)} dx = \left[F_{y^{(n)}}\delta y^{(n-1)}\right]\Big|_a^b - \left[\left(\frac{d}{dx}F_{y^{(n)}}\right)\delta y^{(n-2)}\right]\Bigg|_a^b + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \int\limits_a^b \left(\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right)\delta y\, dx.$$

Принимая во внимание граничные условия, в силу которых

$$\delta y(a) = \delta y'(a) = \ldots = \delta y^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$\delta y(b) = \delta y'(b) = \ldots = \delta y^{(n-1)}(b) = 0,$$

окончательно получим

$$\delta J[y, \delta y] = \int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right)\delta y\, dx.$$

На кривой $y = y(x)$, реализующей экстремум, имеем

$$\int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right)\delta y(x) dx = 0,$$

где частные производные функции F вычисляются в точке $(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x))$. Отсюда, в силу произвольности $\delta y(x)$, из леммы Лагранжа следует, что

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0. \qquad (25)$$

Таким образом, функция $y(x)$, реализующая экстремум функционала (23), должна быть решением уравнения (25).

Определение. Дифференциальное уравнение (25) называют *уравнением Эйлера–Пуассона*, а его интегральные кривые называют *экстремалями* рассматриваемой вариационной задачи.

Общее решение этого уравнения содержит $2n$ произвольных постоянных, которые могут быть определены из $2n$ граничных условий (24).

Пример 20. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 2\,\mathrm{sh}\,1, \quad y'(1) = 2e.$$

► Уравнение Эйлера–Пуассона имеет вид

$$y^{(IV)} - 2y'' + y = 0.$$

Его общее решение

$$y(x) = C_1\,\mathrm{sh}\,x + C_2\,\mathrm{ch}\,x + C_3 x\,\mathrm{sh}\,x + C_4 x\,\mathrm{ch}\,x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные. Отсюда с помощью граничных условий получаем систему уравнений для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 + C_4 = 0, \\ C_1\,\mathrm{sh}\,1 + C_2\,\mathrm{ch}\,1 + C_3\,\mathrm{sh}\,1 + C_4\,\mathrm{ch}\,1 = 2\,\mathrm{sh}\,1, \\ C_1\,\mathrm{ch}\,1 + C_2\,\mathrm{sh}\,1 + C_3 e + C_4 e = 2e. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 2, \quad C_4 = 0.$$

Таким образом, экстремум функционала может достигаться на кривой

$$y_0(x) = 2x\,\mathrm{sh}\,x.$$

Покажем, что функция $y_0(x)$ доставляет абсолютный минимум функционалу. Пусть $\delta y(x) \in C^2[0,1]$ и $\delta y(0) = \delta y(1) = \delta y'(0) = \delta y'(1) = 0$. Рассмотрим приращение функционала на кривой $y_0(x)$:

$$\Delta J[y_0] = J[y_0 + \delta y] - J[y_0] =$$
$$= \int\limits_0^1 [2y_0\delta y + (\delta y)^2 + 4y_0'\delta y' + 2(\delta y')^2 + 2y_0''\delta y'' + (\delta y'')^2]dx.$$

Интегрируя по частям третье слагаемое один раз, а пятое слагаемое дважды и учитывая, что $\delta y(0) = \delta y(1) = \delta y'(0) = \delta y'(1) = 0$, получим

$$\Delta J[y_0] = \int\limits_0^1 [2y_0 - 4y_0'' + 2y_0^{(IV)}]dx + \int\limits_0^1 [(\delta y)^2 + 2(\delta y')^2 + (\delta y'')^2]dx.$$

Так как $y_0(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Пуассона, то первый интеграл равен нулю. Тогда

$$\Delta J[y_0] = \int\limits_0^1 [(\delta y)^2 + 2(\delta y')^2 + (\delta y'')^2]dx \geq 0.$$

Таким образом, кривая $y_0(x)$ доставляет абсолютный минимум функционалу. ◀

5.2 Функционалы, зависящие от нескольких функций

Рассмотрим функционал вида

$$J[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx \tag{26}$$

при заданных граничных условиях

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для получения необходимых условий экстремума функционала будем варьировать лишь одну из функций $y_i(x)$, оставляя все остальные функции неизменными. При этом функционал $J[y_1, \ldots, y_n]$ превратится в функционал, зависящий лишь от одной варьируемой функции, например от $y_i(x)$:

$$J[y_1, \ldots, y_n] = \tilde{J}[y_i]$$

и, следовательно, функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0.$$

Поскольку это рассуждение применимо к любой функции $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, то мы получим систему дифференциальных уравнений

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Эта система определяет $2n$-параметрическое семейство интегральных кривых в пространстве $x, y_1, \ldots, y_n$ – семейство экстремалей данной вариационной задачи.

Упражнение 14. Показать, что для функционала (26) первая вариация записывается в виде

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_a^b \left(F_{y_i}\delta y_i + F_{y_i'}\delta y_i'\right) dx.$$

Пример 21. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2]dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1.$$

► Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} y_1'' + 2y_1 - y_2 = 0, \\ y_2'' + y_1 = 0. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения системы функцию $y_2 = 2y_1 + y_1''$ и подставив во второе уравнение, получим дифференциальное уравнение относительно функции $y_1(x)$:

$$y_1^{(IV)} + 2y_1'' + y_1 = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные. Отсюда нетрудно построить второе решение системы дифференциальных уравнений

$$y_2(x) = (2C_4 + C_1)\cos x - (2C_3 - C_2)\sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x.$$

Подставляя $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в граничные условия, получим линейную систему для определения C_1, C_2, C_3, C_4. Отсюда находим, что

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0.$$

Тогда пара функций

$$y_1(x) = \sin x + x \cos x, \quad y_2(x) = -\sin x + x \cos x$$

определяет допустимую экстремаль. ◄

Пример 22. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [y_2^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2]dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = e.$$

► Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} y_1'' = 0, \\ y_2'' - y_2 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему и находим ее общее решение

$$y_1(x) = C_1 x + C_2, \quad y_2(x) = C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

Из граничных условий имеем

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0.$$

Следовательно, экстремум функционала может достигаться на экстремали

$$\hat{y}_1(x) = x, \quad \hat{y}_2(x) = e^x.$$

Покажем, что на допустимой экстремали заданный функционал имеет абсолютный минимум. Пусть $\delta y_1(x), \delta y_2(x) \in C^1[0,1]$ и $\delta y_1(0) = \delta y_1(1) = \delta y_2(0) = \delta y_1(1) = 0$. Рассмотрим приращение функционала

$$\Delta J[\hat{y}_1, \hat{y}_2] = J[\hat{y}_1 + \delta y_1, \hat{y}_2 + \delta y_2] - J[\hat{y}_1, \hat{y}_2] =$$
$$= \int\limits_0^1 [2\hat{y}_2 \delta y_2 + (\delta y_2)^2 + 2\hat{y}_1' \delta y_1' + (\delta y_1')^2 + 2\hat{y}_2' \delta y_2' + (\delta y_2')^2]dx.$$

Интегрируя по частям слагаемые, содержащие $\delta y_1'$ и $\delta y_2'$, и учитывая, что $\delta y_1(0) = \delta y_1(1) = \delta y_2(0) = \delta y_1(1) = 0$, находим

$$\Delta J[\hat{y}_1, \hat{y}_2] = \int\limits_0^1 [2\hat{y}_2 \delta y_2 - 2\hat{y}_1'' \delta y_1 - 2\hat{y}_2'' \delta y_2]dx + \int\limits_0^1 [(\delta y_2)^2 + (\delta y_1')^2 + (\delta y_2')^2]dx.$$

Заметим, что первый интеграл равен нулю на решениях уравнений Эйлера, а второй интеграл является неотрицательным. Отсюда следует, что $\Delta J[\hat{y}_1, \hat{y}_2] \geq 0$ для всех допустимых вариаций $\delta y_1(x)$ и $\delta y_2(x)$. Это означает, что функции $\hat{y}_1(x)$, $\hat{y}_2(x)$ доставляют абсолютный минимум функционалу. ◄

5.3 Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных

Рассмотрим функционал

$$J[y(x_1,\ldots,x_n)] = \iint\limits_D \cdots \int F\left(x_1,\ldots,x_n,y,y_{x_1},\ldots,y_{x_n}\right) dx_1\cdots dx_n, \tag{27}$$

где D – область в n-мерном пространстве, по которой происходит интегрирование.

Функция $y(x_1,\ldots,x_n)$ определяет n-мерную гиперповерхность в $(n+1)$-мерном пространстве. Граничные условия для данного функционала запишем в виде

$$y(x_1,\ldots,x_n)|_\Gamma = \varphi(x_1,\ldots,x_n)|_\Gamma\,,$$

где Γ – граница области D, а $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ – заданная (непрерывная) на Γ функция. Иными словами, граничные условия в данном случае сводятся к заданию значения функции на границе области интегрирования D.

Для сокращения записи введем обозначения

$$p_i = y_{x_i}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Функцию F будем считать трижды дифференцируемой. Функцию $y = y(x_1,\ldots,x_n)$, определяющую поверхность, на которой реализуется экстремум, будем полагать дважды дифференцируемой.

Построим вариацию функционала (27). С этой целью построим однопараметрическое семейство поверхностей

$$y(x_1,\ldots,x_n,\alpha) = y(x_1,\ldots,x_n) + \alpha\delta y(x_1,\ldots,x_n),$$

которое при $\alpha = 0$ включает поверхность $y = y(x_1,\ldots,x_n)$, реализующую экстремум функционала. На функциях семейства $y(x_1,\ldots,x_n,\alpha)$ функционал превращается в функцию α, которая должна иметь экстремум при $\alpha = 0$. Следовательно,

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} J[y(x_1,\ldots,x_n,\alpha)]\Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Вариация функционала запишется в виде

$$\delta J = \iint\limits_D \cdots \int \left(F_y\delta y + \sum_{i=1}^n F_{p_i}\delta p_i\right) dx_1\cdots dx_n,$$

где

$$y(x_1,\ldots,x_n,\alpha) = y(x_1,\ldots,x_n) + \alpha\delta y(x_1,\ldots,x_n),$$
$$p_i(x_1,\ldots,x_n,\alpha) = p_i(x_1,\ldots,x_n) + \alpha\delta p_i(x_1,\ldots,x_n), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_{p_i}\delta y\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_{p_i}\right)\delta y + F_{p_i}\delta p_i,$$

то

$$\iint\limits_D \cdots \int \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}\delta p_i \, dx_1 \cdots dx_n = \iint\limits_D \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_{p_i}\delta y\right) dx_1 \cdots dx_n -$$

$$- \iint\limits_D \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{p_i}}{\partial x_i}\,\delta y \, dx_1 \cdots dx_n.$$

С помощью теоремы Гаусса, обобщенной на n-мерное пространство:

$$\iint\limits_D \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\, dx_1 \cdots dx_n = \int\limits_\Gamma \sum_{i=1}^{n} A_i \, d\sigma_i,$$

где $d\sigma_i$ – элемент интегрирования по гиперповерхности Γ, преобразуем интеграл

$$\iint\limits_D \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_{p_i}\delta y\right) dx_1 \cdots dx_n = \int\limits_\Gamma \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}\delta y \, d\sigma_i = 0.$$

Последний интеграл равен нулю, поскольку все допустимые поверхности проходят через одну и ту же границу Γ, что означает равенство нулю вариации δy на этой границе. Следовательно,

$$\iint\limits_D \cdots \int \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}\delta p_i \, dx_1 \cdots dx_n = -\iint\limits_D \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{p_i}}{\partial x_i}\,\delta y \, dx_1 \cdots dx_n$$

и необходимое условие экстремума принимает вид

$$\delta J = \iint\limits_D \cdots \int \left(F_y - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{p_i}}{\partial x_i} \right) \delta y \, dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

Так как вариация δy произвольна, а выражение в квадратных скобках есть непрерывная функция, то, согласно лемме Лагранжа, гиперповерхность $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ является решением уравнения

$$F_y - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{p_i}}{\partial x_i} = 0. \tag{28}$$

Определение. Дифференциальное уравнение (28), которому должна удовлетворять функция $y = y(x_1, \ldots, x_n)$, реализующая экстремум функционала (27), называют *уравнением Эйлера–Остроградского.*

Пример 23 (задача о нахождении поверхности минимальной площади)**.** Найти поверхность минимальной площади, натянутую на данный контур Γ.

► Задача сводится к исследованию на минимум функционала

$$S[z(x,y)] = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} dxdy,$$

где D – проекция поверхности $z = z(x,y)$ на плоскости xOy; Γ – граница множества D. Уравнение Эйлера–Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] = 0.$$

Выражение, стоящее справа от знака равенства, в дифференциальной геометрии понимают как среднюю кривизну поверхности. Таким образом, уравнение Эйлера–Остроградского описывает поверхность, средняя кривизна в каждой точке которой равна нулю. Известно, что физической реализацией минимальных поверхностей являются мыльные пленки, натянутые на заданный контур Γ [3]. ◄

Пример 24. Рассмотрим функционал

$$J[z(x,y)] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dxdy,$$

где значения функции $z = z(x,y)$ заданы на границе Γ области D пространства $\mathbb{R}^2_{x,y}$:

$$z(x,y)|_\Gamma = f(x,y).$$

Уравнение (28) в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

или в краткой записи

$$\Delta z = 0.$$

Это уравнение называют *уравнением Лапласа.* Вариационная задача в данном случае сводится к нахождению непрерывного в D решения уравнения Лапласа, принимающего заданные значения на границе области D. В математической физике эту задачу называют *краевой задачей Дирихле* для уравнения Лапласа.

6 Задача с подвижными границами

Рассмотрим задачу об экстремуме функционала

$$J[y, x_1, x_2] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx, \tag{29}$$

определенного на множестве функций $y(x) \in C^1[a, b]$ и при значениях параметров $a < x_1 < x_2 < b$. При этом значения x_1, $y_1 = y(x_1)$ и x_2, $y_2 = y(x_2)$, определяющие концы допустимых кривых, удовлетворяют граничным условиям

$$y(x_1) = \varphi_1(x_1), \quad y(x_2) = \varphi_2(x_1), \tag{30}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – заданные функции.

Обычно полагают, что функция $F(x, y, y')$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, а функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывно дифференцируемые.

В отличие от простейшей задачи вариационного исчисления, концы отрезка интегрирования являются подвижными и, следовательно, решение вариационной задачи для функционала (29) включает в себя некоторую функцию $y(x)$ и тот отрезок $[x_1, x_2]$, на котором она рассматривается (см. рис. 8). Значения функции $y(x)$ в точках x_1 и x_2 в общем случае могут быть и не заданы.

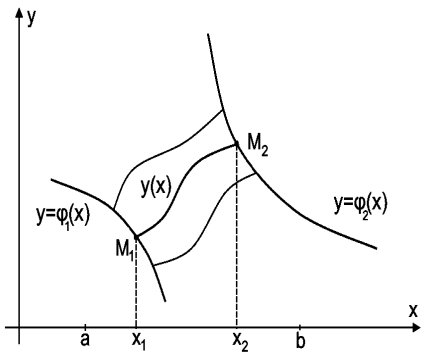

Рис. 8.

Тройка $(y(x), x_1, x_2)$ называется *допустимой* в задаче (29)–(30), если $y(x) \in C^1[a, b]$, $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ и выполняются условия (30) на концах.

Говорят, что допустимая тройка $(y_0(x), x_1^0, x_2^0)$ доставляет функционалу (29) *слабый локальный минимум* (*максимум*) в пространстве $C^1[a, b]$, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой другой допустимой тройки $(y(x), x_1, x_2)$, для которой $||y(x) - y_0(x)||_{C^1} < \varepsilon$, $|x_1 - x_1^0| < \varepsilon$, $|x_2 - x_2^0| < \varepsilon$ выполняется неравенство

$$J[y, x_1, x_2] \geq J[y_0, x_1^0, x_2^0] \quad (J[y, x_1, x_2] \leq J[y_0, x_1^0, x_2^0]).$$

Задача нахождения слабого локального экстремума для функционала (29) в классе непрерывно дифференцируемых функций, графики которых соединяют точки двух заданных гладких кривых $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ называется *задачей с подвижными границами.*

Теорема 6 (необходимое условие экстремума для задачи с подвижными границами). *Пусть*

1) *тройка* $(y(x), x_1, x_2)$, *где* $y(x) \in C^2[a,b]$, $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ *осуществляет экстремум в задаче с подвижными границами;*

2) *функция* $F(x,y,y')$ *непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно;*

3) *функции* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *непрерывно дифференцируемы.*

Тогда функция $y(x)$ *удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

и условиям трансверсальности на левом и правом концах:

$$[F + (\varphi_1' - y')F_{y'}]\big|_{x=x_1} = 0, \quad [F + (\varphi_2' - y')F_{y'}]\big|_{x=x_2} = 0. \tag{31}$$

Доказательство. Пусть функция $y(x)$ с концевыми точками $(x_1, y(x_1))$ и $(x_2, y(x_2))$ доставляет экстремум функционалу (29). Вариация функционала $J[y, x_1, x_2]$ на тройке $(y(x), x_1, x_2)$ будет зависеть не только от вариации функции $\delta y(x)$, но и от вариации подвижных границ: δx_1, δx_2.

Фиксируем тройку допустимых вариаций $\delta y(x)$, δx_1, δx_2. Функционал на множестве допустимых кривых

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\delta y(x), \quad y(x) \in C^1[a,b]$$

и множестве допустимых значений пределов интегрирования

$$x_1(\alpha) = x_1 + \alpha\delta x_1, \quad x_2(\alpha) = x_2 + \alpha\delta x_2$$

превращается в функцию

$$\Phi(\alpha) = J[y+\alpha\delta y, x_1+\alpha\delta x_1, x_2+\alpha\delta x_2] = \int\limits_{x_1+\alpha\delta x_1}^{x_2+\alpha\delta x_2} F(x, y+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y')dx.$$

Поскольку тройка $(y(x), x_1, x_2)$ доставляет экстремум функционалу $J[y, x_1, x_2]$, то функция $\Phi(\alpha)$ будет иметь экстремум в точке $\alpha = 0$. Из условий гладкости, наложенных на $F(x,y,y')$, $y(x)$, $\delta y(x)$, следует, что функция $\Phi(\alpha)$ дифференцируема в точке $\alpha = 0$ и на тройке $(y(x), x_1, x_2)$ существует вариация функционала

$$\delta J[y, x_1, x_2, \delta y, \delta x_1, \delta x_2] = \Phi'(0).$$

Тогда, согласно необходимому условию экстремума для функции одной переменной, выполняется равенство $\delta J = \Phi'(0) = 0$ для всех допустимых вариаций $\delta y(x)$, δx_1, δx_2.

Построим вариацию функционала (29). Производная функции $\Phi(\alpha)$ определяется выражением

$$\Phi'(\alpha) = \int\limits_{x_1+\alpha\delta x_1}^{x_2+\alpha\delta x_2} [F_y(x,y,y')\delta y + F_{y'}(x,y,y')\delta y']\,dx +$$
$$+ F(x, y(x) + \alpha\delta y(x), y'(x) + \alpha(\delta y(x))')|_{x=x_2+\alpha\delta x_2} \cdot \delta x_2 -$$
$$- F(x, y(x) + \alpha\delta y(x), y'(x) + \alpha(\delta y(x))')|_{x=x_1+\alpha\delta x_1} \cdot \delta x_1.$$

Полагая здесь $\alpha = 0$, получим выражение для вариации функционала

$$\delta J = \int\limits_{x_1}^{x_2} [F_y(x,y,y')\delta y + F_{y'}(x,y,y')\delta y']\,dx +$$
$$+ F(x_2, y(x_2), y'(x_2))\delta x_2 - F(x_1, y(x_1), y'(x_1))\delta x_1.$$

Проинтегрировав второе слагаемое в квадратных скобках по частям, получаем равенство

$$\delta J = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx +$$
$$+ F_{y'}(x_2, y(x_2), y'(x_2))\delta y(x_2) - F_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1))\delta y(x_1) +$$
$$+ F(x_2, y(x_2), y'(x_2))\delta x_2 - F(x_1, y(x_1), y'(x_1))\delta x_1.$$

Таким образом, нетрудно видеть, что вариация функционала состоит из интегральной части, которая определяется вариацией кривой $\delta y(x)$ при фиксированных значениях x_1 и x_2, и трех слагаемых, зависящих от вариаций δx_1, δx_2 концов интервала интегрирования и вариаций $\delta y(x)$ концов экстремали при $x = x_1$ и $x = x_2$.

Пусть $\bar{y}(x) = y(x,\alpha)|_{\alpha=1} = y(x) + \delta y(x)$. Обозначим

$$\delta y_1 = \bar{y}(x_1 + \delta x_1) - y(x_1), \quad \delta y_2 = \bar{y}(x_2 + \delta x_2) - y(x_2).$$

Из рис. 9 видно, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка справедливо равенство

$$\delta y(x_2) = \delta y_2 - y'(x_2)\delta x_2.$$

Аналогичные рассуждения для левого конца приводят к равенству

$$\delta y(x_1) = \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1.$$

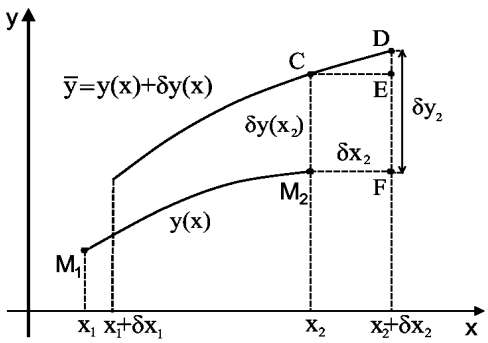

Рис. 9.

Тогда окончательно общая формула вариации для функционала запишется в виде

$$\delta J = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \, dx +$$
$$+ F_{y'}\big|_{x=x_2} \cdot \delta y_2 + [F - y' F_{y'}]\big|_{x=x_2} \cdot \delta x_2 -$$
$$- F_{y'}\big|_{x=x_1} \cdot \delta y_1 - [F - y' F_{y'}]\big|_{x=x_1} \cdot \delta x_1 = 0. \quad (32)$$

Если некоторая кривая дает экстремум рассматриваемому функционалу среди всех допустимых кривых, то она тем более будет давать экстремум и по отношению ко всем кривым, имеющим те же концевые точки. Следовательно, эта кривая должна быть экстремалью, т.е. удовлетворять уравнению Эйлера. Следовательно, в общей формуле (32) для вариации функционала первое слагаемое равно нулю. Поэтому в данном случае необходимое условие экстремума принимает вид

$$\delta J = F_{y'}\big|_{x=x_2} \cdot \delta y_2 + [F - y' F_{y'}]\big|_{x=x_2} \cdot \delta x_2 -$$
$$- F_{y'}\big|_{x=x_1} \cdot \delta y_1 - [F - y' F_{y'}]\big|_{x=x_1} \cdot \delta x_1 = 0. \quad (33)$$

Поскольку концы графиков допустимых функций лежат на фиксированных кривых, то

$$\delta y_1 = \varphi_1'(x_1)\delta x_1, \quad \delta y_2 = \varphi_2'(x_2)\delta x_2.$$

Поэтому условие экстремума $\delta J = 0$ можно переписать в виде

$$\delta J = [F + (\varphi_2' - y')F_{y'}]\big|_{x=x_2} \cdot \delta x_2 - [F + (\varphi_1' - y')F_{y'}]\big|_{x=x_1} \cdot \delta x_1 = 0.$$

В силу независимости вариаций δx_1 и δx_2 из последнего выражения непосредственно следуют условия трансверсальности, сформулированные в теореме. □

При решении задачи с подвижными границами прежде всего необходимо найти общее решение $y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера, содержащее две постоянные интегрирования C_1 и C_2. Граничные условия (30) и условия трансверсальности (31) в совокупности определяют систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных: C_1, C_2, x_1, x_2. Таким образом, набор условий для определения тройки $(y(x), x_1, x_2)$, доставляющей экстремум функционалу в задаче с подвижными границами, является полным.

Замечание. Условия трансверсальности (31) устанавливают связь между угловыми коэффициентами $y'(x_1)$ и $\varphi_1'(x_1)$, а также $y'(x_2)$ и $\varphi_2'(x_2)$ в граничных точках $M_1(x_1, y(x_1))$ и $M_2(x_2, y(x_2))$.

Перечислим возможные частные случаи вариационной задачи с подвижными границами. Не умаляя общности рассуждений, рассмотрим задачи только с одной (правой) подвижной границей. При этом второй конец экстремали можно считать, например, фиксированным в заданной точке или задать какие-либо иные граничные условия на этом конце.

1. Задача с подвижной (правой) границей ($x = b$)

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx, \quad y(a) = A.$$

Здесь левый конец гладких кривых, на которых определяется функционал, закреплен в точке (a, A), а правый скользит по вертикальной прямой $x = b$. Такую вариационную задачу называют также *задачей со свободным (правым) концом.*

В силу условий вариационной задачи можно положить $\delta y_1 = 0$ и $\delta x_1 = 0$, так как левый конец кривой закреплен, и $\delta x_2 = 0$, так как абсцисса правого конца кривой при движении не меняется. Тогда из формулы (33) следует условие трансверсальности для случая, когда правый конец кривой перемещается по вертикальной прямой $x = b$:

$$F_{y'}|_{x=b} = 0.$$

Данное условие называют *естественным граничным условием* задачи со свободным (правым) концом.

Уравнение Эйлера, граничное условие на левом конце и условие трансверсальности на правом образуют полный набор для определения функции $y(x) \in C^1[a, b]$, доставляющей экстремум функционалу в данной вариационной задаче.

2. Задача с подвижной (правой) границей ($y = B$).

$$J[y] = \int\limits_a^{x_2} F(x, y, y')dx, \quad y(a) = A, \quad y(x_2) = B.$$

Здесь левый конец гладких кривых, на которых определяется функционал, закреплен в точке (a, A), а правый скользит по горизонтальной прямой $y(x) = b$.

Условие трансверсальности на правом конце является частным случаем условия, определенного в формуле (31). Действительно, из условий вариационной задачи следует, что $\varphi_2(x) = B$, а значит, $\varphi_2'(x_2) = 0$.

Таким образом, если конец кривой перемещается по горизонтальной прямой $y(x) = B$, то условие трансверсальности запишется в виде

$$[F - y'F_{y'}]|_{x=x_2} = 0.$$

Искомыми величинами, на которых реализуется экстремум функционала, для данной вариационной задачи являются функция $y(x) \in C^1[a, x_2]$ и абсцисса $x_2 > a$ точки пересечения кривой с заданной горизонтальной прямой.

3. Задача при отсутствии (правого) граничного условия.

$$J[y] = \int\limits_a^{x_2} F(x, y, y')dx, \quad y(a) = A.$$

Здесь левый конец гладких кривых, на которых определяется функционал, закреплен в точке (a, A), а перемещение правого конца не обусловлено какими-либо ограничениями.

Если граничное условие на правом конце отсутствует, то вариации δx_2, δy_2 произвольны. Тогда из формулы (33) следует

$$F|_{x=x_2} = 0, \quad F_{y'}|_{x=x_2} = 0.$$

Искомыми величинами для данной вариационной задачи являются функция $y(x) \in C^1[a, x_2]$ и точка $x_2 > a$, на которых реализуется экстремум функционала.

Пример 25. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} (y')^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_2) = \frac{1}{2}(x_2)^2 + 1.$$

► В данной задаче один конец кривой закреплен в точке $(0,0)$, а другой может перемещаться по линии $y=\varphi_2(x)=x^2/2+1$.

Заметим, что интегрант $F(x,y,y')=(y')^3$ не зависит от переменных x и y. Поэтому экстремалями функционала будут прямые $y=C_1x+C_2$. Запишем условия трансверсальности в точке $x=x_2$:

$$[F+(\varphi_2'-y')F_{y'}]\big|_{x=x_2}=0 \quad\Rightarrow\quad 3x_2(y'(x_2))^2-2(y'(x_2))^3=0.$$

Неизвестные C_1, C_2 и x_2 найдем, решая систему уравнений, составленную из заданного граничного условия в точке $x=0$, условия трансверсальности в точке $x=x_2$ и условия пересечения искомой экстремали и заданной линии $y=\varphi_2(x)$ в этой же точке:

$$\begin{cases} y(0)=0, \\ 3x_2(y'(x_2))^2-2(y'(x_2))^3=0, \\ y(x_2)=x_2^2/2+1. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} C_2=0, \\ 3x_2C_1^2-2C_1^3=0, \\ C_1x_2=x_2^2/2+1. \end{cases}$$

Отсюда получим значения неизвестных: $C_1=3/2$, $C_2=0$, $x_2=1$.

Таким образом, искомая экстремаль имеет вид

$$y_0(x)=\frac{3}{2}x, \quad 0\le x\le 1.$$

◄

Пример 26. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}(y')^3dx, \quad y(x_1)=\frac{1}{2}(x_1)^2+1.$$

► В данной задаче левый конец кривой перемещается по линии $y=\varphi_1(x)=x^2/2+1$, а правый может занимать любое положение.

Как и в предыдущем примере решением уравнения Эйлера будет множество прямых $y=C_1x+C_2$. Запишем условие трансверсальности в точке $x=x_1$:

$$[F+(\varphi_1'-y')F_{y'}]\big|_{x=x_1}=0 \quad\Rightarrow\quad (y'(x_1))^2(3x_1-2y'(x_1))=0.$$

и условия на свободном правом конце:

$$F\big|_{x=x_2}=0, \quad F_{y'}\big|_{x=x_2}=0 \quad\Rightarrow\quad y'(x_2)=0.$$

Условия трансверсальности и пересечения искомой экстремали и заданной линии $y=\varphi_1(x)$ в точке $x=x_1$, а также условия для правого конца экстремали образуют систему

$$\begin{cases} (y'(x_1))^2(3x_1-2y'(x_1))=0, \\ y(x_1)=x_1^2/2+1, \\ y'(x_2)=0. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} C_1^2(3x_1-2C_1)=0, \\ x_1^2/2+1=C_1x_1+C_2, \\ C_1=0. \end{cases}$$

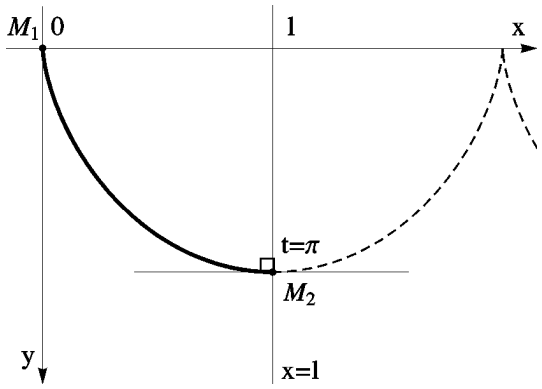

Рис. 10.

Решая эту систему, получим, что $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}(x_1)^2 + 1$, а переменные x_1 и x_2 принимают произвольные значения, причем $x_1 < x_2$. Таким образом, искомые экстремали функционала имеют вид

$$y(x) = \frac{1}{2}(x_1)^2 + 1, \quad x_1 \le x \le x_2.$$

В частности, одной из допустимых экстремалей будет прямая

$$y(x) = 1, \quad 0 \le x < +\infty$$

◀

Пример 27. Найти допустимые экстремали функционала

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^l \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad y(0) = 0.$$

▶ Экстремали функционала, удовлетворяющие условию $y(0) = 0$, являются циклоидами (см. задачу о брахистохроне)

$$\begin{cases} x = C_1(t - \sin t), \\ y = C_1(1 - \cos t). \end{cases}$$

Для определения постоянной C_1 используем естественное граничное условие, возникающее при движении правого конца экстремали по прямой $x = l$:

$$F_{y'}\big|_{x=l} = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(l) = 0.$$

Это условие означает, что график искомой экстремали должен пересекать прямую $x = l$ под прямым углом. Нетрудно видеть, что такое условие может выполняться только в вершине циклоиды (см. рис. 10). Так как для вершины параметр $t = \pi$, то $x(\pi) = C_1\pi = l$. Отсюда

определяем постоянную интегрирования: $C_1 = l/\pi$. В итоге допустимая экстремаль имеет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{l}{\pi}(t - \sin t), \\ y = \dfrac{l}{\pi}(1 - \cos t). \end{cases}$$

◀

Упражнение 15. Доказать, что для функционала

$$J[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y)\sqrt{1 + (y')^2}dx, \quad y(x_1) = \varphi_1(x_1), \quad y(x_2) = \varphi_2(x_2),$$

где функция $f(x,y)$ дифференцируема и $f(x,y) \neq 0$ в граничных точках, условие трансверсальности сводится к условию ортогональности

$$y'(x_1)\varphi_1'(x_1) = -1, \quad y'(x_2)\varphi_2'(x_2) = -1$$

графиков функций $y(x)$ и $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ в точках x_1 и x_2 соответственно.

Пример 28. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(0,0)$ до кривой $y = 4/x$ $(x > 0)$.

▶ Задача сводится к нахождению минимума функционала

$$l[y] = \int\limits_{0}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}dx$$

при условии, что левый конец искомой кривой закреплен: $y(0) = 0$, а правый двигается по заданной кривой: $\varphi_2(x) = 4/x$ $(x > 0)$.

Экстремалями функционала $l[y]$ являются прямые: $y = C_1x + C_2$. Граничное условие для левого конца экстремали, условие трансверсальности для правого конца (см. упр. 15), а также условие пересечения экстремали и заданной кривой $y = \varphi_2(x)$ при $x = x_2$ образуют систему

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(x_2)\varphi_2'(x_2) = -1, \\ y(x_2) = \varphi_2(x_2). \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = 0, \\ x_2^2 = 4C_1, \\ C_1x_2^2 = 4. \end{cases}$$

Решая систему, получим, что $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $x_2 = 2$. Тогда допустимая экстремаль запишется в виде $y_0(x) = x$, а искомое расстояние будет соответственно равно $l[y_0] = 2\sqrt{2}$. ◀

7 Задачи на условный экстремум

7.1 Задача Лагранжа

Рассмотрим задачу об отыскании экстремума функционала

$$J[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx \tag{34}$$

с граничными условиями

$$y_k(a) = A_k, \quad y_k(b) = B_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{35}$$

причем на функции, от которых зависит функционал, наложены дополнительные условия – так называемые *условия связи*

$$\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \quad i = 1, \ldots, m \ (m < n). \tag{36}$$

Представленные выше условия называют *дифференциальными ограничениями*, или *дифференциальными связями*. Будем полагать уравнения (36) независимыми, что означает

$$\operatorname{rank}\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j'}\right] = m, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Следует отметить, что количество уравнений m не должно превосходить количества функций $y_k(x)$, от которых зависит функционал (34). Действительно, если уравнений больше, то система дифференциальных уравнений (36) может оказаться несовместной, а если столько же, то новой задачи не возникает – выражая из уравнений производные $y_k'(x)$ и подставляя их в исследуемый функционал, приходим к известной вариационной задаче, рассмотренной ранее. Поэтому в дальнейшем будем считать $m < n$.

Важным частным случаем дифференциальных ограничений (36) являются связи вида

$$\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \ (m < n), \tag{37}$$

которые называют *фазовыми ограничениями*. В теоретической механике такие связи называют *голономными связями*. Аналогично будем полагать независимыми и уравнения (37), что означает

$$\operatorname{rank}\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}\right] = m, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что граничные условия (35) должны быть согласованы с дополнительными условиями (37)

$$\Phi_i(a, A_1, \ldots, A_n) = 0, \quad \Phi_i(b, B_1, \ldots, B_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Задача нахождения слабого локального экстремума функционала (34) с граничными условиями (35) и связями (36) и/или (37) называется *задачей Лагранжа.*

Геометрический смысл задачи Лагранжа

Пусть уравнение связи $\Phi(x, y, z) = 0$ задает некоторую поверхность S в пространстве $\mathbb{R}^3$. Определим на поверхности S две точки: $M_1(a, y_1, z_1)$ и $M_2(b, y_2, z_2)$. Пара функций

$$\gamma: \quad y = y(x), \quad z = z(x), \quad x \in [a, b],$$

задает пространственную кривую γ на поверхности S, соединяющую точки M_1 и M_2 (см. рис. 11).

Геометрически задача Лагранжа означает, что среди всех непрерывно дифференцируемых кривых γ, лежащих на заданной поверхности S и соединяющих заданные точки M_1 и M_2, требуется найти такую кривую, которая дает слабый локальный экстремум функционалу (34).

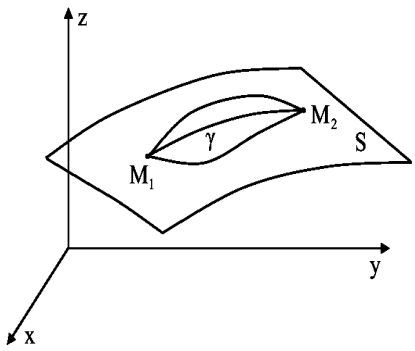

Рис. 11.

Заметим, что так как точки M_1, M_2 принадлежат поверхности S, то граничные условия не должны противоречить уравнению связи, т.е. должно выполняться равенство

$$\Phi(a, y_1, z_1) = \Phi(b, y_2, z_2) = 0.$$

Сформулируем необходимое условие задачи Лагранжа при наличии фазовых или дифференциальных ограничений.

Теорема 7 (необходимое условие экстремума для задачи Лагранжа с фазовыми ограничениями)**.** *Пусть:*

1) *функции $y_k(x) \in C^2[a, b]$, $k = 1, \ldots, n$, реализуют экстремум функционала (34) на множестве функций, удовлетворяющих граничным условиям (35) и условиям связи (37);*

2) *функция $F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно;*

3) *функции $\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, m$, $(m < n)$ непрерывны вместе со своими частными производными, причем*

$$\frac{\mathcal{D}(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)}{\mathcal{D}(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0.$$

Тогда существуют непрерывные функции $\lambda_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, такие что функции $y_k(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$F^\star_{y_k} - \frac{d}{dx} F^\star_{y'_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

составленной для функционала

$$J^\star[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b F^\star(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) dx,$$

где $F^\star = F + \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i(x) \Phi_i$.

Доказательство. Вычислим вариацию функционала $J[y_1, \ldots, y_n]$ и запишем необходимое условие экстремума

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} J[y_1 + \alpha \delta y_1, \ldots, y_n + \alpha \delta y_n]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \sum_{k=1}^n \left(F_{y_k} \delta y_k + F_{y'_k} \delta y'_k \right) dx = 0.$$

Интегрируя по частям второе слагаемое и принимая во внимание, что

$$\delta y'_k = (\delta y_k)', \quad \delta y_k(a) = 0, \quad \delta y_k(b) = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

получим

$$\delta J = \int\limits_a^b \sum_{k=1}^n \left(F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y'_k} \right) \delta y_k \, dx = 0. \tag{38}$$

Применять лемму Лагранжа пока нельзя, так как вариации $\delta y_k(x)$ не являются независимыми, они подчиняются условиям

$$\Phi_i(x, y_1 + \alpha \delta y_1, \ldots, y_n + \alpha \delta y_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Продифференцируем это равенство по α и положим $\alpha = 0$:

$$\frac{d\Phi_i}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} \delta y_k = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Только $n - m$ из всех вариаций δy_k можно считать произвольными, например δy_{m+1}, …, δy_n, а остальные определяются из полученных уравнений.

Умножая почленно каждое из этих уравнений на $\lambda_i(x)$ и интегрируя по x, получим

$$\int\limits_a^b \lambda_i(x) \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} \delta y_k dx = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{39}$$

Складывая (38) и (39), получим

$$\int\limits_a^b \sum_{k=1}^n \left[F_{y_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} F_{y'_k} \right] \delta y_k \, dx = 0.$$

Введем обозначение

$$F^\star = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \Phi_i.$$

Тогда предыдущее выражение можно записать в виде

$$\int\limits_a^b \sum_{k=1}^n \left(F^\star_{y_k} - \frac{d}{dx} F^\star_{y'_k} \right) \delta y_k \, dx = 0. \tag{40}$$

Выберем m множителей $\lambda_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, так, чтобы они удовлетворяли m уравнениям

$$F^\star_{y_k} - \frac{d}{dx} F^\star_{y'_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{41}$$

или

$$F_{y_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} F_{y'_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Эти уравнения образуют линейную по отношению к $\lambda_i(x)$ систему с определителем, отличным от нуля

$$\frac{\mathcal{D}(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)}{\mathcal{D}(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0.$$

Следовательно, эта система имеет решение

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x).$$

При таком выборе $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ необходимое условие экстремума (40) принимает вид

$$\int\limits_a^b \sum_{k=m+1}^{n} \left(F^\star_{y_k} - \frac{d}{dx} F^\star_{y'_k} \right) \delta y_k \, dx = 0.$$

Так как для функций $y_1, \ldots, y_n$, реализующих экстремум функционала J, это функциональное уравнение обращается в тождество уже при произвольном выборе δy_k, $k = m+1, \ldots, n$, то теперь можно применить лемму Лагранжа. Положив по очереди равными нулю все δy_k, кроме одного, и применяя лемму, получим

$$F^\star_{y_k} - \frac{d}{dx} F^\star_{y'_k} = 0, \quad k = m+1, \ldots, n.$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 8 (необходимое условие экстремума для задачи Лагранжа с дифференциальными ограничениями)**.** *Пусть:*

1) *функции* $y_k(x) \in C^2[a,b]$, $k = 1, \ldots, n$, *реализуют экстремум функционала* (34) *на множестве функций, удовлетворяющих граничным условиям* (35) *и условиям связи* (36)*;*

2) *функции* $F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)$ *и* $\Phi_i(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)$, $i = 1, \ldots, m$, $(m < n)$ *непрерывны вместе со своими частными производными до второго порядка включительно, причем*

$$\frac{\mathcal{D}(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)}{\mathcal{D}(y'_1, \ldots, y'_m)} \neq 0.$$

Тогда существуют дифференцируемые функции $\lambda_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, *такие что функции* $y_k(x)$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$F^\star_{y_k} - \frac{d}{dx} F^\star_{y'_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

составленной для функционала

$$J^\star[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b F^\star(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) dx,$$

где $F^\star = F + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \Phi_i$.

Доказательство теоремы можно найти, например, в книгах [3, 20].

Определение. Вспомогательный функционал $J^\star$, построенный для задачи Лагранжа с дифференциальными или фазовыми ограничениями, называют *функционалом Лагранжа*, а его интегрант $F^\star$ – *функцией Лагранжа*. Функции $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ называются *множителями Лагранжа*.

На основе представленных выше теорем нетрудно сформулировать метод поиска условного экстремума функционала.

Метод множителей Лагранжа

Условный экстремум функционала (34) при наличии связей (36) и/или (37) достигается на тех же кривых, на которых реализуется безусловный экстремум вспомогательного функционала

$$J^\star[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b F^\star(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx, \quad F^\star = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)\Phi_i,$$

где $\lambda_i(x)$ – неопределенные функции. Из уравнений Эйлера вспомогательного функционала $J^\star[y_1, \ldots, y_n]$ и соответствующих уравнений связей составим систему $n + m$ уравнений

$$\begin{cases} F^\star_{y_k} - \dfrac{d}{dx}F^\star_{y_k'} = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \\ \Phi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Решая данную систему, найдем множители Лагранжа $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ и функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, на которых может быть реализован условный экстремум функционала $J[y_1, \ldots, y_n]$.

Замечание. Уравнения $\Phi_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, можно также рассматривать как уравнения Эйлера для функционала $J^\star[y_1, \ldots, y_n]$, если аргументами функционала считать не только функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, но и множители Лагранжа $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$.

Пример 29 (задача о геодезических линиях)**.** Пусть уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ определяет некоторую поверхность в трехмерном пространстве, на которой фиксированы две точки. Определить кривую наименьшей длины, соединяющую эти точки и принадлежащую заданной поверхности.

► Пусть $\Phi(x, y, z) = 0$ – гладкая поверхность в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Выберем на поверхности две точки: $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

Расстояние между этими точками, проходимое по заданной поверхности, определяется функционалом

$$l[y,z] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} dx,$$

с граничными условиями

$$y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad z(x_2) = z_2. \tag{42}$$

Требуется найти минимум данного функционала при дополнительном условии $\Phi(x,y,z) = 0$.

Согласно методу множителей Лагранжа, построим вспомогательный функционал

$$l^\star[y,z] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[\sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} + \lambda(x)\Phi(x,y,z) \right] dx.$$

Функции $y(x)$, $z(x)$, $\lambda(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера функционала $l^\star[y,z]$, дополненной уравнением поверхности

$$\begin{cases} \lambda(x)\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0, \\ \lambda(x)\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0, \\ \Phi(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы определяются искомые функции

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

на которых достигается условный экстремум функционала $l[y,z]$, и множитель Лагранжа $\lambda(x)$. Произвольные постоянные в общем решении системы определяются из граничных условий (42).

Наименьшие по длине линии между двумя точками некоторой поверхности являются *геодезическими линиями* этой поверхности. В частности, геодезическими линиями на плоскости являются прямые, а геодезическими линиями на сфере – дуги большого круга.

Задача о геодезических линиях часто используется в практике управления различными потоками. Например, при перевозке промышленных грузов из пункта A в пункт B выбирается, как правило, наименьшее расстояние. ◀

Пример 30. Найти экстремаль функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1y_2]dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1, \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1,$$
$$y_1' + y_2' - 4x = 0.$$

► Составим функцию

$$F^\star(x, y, y') = (y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1y_2 + \lambda(x)(y_1' + y_2' - 4x).$$

Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи

$$\frac{\partial F^\star}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^\star}{\partial y_1'} = 2y_2 - 2y_1'' - \lambda'(x) = 0, \tag{43}$$

$$\frac{\partial F^\star}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^\star}{\partial y_2'} = 2y_1 - 2y_2'' - \lambda'(x) = 0, \tag{44}$$

$$y_1' + y_2' - 4x = 0. \tag{45}$$

Найдем общее решение системы (43)–(45). Вычитая из уравнения (44) уравнение (43), получим

$$2(y_1'' - y_2'') + 2(y_1 - y_2) = 0.$$

Определим новую функцию $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Тогда предыдущее уравнение запишется в виде $z'' + z = 0$. Поскольку характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i$, то

$$z(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x = y_1(x) - y_2(x).$$

Продифференцируем левую и правую части полученного равенства

$$-C_1 \sin x + C_2 \cos x = y_1'(x) - y_2'(x).$$

Так как из уравнения (45) следует $y_2' = 4x - y_1'$, то

$$-C_1 \sin x + C_2 \cos x = y_1'(x) - 4x + y_1'(x) = 2y_1'(x) - 4x.$$

Отсюда

$$y_1'(x) = 2x - \frac{C_1}{2}\sin x + \frac{C_2}{2}\cos x.$$

Интегрируя, получаем

$$y_1(x) = x^2 + \frac{C_1}{2}\cos x + \frac{C_2}{2}\sin x + C_3,$$

$$y_2(x) = y_1(x) - C_1\cos x - C_2\sin x = x^2 - \frac{C_1}{2}\cos x - \frac{C_2}{2}\sin x + C_3.$$

Постоянные C_1, C_2, C_3 находим из граничных условий:

$$y_1(0) = \frac{C_1}{2} + C_3 = 1, \qquad y_2(0) = -\frac{C_1}{2} + C_3 = -1,$$

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{C_2}{2} + C_3 = \frac{\pi^2}{4} + 1, \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{C_2}{2} + C_3 = \frac{\pi^2}{4} - 1.$$

Отсюда $C_1 = 2$, $C_2 = 2$, $C_3 = 0$. В результате выпишем экстремаль вариационной задачи

$$y_1(x) = x^2 + \cos x + \sin x, \quad y_2(x) = x^2 - \cos x - \sin x.$$

◀

7.2 Изопериметрическая задача

Рассмотрим вариационную задачу, в которой требуется определить экстремум функционала

$$J[y_1, \ldots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx \tag{46}$$

при выполнении граничных условий

$$y_k(a) = A_k, \quad y_k(b) = B_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{47}$$

и дополнительных так называемых *изопериметрических условий* или *интегральных связей*

$$I_i[y_1, \ldots, y_n] = \int_a^b G_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx = l_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{48}$$

где l_i – постоянные; m может быть больше, меньше или равно n.

Задача нахождения слабого локального экстремума функционала (46) при условиях (47) и (48) называется *изопериметрической задачей.*

Изопериметрическая задача может быть сведена к задаче на условный экстремум путем введения функций

$$z_i(x) = \int\limits_a^x G_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Очевидно, что

$$z_i(a) = 0, \quad z_i(b) = l_i.$$

Дифференцируя $z_i(x)$ по x, получим

$$z_i'(x) = G_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n').$$

Таким образом, изопериметрические связи (48) можно представить как дифференциальные связи вида

$$\Phi_i = G_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') - z_i'(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{49}$$

причем нетрудно показать, что

$$\frac{\mathcal{D}(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)}{\mathcal{D}(z_1', \ldots, z_m')} \neq 0.$$

Следовательно, изопериметрическая задача сводится к задаче на условный экстремум функционала (46), экстремали которого удовлетворяют граничным условиям

$$y_k(a) = A_k, \quad y_k(b) = B_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$z_i(a) = 0, \quad z_i(b) = l_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

и дифференциальным связям (49). При этом к данной задачи Лагранжа можно применить теорему о необходимом условии экстремума 8.

Применяя метод множителей Лагранжа (см. предыдущий раздел), можно вместо исследования на условный экстремум функционала (46) исследовать на безусловный экстремум вспомогательный функционал

$$J^\star[y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m] = \int\limits_a^b F^\star(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', z_1', \ldots, z_m')dx,$$

где

$$F^\star = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)(G_i - z_i').$$

Уравнения Эйлера для функционала $J^\star$ имеют вид

$$\begin{cases} F^\star_{y_k} - \dfrac{d}{dx} F^\star_{y'_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \\ F^\star_{z_i} - \dfrac{d}{dx} F^\star_{z'_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

или, учитывая явный вид интегранта $F^\star$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_k} \left\{ F + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(x) G_i \right\} - \dfrac{d}{dx} \dfrac{\partial}{\partial y'_k} \left\{ F + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(x) G_i \right\} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, \ldots, n, \\ \dfrac{d}{dx}\, \lambda_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Из последних m уравнений системы следует, что все множители Лагранжа $\lambda_i(x)$ постоянны, а первые n уравнений можно рассматривать как уравнения Эйлера для функционала вида

$$J^{\star\star}[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i \right) dx, \quad \lambda_i = \text{const}.$$

Проведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 9 (необходимое условие экстремума для изопериметрической задачи)**.** *Пусть:*

1) *функции* $y_k(x) \in C^2[a, b]$, $k = 1, \ldots, n$, *реализуют экстремум функционала* (46) *при наличии граничных условий* (47) *и изопериметрических условий* (48)*;*

2) *система функций* $y_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, *не является экстремалью ни для одного из функционалов* (48)*;*

3) *функции* F *и* G_i, $i = 1, \ldots, m$, *непрерывны вместе со своими производными до второго порядка включительно.*

Тогда существуют множители Лагранжа $\lambda_i = \text{const}$, $i = 1, \ldots, m$, *такие что функции* $y_k(x)$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$F^{\star\star}_{y_k} - \frac{d}{dx} F^{\star\star}_{y'_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

составленной для функционала

$$J^{\star\star}[y_1,\ldots,y_n]=\int\limits_a^b F^{\star\star}(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')dx,$$

где $F^{\star\star}=F+\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i G_i$.

В изопериметрической задаче, как и в задаче Лагранжа, вспомогательный функционал $J^{\star\star}$ называют *функционалом Лагранжа*, а его интегрант $F^{\star\star}$ – *функцией Лагранжа*. Постоянные $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ называют *множителями Лагранжа* изопериметрической задачи.

Сформулируем метод решения изопериметрической задачи.

Метод множителей Лагранжа

Условный экстремум функционала (46) при наличии граничных условий (47) и изопериметрических условий (48) достигается на тех же кривых, на которых реализуется безусловный экстремум вспомогательного функционала

$$J^{\star\star}[y_1,\ldots,y_n]=\int\limits_a^b F^{\star\star}(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')dx,\quad F^{\star\star}=F+\sum_{i=1}^m \lambda_i G_i,$$

где λ_i – неопределенные постоянные. Из уравнений Эйлера вспомогательного функционала $J^{\star\star}[y_1,\ldots,y_n]$ и соответствующих изопериметрических условий (48) составим систему

$$\begin{cases} F^{\star\star}_{y_k}-\dfrac{d}{dx}F^{\star\star}_{y_k'}=0, \quad k=1,\ldots,n,\\ \displaystyle\int\limits_a^b G_i dx=l_i, \quad i=1,\ldots,m.\end{cases}$$

Решая данную систему, найдем постоянные $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ и функции $y_1(x),\ldots,y_n(x)$, на которых может быть реализован условный экстремум функционала $J[y_1,\ldots,y_n]$.

Принцип взаимности

Умножим вспомогательный функционал изопериметрической задачи (46)–(48) на некоторое постоянное число:

$$\mu_0 J^{\star\star}[y_1,\ldots,y_n]=\int\limits_a^b\left[\mu_0 F+\sum_{i=1}^m \mu_0\lambda_i G_i\right]dx,\quad \mu_0\neq 0.$$

Вводя обозначения

$$F_0 = F, \quad F_i = G_i, \quad \mu_i = \mu_0 \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

получаем

$$\mu_0 J^{\star\star}[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b \sum_{i=0}^m \mu_i F_i dx.$$

В это выражение все функции F_i входят одинаковым образом. Это означает, что в качестве интегранта функционала можно выбрать любую из функций F_i, а остальные отнести к изопериметрическим условиям.

Рассмотрим задачу на нахождение экстремалей функционала

$$\int\limits_a^b F_s(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') dx,$$

где s – некоторое фиксированное число ($s = 1, \ldots, m$), при наличии изопериметрических условий

$$\int\limits_a^b F_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') dx = l_i, \quad i = 0, \ldots, s-1, s+1, \ldots, m.$$

При этом постоянная l_0 равна экстремальному значению функционала (46) в изопериметрической задаче (46)–(48), а остальные постоянные l_i те же, что и в изопериметрических условиях (48). Нетрудно показать, что экстремали данной задачи и исходной вариационной задачи (46)–(48) совпадают при любом выборе s ($s = 1, \ldots, m$). Это свойство изопериметрических задач носит название *принципа взаимности.*

Пример 31 (задача отыскания кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь)**.** Среди всех кривых длины l_0, соединяющих две данные точки M_1 и M_2, найти кривую, ограничивающую вместе с отрезком M_1M_2 наибольшую площадь.

► Пусть $y = y(x)$ – уравнение искомой кривой на плоскости Oxy. Направим ось Ox вдоль отрезка M_1M_2. Примем, что координатами точек M_1, M_2 являются соответственно $(a, 0)$ и $(b, 0)$. Допустимые кривые лежат в полуплоскости $y \geq 0$.

Таким образом, кривая должна доставлять максимум функционалу

$$S[y] = \int\limits_a^b y dx$$

с граничными условиями

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \tag{50}$$

при изопериметрическом условии

$$\int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = l_0. \tag{51}$$

Составим вспомогательный функционал

$$S^{\star\star}[y] = \int\limits_a^b F^{\star\star}(x, y, y') dx, \quad F^{\star\star} = y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2}.$$

Поскольку подынтегральная функция $F^{\star\star}$ не зависит явно от x, то уравнение Эйлера для $S^{\star\star}$ имеет первый интеграл

$$F^{\star\star} - y' F^{\star\star}_{y'} = C_1$$

или

$$y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2} - \lambda \frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1.$$

Отсюда получим

$$y - C_1 = -\lambda \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Введем вспомогательный параметр t, полагая $y' = \operatorname{tg} t$. Тогда

$$y - C_1 = -\lambda \cos t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} t} = \frac{\lambda \sin t dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda \cos t dt \quad \Rightarrow \quad x = \lambda \sin t + C_2.$$

Уравнение экстремалей в параметрической форме имеет вид

$$\begin{cases} x = \lambda \sin t + C_1, \\ y = -\lambda \cos t + C_1 \end{cases}$$

или, исключая t, получим $(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2$ – семейство окружностей. Параметры C_1, C_2, λ определяются из условий (50), (51). ◀

Упражнение 16. Показать, что задача о максимуме площади, ограниченной замкнутой кривой заданной длины, и задача о минимуме длины замкнутой кривой, ограничивающей заданную площадь, взаимны и имеют общие экстремали.

Пример 32. Записать уравнение экстремалей изопериметрической задачи для функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2]dx \tag{52}$$

с граничными условиями

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \tag{53}$$

при изопериметрическом условии

$$\int\limits_a^b \rho(x)y^2 dx = 1, \tag{54}$$

где $p(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $q(x)$ и $\rho(x)$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, причем $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$.

► Вспомогательный функционал имеет вид

$$J^{\star\star}[y] = \int\limits_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + \lambda\rho(x)y^2]dx.$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y - \lambda\rho(x)y = 0 \tag{55}$$

с краевыми условиями (53), очевидно, имеет решение $y(x) = 0$, которое, однако, не удовлетворяет изопериметрическому условию (54). Поэтому экстремали следует определить как решения задачи Штурма–Лиувилля (55), (53). Таким образом, экстремалями рассматриваемой изопериметрической задачи являются ортонормированные с весом $\rho(x)$ собственные функции $y_n(x)$ задачи Штурма–Лиувилля; при этом соответствующие им собственные значения λ_n определяют экстремальные значения функционала $J[y]$.

Действительно, умножив уравнение Эйлера на $y_n(x)$ и проинтегрировав по отрезку $[a, b]$ с учетом изопериметрического условия, найдем

$$\underbrace{p(x)y_n'(x)y_n(x)|_a^b}_{=0} - \int\limits_a^b p(x)(y_n')^2 dx - \int\limits_a^b q(x)y_n^2 dx = \lambda_n \underbrace{\int\limits_a^b \rho(x)y_n^2 dx}_{=1}.$$

Откуда нетрудно видеть, что значение функционала $J[y]$ на полученных экстремалях определяется собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля (55), (53), а именно,

$$J[y_n(x)] = -\lambda_n.$$

◀

Пример 33. Найти экстремаль функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 x(y_1 - y_2)dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(0) = y_2(1) = 0,$$

$$\int\limits_0^1 y_1' y_2' dx = -\frac{4}{5}.$$

▶ Составим функцию

$$F^{\star\star}(x, y, y') = x(y_1 - y_2) + \lambda y_1' y_2'.$$

Запишем систему уравнений Эйлера

$$\frac{\partial F^{\star\star}}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^{\star\star}}{\partial y_1'} = x + \lambda y_2'' = 0,$$

$$\frac{\partial F^{\star\star}}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^{\star\star}}{\partial y_2'} = -x + \lambda y_1'' = 0,$$

$$\int\limits_0^1 y_1' y_2' dx = -\frac{4}{5}.$$

Интегрируя уравнения системы, получим

$$y_1(x) = \frac{1}{6\lambda}x^3 + C_1 x + C_2, \quad y_2(x) = -\frac{1}{6\lambda}x^3 + C_3 x + C_4.$$

Постоянные интегрирования и множитель Лагранжа находим из граничных условий

$$y_1(0) = C_2 = 0, \qquad y_2(0) = C_4 = 0, \tag{56}$$

$$y_1(1) = \frac{1}{6\lambda} + C_1 + C_2 = 2, \qquad y_2(1) = -\frac{1}{6\lambda} + C_3 + C_4 = 0 \tag{57}$$

и изопериметрического условия

$$\int\limits_0^1 y_1' y_2' dx = C_1 C_3 - \frac{1}{20\lambda^2} - C_1 \frac{1}{6\lambda} + C_3 \frac{1}{6\lambda} = -\frac{4}{5}. \qquad (58)$$

Система уравнений (56)–(58) имеет два решения

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{6},$$

и

$$C_1 = 3, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -1, \quad C_4 = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{6}.$$

Выпишем экстремали вариационной задачи:

$$1)\ y_1(x) = x^3 + x, \quad y_2(x) = -x^3 + x,$$
$$2)\ y_1(x) = -x^3 + 3x, \quad y_2(x) = x^3 - x.$$

◀

8 Задача Больца

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx + f(y(a), y(b)), \tag{59}$$

определенный на множестве функций $y(x)$ из пространства непрерывно дифференцируемых функций $C^1[a, b]$. Функционал (59) помимо интегрального члена содержит также терминальный член (или просто терминант), определяемый функцией $f(\xi, \eta)$, где $\xi = y(a)$, $\eta = y(b)$. Функционал (59) называют *функционалом Больца.*

Задача нахождения слабого локального экстремума функционала (59) называется *элементарной задачей Больца.*

Теорема 10 (необходимое условие экстремума в задаче Больца)**.** *Пусть*

1) *функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу Больца* (59) *и дважды непрерывно дифференцируема;*

2) *функция $F(x, y, y')$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно;*

3) *функция $f(\xi, \eta)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка.*

Тогда функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

и условиям трансверсальности на левом и правом концах

$$F_{y'}|_{x=a} = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad F_{y'}|_{x=b} = -\frac{\partial f}{\partial \eta}, \tag{60}$$

где $\xi = y(a)$, $\eta = y(b)$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ – функция, доставляющая экстремум функционалу в задаче Больца. Построим вариацию функционала (59). С этой целью рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\delta y(x), \quad \delta y(x) \in C^1[a, b].$$

Функционал (59) на кривых этого семейства превращается в функцию

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_a^b F(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx + f(y(a) + \alpha\delta y(a), y(b) + \alpha\delta y(b)),$$

достигающую экстремума при $\alpha = 0$. Следовательно,

$$\delta J[y, \delta y] = \Phi'(0) = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Найдем производную функции $\Phi(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$:

$$\Phi'(0) = \int\limits_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\, dx + \frac{\partial f}{\partial \xi}\delta y(a) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\delta y(b).$$

Проинтегрируем по частям второе слагаемое в подынтегральном выражении, учитывая, что в общем случае $\delta y(a) \neq 0$, $\delta y(b) \neq 0$. Тогда вариация функционала определяется соотношением

$$\int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right) \delta y\, dx + [F_{y'}\delta y]\big|_a^b + \frac{\partial f}{\partial \xi}\delta y(a) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\delta y(b) = 0, \qquad (61)$$

которому должна удовлетворять функция $y(x)$ для любых $\delta y(x) \in C^1[a, b]$.

Пусть $\delta y(x)$ обращается в нуль на концах отрезка $[a, b]$, т.е. $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Тогда все терминальные слагаемые в (61) обращаются в нуль. Отсюда в силу леммы Лагранжа следует, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

При этом соотношение (61) принимает вид

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \xi} - F_{y'}\big|_{x=a}\right] \delta y(a) + \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} + F_{y'}\big|_{x=b}\right] \delta y(b) = 0.$$

Рассмотрим последнее тождество на всех $\delta y(x)$ таких, что $\delta y(a) \neq 0$, $\delta y(b) = 0$. Тогда

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \xi} - F_{y'}\big|_{x=a}\right] \delta y(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} = F_{y'}\big|_{x=a}.$$

Аналогично для всех $\delta y(x)$ таких, что $\delta y(a) = 0$, $\delta y(b) \neq 0$, должно выполняться

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \eta} + F_{y'}\big|_{x=b}\right] \delta y(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = -\, F_{y'}\big|_{x=b}.$$

Отсюда приходим к условиям трансверсальности (60). □

Если терминальная часть функционала Больца отсутствует, то условия (60) имеют вид

$$F_{y'}\big|_{x=a} = F_{y'}\big|_{x=b} = 0.$$

В ряде задач эти условия означают ортогональность экстремалей функционала граничным вертикалям $x = a$, $x = b$.

Если в задаче Больца один из концов экстремали закреплен, то для такой задачи наряду с уравнением Эйлера с необходимостью выполняются (левое или правое) условие трансверсальности для свободного конца и граничное условие для закрепленного конца.

Пример 34. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} [(y')^2 + y^2 - 4y\cos x]dx + y^2(0) - y(\pi) + y^2(\pi).$$

► Из условий задачи имеем

$$F(x, y, y') = (y')^2 + y^2 - 4y\cos x, \quad f(\xi, \eta) = \xi^2 - \eta + \eta^2.$$

Запишем уравнение Эйлера:

$$y'' - y = -2\cos x.$$

Решение однородного уравнения: $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\tilde{y} = A\sin x + B\cos x$. Подставляя в неоднородное уравнение, найдем значения A и B: $A = 0$, $B = 1$. Общее решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \cos x.$$

Запишем условия трансверсальности:

$$\begin{cases} y'(0) = y(0), \\ 2y'(\pi) = 1 - 2y(\pi). \end{cases}$$

Подставляя в систему общее решение уравнения Эйлера, получим уравнения для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = C_1 + C_2 + 1, \\ 2C_1e^{\pi} - 2C_2e^{-\pi} = 1 - 2C_1e^{\pi} - 2C_2e^{-\pi} + 2. \end{cases}$$

Решая систему, найдем

$$C_1 = \frac{3}{4}e^{-\pi}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, экстремаль функционала имеет вид

$$y(x) = \frac{3}{4}e^{-\pi}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + \cos x.$$

◄

Пример 35. Записать необходимые условия экстремума в задаче Больца для квадратичного функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2r(x)y]dx -$$

$$-\sigma_a y^2(a) + 2g_a y(a) + \sigma_b y^2(b) - 2g_b y(b),$$

где функция $p(x) > 0$ – непрерывно дифференцируемая, а $q(x) \geq 0$ и $r(x)$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции; σ_a, σ_b, g_a, g_b – постоянные величины.

► Из формулировки задачи следует, что

$$F(x, y, y') = p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2r(x)y,$$

$$f(\xi, \eta) = -\sigma_a \xi^2 + 2g_a \xi + \sigma_b \eta^2 - 2g_b \eta, \quad \xi = y(a), \quad \eta = y(b).$$

Запишем уравнение Эйлера для функционала Больца

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y = r(x).$$

Условия трансверсальности для левого и правого конца имеют вид

$$p(a)y'(a) + \sigma_a y(a) = g_a, \quad p(b)y'(b) + \sigma_b y(b) = g_b.$$

Таким образом, уравнение Эйлера и условия трансверсальности определяют краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка. ◄

Функционал Больца, зависящий от нескольких функций

Рассмотрим функционал Больца, определенный на вектор-функциях

$$y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x)), \quad y_k(x) \in C^1[a, b], \quad k = 1, \ldots, n.$$

Тогда интегрант и терминант этого функционала

$$F(x, y, y') = F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n'),$$

$$f(\xi, \eta) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n),$$

где

$$\xi_k = y_k(a), \quad \eta_k = y_k(b), \quad k = 1, \ldots, n,$$

являются функциями $2n + 1$ и $2n$ переменных соответственно.

Необходимые условия существования слабого экстремума данного функционала определяются следующей теоремой.

Теорема 11 (необходимое условие экстремума в задаче Больца для функционалов, зависящих от нескольких функций). *Пусть*

1) *вектор-функция* $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$, *где* $y_k(x) \in C^2[a,b]$, $k = 1, \ldots, n$, *доставляет экстремум функционалу Больца;*

2) *функция* $F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ *непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно;*

3) *функция* $f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ *непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка.*

Тогда функции $y_k(x)$ *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Эйлера*

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y_k'} = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и условиям трансверсальности на левом и правом концах

$$F_{y_k'}\big|_{x=a} = \frac{\partial f}{\partial \xi_k}, \quad F_{y_k'}\big|_{x=b} = -\frac{\partial f}{\partial \eta_k}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $\xi_k = y_k(a)$, $\eta_k = y_k(b)$.

Доказательство теоремы в векторном случае сводится к доказательству аналогичной теоремы 10 для одномерного случая. Действительно, фиксируем у вектор-функции $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ все компоненты кроме $y_i(x)$. Тогда функционал Больца будет зависеть только от одной функции $y_i(x)$. А для одномерного случая необходимые условия экстремума уже доказаны.

Пример 36. Найти экстремаль функционала

$$J[y_1, y_2] = \int_0^1 (y_1' y_2' + y_1 y_2) dx + y_1(1) + y_2(1), \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0.$$

► В соответствии с условиями задачи имеем

$$F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = y_1' y_2' + y_1 y_2,$$

$$f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \eta_1 + \eta_2, \quad \xi_k = y_k(0), \quad \eta_k = y_k(1), \quad k = 1, 2.$$

Запишем систему уравнений Эйлера:

$$y_1'' - y_1 = 0, \quad y_2'' - y_2 = 0.$$

Общее решение данной системы имеет вид

$$y_1(x) = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x, \quad y_2(x) = C_3 \operatorname{sh} x + C_4 \operatorname{ch} x.$$

Запишем условия трансверсальности при $x = 1$:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right|_{x=1} = -\frac{\partial f}{\partial \eta_1} \quad \Rightarrow \quad y_2'(1) + 1 = 0,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right|_{x=1} = -\frac{\partial f}{\partial \eta_2} \quad \Rightarrow \quad y_1'(1) + 1 = 0.$$

Условия трансверсальности совместно с граничными условиями образуют систему уравнений, позволяющую определить постоянные C_1, C_2, C_3, C_4. Действительно,

$$\begin{cases} y_1'(1) + 1 = 0, \\ y_1(0) = 0, \\ y_2'(1) + 1 = 0, \\ y_2(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 \operatorname{ch} 1 + C_2 \operatorname{sh} 1 = -1, \\ C_2 = 0, \\ C_3 \operatorname{ch} 1 + C_4 \operatorname{sh} 1 = -1, \\ C_4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$C_1 = -\frac{1}{\operatorname{ch} 1}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{\operatorname{ch} 1}, \quad C_4 = 0.$$

В результате получаем экстремаль

$$y_1(x) = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} 1}, \quad y_2(x) = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} 1}.$$

◀

Функционал Больца с производными высшего порядка

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})dx + f(y(a), \ldots, y^{(n-1)}(b), y(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)), \tag{62}$$

заданный на множестве функций из пространства $C^n[a, b]$. Функционал (62) содержит терминальный член, определяемый функцией $f(\xi, \xi', \ldots, \xi^{(n-1)}, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)})$, где $\xi = y(a)$, $\eta = y(b)$. Сформулируем необходимое условие экстремума в задаче Больца для случая, когда функционал зависит от производных высшего порядка одной функции.

Теорема 12 (необходимое условие экстремума в задаче Больца для функционалов с производными высшего порядка)**.** *Пусть*

1) *функция* $y(x) \in C^{2n}[a,b]$ *доставляет экстремум функционалу Больца* (62)*;*

2) *функция* $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов* $(n+1)$ *раз;*

3) *функция* $f(\xi, \xi', \ldots, \xi^{(n-1)}, \eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)})$ *непрерывно дифференцируема.*

Тогда функция $y(x)$ *удовлетворяет уравнению Эйлера–Пуассона*

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}\,F_{y''} + \ldots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\,F_{y^{(n)}} = 0.$$

и условиям трансверсальности на левом и правом концах

$$\sum_{m=0}^{n-k-1}(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\,\frac{\partial F}{\partial y^{(n+k+1)}}\bigg|_{x=a} = \frac{\partial f}{\partial \xi^{(k)}}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{m=0}^{n-k-1}(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\,\frac{\partial F}{\partial y^{(n+k+1)}}\bigg|_{x=b} = -\frac{\partial f}{\partial \eta^{(k)}}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

где $\xi = y(a)$, $\eta = y(b)$.

Доказательство теоремы можно найти в работе [18].

9 Ломаные экстремали

Рассмотрим задачу о нахождении экстремума функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx, \tag{63}$$

считая, что допустимые кривые удовлетворяют граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{64}$$

Будем полагать, что подынтегральная функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Может оказаться, что рассматриваемый функционал не обладает экстремумом в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^1[a, b]$. В частности, экстремум может достигаться на кривой, являющейся кусочно-гладкой, т.е. $y(x)$ имеет точки *излома* (точки, в которых производная $y'(x)$ терпит разрыв первого рода). Такую кривую называют *негладкой* (*ломаной*) экстремалью. Известно (см. теорему 5), что излом возможен только в тех точках, где $F_{y'y'}(x, y, y') = 0$.

Решение вариационной задачи (63), (64) будем искать среди функций, принадлежащих пространству $KC^1[a, b]$ и удовлетворяющих граничным условиям (64). Вариационные задачи с такими экстремалями называют *разрывными*. При этом имеется в виду разрыв производной, а не функции, на которой достигается экстремум.

Сформулируем условия, которые позволят определить, существуют ли у данной вариационной задачи экстремали с точками излома.

Пусть допустимая кривая $y(x) \in KC^1[a, b]$ имеет излом в некоторой точке $c \in (a, b)$:

$$y(x) = \begin{cases} y_{ac}(x), & x \in [a, c], \\ y_{cb}(x), & x \in [c, b], \end{cases}, \quad y_{ac}(c) = y_{cb}(c).$$

Представим рассматриваемый функционал в виде суммы двух функционалов

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx = \int\limits_a^c F(x, y, y')dx + \int\limits_c^b F(x, y, y')dx = J_{ac}[y] + J_{cb}[y]$$

и вычислим вариацию для каждого функционала в отдельности. Заметим, что для отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ граничные условия состоят в том, что один конец допустимой кривой закреплен, а другой подвижен. Применяя формулу (32), получаем

$$\delta J_{ac} = \int\limits_a^c \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\, dx + F_{y'}\big|_{x=c-0}\,\delta y_c + [F - y'F_{y'}]\big|_{x=c-0}\,\delta x_c,$$

$$\delta J_{cb} = \int\limits_c^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx - F_{y'}|_{x=c+0}\,\delta y_c - [F - y'F_{y'}]|_{x=c+0}\,\delta x_c.$$

Если имеет место экстремум, то

$$\delta J = \delta J_{ac} + \delta J_{cb} = 0.$$

Поскольку вариации $\delta y(x)$, δy_c и δx_c произвольны, то в соответствии с леммой Лагранжа получаем уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \quad x \in [a, c),$$
$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \quad x \in (c, b],$$

а также условия

$$\begin{aligned} F_{y'}|_{x=c-0} &= F_{y'}|_{x=c+0}\,, \\ [F - y'F_{y'}]|_{x=c-0} &= [F - y'F_{y'}]|_{x=c+0}\,. \end{aligned} \tag{65}$$

Замечание. Если точка излома скользит вдоль гладкой кривой $y = \varphi(x)$, то вместо условий (65) имеем единственное условие

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'}]|_{x=c-0} = [F + (\varphi' - y')F_{y'}]|_{x=c+0}\,.$$

Определение. Условия (65) называют *условиями Вейерштрасса–Эрдмана.*

Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 13 (необходимые условия экстремума для задачи с негладкими экстремалями)**.** *Если на непрерывной функции $y(x)$, непрерывно дифференцируемой на промежутках $[a, c)$ и $(c, b]$, где c – точка разрыва производной, и удовлетворяющей граничным условиям* (64)*, функционал* (63) *достигает экстремума, то она удовлетворяет:*

1) *уравнению Эйлера на каждом из промежутков $[a, c)$ и $(c, b]$;*

2) *условиям Вейерштрасса–Эрдмана* (65)*.*

На каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ экстремаль $y(x)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера, т.е. дифференциальному уравнению второго порядка. Следовательно, при решении этих двух уравнений получаются четыре произвольные постоянные. Для нахождения этих постоянных, а также величины c используют граничные условия (64), условия Вейерштрасса–Эрдмана (65) и условие непрерывности искомой экстремали в точке $x = c$, т.е. условие $y_{ac}(c) = y_{cb}(c)$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию условий Вейерштрасса–Эрдмана. С этой целью фиксируем x и y и будем на одной из координатных осей откладывать значения y', а на другой – значения $F(x, y, y')$. Получим некоторую кривую, изображающую $F(x, y, y')$ как функцию от y'. Тогда первое из условий (65) означает, что касательные к этой кривой в точках $y'(c-0)$ и $y'(c+0)$ параллельны между собой, а второе условие, которое можно переписать в виде

$$F|_{x=c-0} - F|_{x=c+0} = y' F_{y'}|_{x=c+0}^{x=c-0},$$

означает, что эти две касательные не только параллельны, но и совпадают.

Приведем теорему, которая оказывается полезной при исследовании на экстремум функционалов, допускающих ломанные экстремали (см. также [15]).

Теорема 14 (о скруглении углов)**.** *Точные нижние (верхние) грани значений функционала* (63) *на множестве кусочно-гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям* (64)*, и на множестве гладких функций, удовлетворяющих тем же граничным условиям, совпадают, если только функция $F(x, y, y')$ непрерывна.*

Доказательство. В силу того, что всякая гладкая функция одновременно является и кусочно-гладкой, то

$$\inf_{y \in KC^1} J[y] \leq \inf_{y \in C^1} J[y].$$

Пусть

$$\inf_{y \in KC^1} J[y] < \inf_{y \in C^1} J[y].$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется функция $y_\varepsilon(x) \in KC^1[a, b]$ такая, что

$$J[y_\varepsilon] < \inf_{y \in C^1} J[y] - \varepsilon.$$

Скругляя возможные изломы, для любого сколь угодно малого числа δ можно построить гладкую функцию $y_\delta(x)$, отличающуюся от кусочно-гладкой (по метрике $||\cdot||_C$) очень мало и такую, что значение функционала $J[y_\delta]$ будет отличаться от $J[y_\varepsilon]$ не более чем на δ. Но тогда

$$J[y_\delta] < \inf_{y \in C^1} J[y] - (\varepsilon - \delta),$$

что невозможно при $|\delta| < \varepsilon$, так как противоречит определению точной нижней грани. □

Пример 37. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^4 (y')^2 (y' - 2)^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(4) = 4.$$

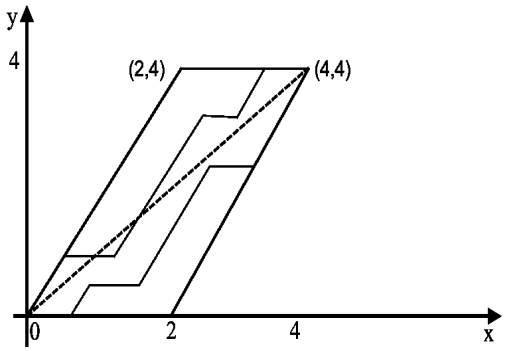

Рис. 12.

► Запишем условия Вейерштрасса-Эрдмана:

$$4y'(y'-2)(y'-1)\big|_{x=x_1-0} = 4y'(y'-2)(y'-1)\big|_{x=x_1+0},$$
$$(y')^2(y'-2)(2-3y')\big|_{x=x_1-0} = (y')^2(y'-2)(2-3y')\big|_{x=x_1+0}.$$

Отсюда следуют варианты:

а) $y'(x_1-0) = y'(x_1+0)$;

б) $y'(x_1-0) = 0$, $y'(x_1+0) = 2$;

в) $y'(x_1-0) = 2$, $y'(x_1+0) = 0$.

Вариант а) соответствует случаю поиска гладких экстремалей. Так как интегрант функционала не зависит от y и x явно, то общее решение уравнения Эйлера имеет вид $y(x) = C_1x + C_2$. Из граничных условий находим $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$. В итоге экстремаль имеет вид $y_0(x) = x$ (на рис. 12 гладкая экстремаль обозначена штриховой линией).

Варианты б) и в) соответствуют случаю экстремалей с изломом в точке x_1. Решение уравнения Эйлера на промежутках $[0, x_1)$ и $(x_1, 4]$ имеет вид

$$y_1(x) = C_1x + C_2, \quad x \in [0, x_1),$$
$$y_2(x) = C_3x + C_4, \quad x \in (x_1, 4].$$

Неизвестные C_1, C_2, C_3, C_4 и x_1 определим из граничных условий, условий Вейерштрасса–Эрдмана и условия непрерывности

$$y_1(x_1) = y_2(x_1).$$

Варианту б) соответствуют условия

$$y_1'(x_1-0) = C_1 = 0, \quad y_2'(x_1+0) = C_3 = 2.$$

Из граничных условий и условия непрерывности получим

$$C_2 = 0, \quad C_4 = -4, \quad x_1 = 2.$$

В результате построена экстремаль (см. рис. 12)

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 2] \\ 2x - 4, & x \in [2, 4]. \end{cases} \tag{66}$$

Варианту в) соответствуют условия:

$$y_1'(x_1 - 0) = C_1 = 2, \quad y_2'(x_1 + 0) = C_3 = 0.$$

Из граничных условий и условия непрерывности получим:

$$C_2 = 0, \quad C_4 = 4, \quad x_1 = 2.$$

В результате построена экстремаль (см. рис. 12)

$$y(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 2] \\ 4, & x \in [2, 4]. \end{cases} \tag{67}$$

Выше мы рассмотрели экстремаль с одной единственной точкой излома. Аналогичным образом можно рассмотреть экстремали с любым конечным числом точек излома. Пример таких экстремалей представлен на рис. 12.

Проанализируем полученный результат. Поскольку подынтегральная функция положительна, то $J[y] \geq 0$, и, следовательно, если на какой-либо кривой функционал $J = 0$, то на этой кривой реализуется абсолютный минимум функционала. Нетрудно видеть, что на ломаных экстремалях, например (66) и (67), функционал $J = 0$, тогда как на гладкой экстремали $y = x$ функционал $J = 4$.

Заметим, что $J = 0$ является точной нижней гранью значений функционала $J[y]$ на множестве гладких кривых, но эта нижняя грань на гладких кривых не достигается, а достигается на кусочно-гладких кривых. ◀

Пример 38. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^2 y^2(1 - y')^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1.$$

▶ Запишем условия Вейерштрасса–Эрдмана:

$$-2y^2(1 - y')\big|_{x=x_1-0} = -2y^2(1 - y')\big|_{x=x_1+0},$$

$$y^2(1 - y')(1 + y')\big|_{x=x_1-0} = y^2(1 - y')(1 + y')\big|_{x=x_1+0}.$$

Отсюда следуют варианты:

а) $y'(x_1-0)=y'(x_1+0)$;

б) $y(x_1-0)=0$, $y'(x_1+0)=1$;

в) $y'(x_1-0)=1$, $y(x_1+0)=0$.

Случай, когда $y'(x_1-0)=y'(x_1+0)$ означает, что функция $y(x)$ дифференцируема, т.е. точка излома отсутствует.

Построим уравнение Эйлера для исследуемого функционала:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \quad\Rightarrow\quad y(1-(y')^2-yy'')=0.$$

Заметим, что частным решением этого дифференциального уравнения является прямая $y(x)=0$. Тогда, предполагая, что $y(x)\neq 0$, получим экстремали функционала

$$1-(y')^2-yy''=0 \quad\Rightarrow\quad y^2-(x+C_1)^2=C_2,$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Нетрудно заметить, что граничные точки будут лежать на разных ветвях гиперболы, а, следовательно, вариационная задача не имеет гладких экстремалей.

Переходим к исследованию ломаных экстремалей функционала. В соответствии с теоремой 5 точка излома может лежать лишь на прямой $y(x)=0$. Действительно,

$$F_{y'y'}=2y^2=0 \quad\Rightarrow\quad y=0.$$

Поскольку прямая $y(x)=0$ является также и экстремалью функционала, то с учетом условий Вейерштрасса–Эрдмана, а также граничных условий вариационной задачи, получим условия на значения производной в точке излома:

$$y'(x_1-0)=0, \quad y'(x_1+0)=1. \tag{68}$$

Решение уравнения Эйлера на промежутках $[0,x_1)$ и $(x_1,2]$:

$$\begin{aligned} &y_1(x)=0, \quad x\in[0,x_1),\\ &y_2(x)=\sqrt{(x+C_1)^2+C_2}, \quad x\in(x_1,2]. \end{aligned}$$

В соответствии с условиями (68) имеем

$$y_2'(x_1+0)=\frac{x_1+C_1}{\sqrt{(x_1+C_1)^2+C_2}}=1 \quad\Rightarrow\quad C_2=0.$$

Оставшиеся неизвестные C_1 и x_1 находим из граничных условий и условия непрерывности экстремали:

$$C_1=-1, \quad x_1=1.$$

В итоге экстремалью с точкой излома на оси Ox будет функция

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \le x \le 1, \\ x - 1 & \text{для } 1 \le x \le 2, \end{cases} \tag{69}$$

которая непрерывна на отрезке $[0, 2]$ и в точке $x = 1$ является недифференцируемой. Функция $y(x)$ принадлежит функциональному пространству $KC^1[0, 2]$.

Заметим, что значение функционала в классе гладких на промежутке $[0, 2]$ функций неотрицательно. Однако гладкой функции, на которой функционал принял бы минимальное значение $J = 0$, не существует. При этом было показано, что экстремум достигается на кусочно-гладкой функции (69) и совпадает с точной нижней гранью значений данного функционала на множестве гладких функций. ◀

Упражнение 17. В среде I свет распространяется с постоянной скоростью v_1, а в среде II – со скоростью v_2. Среда I отделена от среды II кривой $y = \varphi(x)$. Вывести закон отражения луча света, зная, что луч проходит от точки A до точки B за кратчайшее время.

Упражнение 18. Вывести закон отражения луча света, зная, что луч проходит от точки A до точки B, отразившись от линии $y = \varphi(x)$, за кратчайшее время.

Подробное решение этих задач можно найти в работе [14].

10 Вариационные задачи в параметрической форме

До сих пор мы рассматривали функционалы, определенные на кривых, заданных на плоскости уравнениями вида $y = y(x)$. Это означает, что всякая прямая, параллельная оси Oy, пересекает эти кривые не более чем в одной точке. Очевидно, что это ограничивает использование таких функционалов в геометрических приложениях. Во многих задачах более целесообразно, а иногда и единственно возможно, искать решение в параметрической форме. В связи с этим возникает необходимость определить более общую постановку вариационной задачи, в которой функционал определен на кривых, заданных параметрически.

Будем рассматривать множество всевозможных гладких кривых, лежащих в заданной области G плоскости xOy. При этом будем полагать, что на кривых определено направление их обхода. Любую такую кривую можно задать двумя уравнениями:

$$\gamma: \ x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2], \tag{70}$$

где $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными первого порядка, причем обе эти производные не обращаются в нуль одновременно:

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0, \quad t \in [t_1, t_2].$$

При этом t возрастает от значения t_1 до значения t_2, когда точка (x, y) пробегает кривую в заданном направлении обхода.

Следует иметь в виду, что каждая кривая допускает бесчисленное множество таких параметрических представлений. При переходе от параметризации (70) к другой параметризации

$$x = \tilde{x}(\tau), \quad y = \tilde{y}(\tau), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2],$$

посредством преобразования параметра $t = \chi(\tau)$ будем считать, что $\chi(\tau)$ обладает непрерывной производной, причем $\chi'(\tau) > 0$. Тогда, при возрастании параметра, в любой параметризации точка (x, y) пробегает кривые в одном и том же направлении. Такое преобразование параметра допускает обратное преобразование $\tau = \omega(t)$, где функция $\omega(t)$ обладает положительной непрерывной производной.

Рассмотрим функционал от кривой

$$J[\gamma] = \int\limits_{\gamma} \Phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt, \tag{71}$$

где точкой обозначается дифференцирование по параметру, а Φ – заданная функция, трижды непрерывно дифференцируемая, когда точка (x, y) лежит в области G. Однако функция Φ не может быть совершенно произвольной, так как функционал (70) *должен зависеть*

только от кривой γ, а не от ее параметризации. Иначе говоря, функционал не должен меняться при переходе от одной параметризации кривой к другой.

Утверждение 1. *Если подынтегральная функция функционала* (71) *не содержит* t *явно и является положительно однородной функцией первой степени относительно аргументов* $\dot{x}$ *и* $\dot{y}$,

$$\Phi(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad k > 0, \tag{72}$$

то функционал $J[\gamma]$ *зависит лишь от вида кривой* γ, *а не от ее параметрического представления.*

Доказательство. Пусть

$$J[\gamma] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))dt,$$

где

$$\Phi(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad k > 0.$$

Перейдем к другому параметрическому представлению кривой, сделав замену $\tau = \omega(t)$ $(\omega' > 0)$. В силу этой замены имеют место равенства

$$\tilde{x}(\tau) = x(t), \quad \tilde{y}(\tau) = y(t).$$

Тогда

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))dt = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{x}'(\tau)\dot{\omega}(t), \tilde{y}'(\tau)\dot{\omega}(t))\frac{d\tau}{\dot{\omega}(t)},$$

где штрих означает производную по параметру τ. Поскольку функция Φ является однородной относительно второй пары аргументов, то

$$\Phi(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{x}'(\tau)\dot{\omega}(t), \tilde{y}'(\tau)\dot{\omega}(t)) = \dot{\omega}(t)\, \Phi(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{x}'(\tau), \tilde{y}'(\tau)),$$

следовательно,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))dt = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{x}'(\tau), \tilde{y}'(\tau))d\tau.$$

Таким образом, функционал при определенных выше условиях не зависит от выбора параметризации кривой. □

Заметим, что полученные условия не только достаточны, но и необходимы для того, чтобы функционал (71) зависел только от кривой γ (подробнее см. [1]).

Простейшая задача вариационного исчисления для рассматриваемых теперь функционалов состоит в том, чтобы найти экстремум в классе всех тех кривых γ, которые идут из заданной точки (x_1, y_1) в заданную точку (x_2, y_2) (этим устанавливается направление обхода рассматриваемых кривых).

Если кривая

$$\gamma: \ x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

дает функционалу $J[\gamma]$ экстремум, то функции $x(t)$, $y(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}} = 0, \quad \Phi_y - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{y}} = 0. \tag{73}$$

Однако в отличие от системы уравнений Эйлера для функционала, зависящего от двух функций, данные уравнения не являются независимыми. Одно из этих уравнений должно быть следствием другого, так как в случае независимости этих уравнений они определяли бы не только кривую, но и фиксировали бы ее параметризацию, что противоречило бы возможности бесчисленного множества параметризаций кривой. Докажем зависимость уравнений (73).

Для этого прежде всего займемся выводом некоторых следствий из однородности функции Φ. Дифференцируя (72) по k и полагая затем $k = 1$, получим

$$\Phi_{\dot{x}}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\dot{x} + \Phi_{\dot{y}}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\dot{y} = \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}). \tag{74}$$

Дифференцируя (74) по $\dot{x}$ и по $\dot{y}$, получим

$$\dot{x}\Phi_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}\Phi_{\dot{x}\dot{y}} = 0, \quad \dot{x}\Phi_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y}\Phi_{\dot{y}\dot{y}} = 0,$$

что дает

$$\frac{\Phi_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{\Phi_{\dot{x}\dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}} = \frac{\Phi_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2},$$

откуда

$$\Phi_{\dot{x}\dot{x}} = \dot{y}^2\Phi_1, \quad \Phi_{\dot{x}\dot{y}} = -\dot{x}\dot{y}\Phi_1, \quad \Phi_{\dot{y}\dot{y}} = \dot{x}^2\Phi_1, \tag{75}$$

где Φ_1 – общее значение отношений.

Теперь обратимся к уравнениям (73). Из первого уравнения следует

$$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}} = (\dot{x}\Phi_{x\dot{x}} + \dot{y}\Phi_{x\dot{y}}) - (\dot{x}\Phi_{x\dot{x}} + \dot{y}\Phi_{y\dot{x}} + \ddot{x}\Phi_{\dot{x}\dot{x}} + \ddot{y}\Phi_{\dot{x}\dot{y}}) = 0,$$

а с учетом (75) имеем

$$\dot{y}[\Phi_{x\dot{y}} - \Phi_{\dot{x}y} - \Phi_1(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})] = 0. \tag{76}$$

Аналогично, второе из уравнений (73) перепишется в виде

$$\dot{x}[\Phi_{x\dot{y}} - \Phi_{\dot{x}y} - \Phi_1(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})] = 0. \tag{77}$$

Тем самым мы доказали, что одно из уравнений (73) является следствием другого. Поэтому для нахождения экстремалей достаточно взять одно из этих уравнений и проинтегрировать его совместно с уравнением, определяющим выбор параметра.

Так как $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ не могут одновременно обращаться в нуль, то уравнения (76), (77) сводятся к одному уравнению

$$\Phi_{x\dot{y}} - \Phi_{\dot{x}y} - \Phi_1(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) = 0. \tag{78}$$

Определение. Уравнение (78) называют *уравнением Эйлера–Вейерштрасса.*

Упражнение 19. Показать, что уравнение (78) не меняется при изменении параметризации кривой.

Пример 39 (задача Чаплыгина)**.** Определить траекторию в горизонтальной плоскости, по которой должен двигаться центр тяжести самолета, имеющего собственную скорость $\boldsymbol{v}_0$: $|\boldsymbol{v}_0| = v_0 = \text{const}$, чтобы за фиксированное время T облететь территорию максимальной площади, если скорость ветра $\boldsymbol{a}$ постоянна и $|\boldsymbol{a}| = a < v_0$.

► Выберем систему координат таким образом, чтобы ось Ox была направлена вдоль скорости ветра. Пусть искомая траектория задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Скорость самолета равна

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a} = \{v_0 \cos\alpha + a, v_0 \sin\alpha\} = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t)\},$$

где α – угол между вектором $\boldsymbol{v}_0$ и осью Ox.

Задача сводится к отысканию максимума функционала

$$S[x, y] = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (x\dot{y} - y\dot{x})dt$$

с граничными условиями

$$x(0) = x(T) = x_0, \quad y(0) = y(T) = y_0$$

при наличии неголономных связей

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha + a, \quad \dot{y} = v_0 \sin\alpha$$

или, что аналогично,

$$(\dot{x} - a)^2 + \dot{y}^2 - v_0^2 = 0. \tag{79}$$

Здесь (x_0, y_0) – точка, из которой самолет вылетает и в которую возвращается, облетев за фиксированное время T площадь S.

Сформулированная выше вариационная задача является задачей Лагранжа с неголономной связью. В соответствии с методом множителей Лагранжа запишем вспомогательный функционал

$$S^\star[x, y] = \int\limits_0^T \left[\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \lambda(t)((\dot{x} - a)^2 + \dot{y}^2 - v_0^2)\right] dt.$$

Функции $x(t)$, $y(t)$, $\lambda(t)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dot{y} - \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}y + 2\lambda(t)(\dot{x} - a)\right) = 0, \\ -\frac{1}{2}\dot{x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x + 2\lambda(t)\dot{y}\right) = 0, \\ (\dot{x} - a)^2 + \dot{y}^2 - v_0^2 = 0, \end{cases} \tag{80}$$

составленной из системы уравнений Эйлера для вспомогательного функционала $S^\star[x, y]$ и дополненной уравнением связи (79). Интегрируя уравнения Эйлера, получим

$$\begin{cases} y - 2\lambda(t)(\dot{x} - a) = C_1, \\ x + 2\lambda(t)\dot{y} = C_2. \end{cases}$$

Положим $C_1 = C_2 = 0$, что всегда можно сделать, выбрав соответствующим образом начальную точку траектории (x_0, y_0). Исключая функцию $\lambda(t)$ из данной системы, приведем систему (80) к виду

$$\begin{cases} \dot{x} - a = -\frac{y\dot{y}}{x}, \\ (\dot{x} - a)^2 + \dot{y}^2 - v_0^2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение искомой траектории

$$x\frac{dx}{dy} + y = \pm\frac{a}{v_0}\sqrt{x^2 + y^2},$$

которое нетрудно проинтегрировать:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\frac{a}{v_0}y + C.$$

Таким образом, экстремали представляют собой семейство эллипсов с эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{a}{v_0} < 1$, большая ось которых перпендикулярна оси Ox, т.е направлению ветра. ◀

Пример 40 (задача о геодезических линиях)**.** Пусть уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ задает некоторую поверхность в трехмерном пространстве, на которой фиксированы две точки. Определить кривую наименьшей длины, соединяющую эти точки и лежащую на данной поверхности.

► Пусть на гладкой поверхности $\Phi(x, y, z) = 0$ фиксированы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Среди всех гладких кривых

$$\gamma: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

лежащих на заданной поверхности и соединяющих точки A и B, необходимо выбрать кривую наименьшей длины. Искомая кривая является экстремалью функционала

$$l[\gamma] = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} x(a) = x_1, \quad y(a) = y_1, \quad z(a) = z_1, \\ x(b) = x_2, \quad y(b) = y_2, \quad z(b) = z_2 \end{aligned} \tag{81}$$

и уравнением связи

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

В соответствии с методом множителей Лагранжа запишем вспомогательный функционал

$$l^\star[x, y, z] = \int\limits_a^b \left[\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \lambda(t)\Phi(x, y, z)\right] dt.$$

Тогда функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и $\lambda(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda(t)\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0, \\ \lambda(t)\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0, \\ \lambda(t)\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{82}$$

Если в качестве параметра t на кривой γ выбрать длину дуги кривой, то необходимо потребовать, чтобы функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ подчинялись условию

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1. \tag{83}$$

В результате дифференциальные уравнения из системы (82) можно переписать в виде

$$\ddot{x} - \lambda(t)\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \ddot{y} - \lambda(t)\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \ddot{z} - \lambda(t)\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \tag{84}$$

а граничные условия (81) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x(0) = x_1, \quad y(0) = y_1, \quad z(0) = z_1, \\ x(l) = x_2, \quad y(l) = y_2, \quad z(l) = z_2, \end{aligned} \tag{85}$$

где l – длина кривой между точками A и B, $t \in [0, l]$. Совокупность условий (85) и (83) позволяет определить постоянные интегрирования в общем решении системы (84). ◀

Упражнение 20. На поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ найти кривую наименьшей длины, соединяющую точки $(a, 0, 0)$ и $(0, a, h)$.

11 Необходимые и достаточные условия второго порядка

11.1 Вторая вариация функционала

Определение. Отображение $J : E \times E \to \mathbb{R}$, которое каждой паре y и z элементов линейного нормированного пространства E ставит в соответствие действительное число $J[y, z]$, называют *билинейным функционалом*, если это отображение линейно по каждому аргументу.

Из определения следует, что для любых значений аргументов функционала $J[y, z]$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$J[\alpha y_1 + \beta y_2, z] = \alpha J[y_1, z] + \beta J[y_2, z],$$
$$J[y, \alpha z_1 + \beta z_2] = \alpha J[y, z_1] + \beta J[y, z_2].$$

Определение. Функционал $Q[y]$ называется *квадратичным*, если найдется билинейный функционал $J[y, z]$ такой, что $Q[y] = J[y, y]$.

Различные билинейные функционалы могут порождать один и тот же квадратичный функционал.

Перечислим некоторые свойства квадратичных функционалов, которые нам понадобятся в дальнейшем:

1) $Q[\lambda y] = \lambda^2 Q[y]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall y \in E$;

2) $\exists M > 0$: $|Q[y]| \leq M\|y\|^2$, $\forall y \in E$.

Определение. Квадратичный функционал $Q[y]$ называется *положительно определенным*, если $Q[y] > 0$ для всех y, $y \neq \theta$, и *неотрицательно определенным*, если $Q[y] \geq 0$ для всех y, $y \neq \theta$.

Определение. Квадратичный функционал $Q[y]$ называется *сильно положительным*, если существует такое постоянное $k > 0$, что для всех y выполнено неравенство $Q[y] \geq k\|y\|^2$.

Пример 41. Рассмотрим примеры квадратичных функционалов.

1) Функционал вида

$$J[y, z] = \int_a^b A(x)y(x)z(x)dx,$$

где $A(x)$ – фиксированная функция, представляет собой билинейный функционал в пространстве $C[a, b]$. При $y = z$ получим соответствующий квадратичный функционал

$$Q[y] = J[y, y] = \int_a^b A(x)y^2(x)dx.$$

Причем, если $A(x) > 0$ при всех $x \in [a, b]$, то этот квадратичный функционал будет положительно определенным.

2) Квадратичный интегральный функционал

$$Q[y] = \int\limits_a^b [p(x)(y')^2 + 2r(x)y'y + q(x)y^2]dx, \quad y(x) \in C^1[a, b].$$

3) Квадратичный терминальный функционал

$$Q[y] = \alpha y^2(a) + \beta y(a)y(b) + \gamma y^2(b), \quad y(x) \in C[a, b].$$

Пусть $J[y]$ – функционал, определенный в некотором линейном нормированном пространстве E.

Определение. Функционал $J[y]$ называется *дважды дифференцируемым* в точке y_0, если его приращение $\Delta J[y_0] = J[y_0 + \delta y] - J[y_0]$ представимо в виде

$$\Delta J[y_0] = L[y_0, \delta y] + \frac{1}{2}Q[y_0, \delta y] + r[y_0, \delta y], \tag{86}$$

где $L[y_0, \delta y]$ – линейный относительно приращения аргумента δy функционал (сильный дифференциал), $Q[y_0, \delta y]$ – квадратичный относительно δy функционал, а $|r[y_0, \delta y]| = o(\|\delta y\|^2)$ при $\|\delta y\| \to 0$. Квадратичный функционал $Q[y_0, \delta y]$ называют *вторым* (*сильным*) *дифференциалом* функционала $J[y]$ в точке y_0 и обозначают $d^2J[y_0, \delta y]$.

Второй дифференциал функционала (если он существует) определяется однозначно.

Соотношение (86) можно представить в виде

$$\Delta J[y_0] = dJ[y_0, \delta y] + \frac{1}{2}d^2J[y_0, \delta y] + \gamma[y_0, \delta y] \cdot \|\delta y\|^2,$$

где $\gamma \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$.

Пусть функция $\Phi(\alpha) = J[y_0 + \alpha\delta y]$, введенная нами ранее при рассмотрении первой вариации функционала, дважды дифференцируема при $\alpha = 0$ для данного y_0 и любой допустимой вариации δy.

Определение. *Второй вариацией* $\delta^2 J[y_0, \delta y]$ *функционала* $J[y]$ в точке y_0 называют вторую производную функции $\Phi(\alpha) = J[y_0 + \alpha\delta y]$ в точке $\alpha = 0$:

$$\delta^2 J[y_0, \delta y] = \frac{d^2}{d\alpha^2} J[y_0 + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}.$$

Заметим, что существование второго дифференциала $d^2J[y_0, \delta y]$ влечет за собой существование второй производной функции $\Phi(\alpha)$ в нуле (второй вариации функционала) и их тождественность.

Пример 42. Рассмотрим интегральный функционал

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx,$$

определенный в функциональном пространстве $C^1[a, b]$. Будем полагать, что функция $F(x, y, y')$ – трижды непрерывно дифференцируема в области $a \le x \le b$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < y' < +\infty$. Покажем, что функционал дважды дифференцируем и найдем его второй дифференциал.

► Запишем приращение функционала на некоторой функции $y(x) \in C^1[a, b]$, соответствующее приращению $\delta y(x)$ аргумента:

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int\limits_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y')dx - \int\limits_a^b F(x, y, y')dx.$$

Применяя к функции $F(x, y + \delta y, y' + \delta y')$ формулу Тейлора, получим

$$\Delta J = \int\limits_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2!} \int\limits_a^b \left[F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y \delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2\right] dx + r[y, \delta y], \quad (87)$$

где

$$r[y, \delta y] = \frac{1}{3!} \int\limits_a^b \left[\bar{F}_{yyy}(\delta y)^3 + 3\bar{F}_{yyy'}(\delta y)^2 \delta y' + 3\bar{F}_{yy'y'}\delta y(\delta y')^2 + \bar{F}_{y'y'y'}(\delta y')^3\right] dx.$$

Здесь черта над производными функции $F(x, y, y')$ означает, что производные взяты в точке $(x, y + \theta\delta y, y' + \theta\delta y')$, $0 < \theta < 1$. Первое слагаемое в выражении (87) представляет собой линейный относительно δy функционал, т.е. сильный дифференциал или первую вариацию функционала (см. теорему 1). Второе слагаемое – квадратичный относительно δy функционал. Поскольку все производные третьего порядка

функции $F(x, y, y')$ ограничены в своей области определения, то для третьего слагаемого в выражении (87) справедлива оценка

$$|r[y, \delta y]| \leq \frac{1}{3!} M(b-a)\|\delta y\|_{C^1}^3 = o(\|\delta y\|_{C^1}^2), \quad \|\delta y\|_{C^1} \to 0.$$

Здесь

$$M = \max_{a \leq x \leq b} \left\{ |\bar{F}_{yyy}|, |\bar{F}_{yyy'}|, |\bar{F}_{yy'y'}|, |\bar{F}_{y'y'y'}| \right\}.$$

Таким образом, приращение функционала представимо в виде (86). Это означает, что функционал $J[y]$ является дважды дифференцируемым в пространстве $C^1[a, b]$ при условии, что подынтегральная функция $F(x, y, y')$ обладает непрерывными производными до третьего порядка включительно. При этом квадратичный функционал в приращении (87) определяет второй дифференциал функционала $J[y]$:

$$d^2 J[y, \delta y] = \int_a^b \left[F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'}\delta y \delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2 \right] dx. \tag{88}$$

◀

Пример 43. Пусть задан функционал

$$J[y] = \int_0^1 [xy^2 + (y')^3] dx, \quad y(x) \in C^1[0, 1].$$

Показать, что функционал является дважды дифференцируемым и найти его вторую вариацию.

▶ Запишем приращение функционала на функции $y(x) \in C^1[0, 1]$:

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] =$$
$$= \int_0^1 [2xy\delta y + 3(y')^2 \delta y'] dx + \int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2] dx + \int_0^1 (\delta y')^3 dx. \tag{89}$$

Первое слагаемое в выражении (89) есть линейный, а второе – квадратичный относительно $\delta y(x)$ функционал. Для третьего слагаемого справедлива оценка

$$\left| \int_0^1 (\delta y')^3 dx \right| \leq \{\max |\delta y'|\}^3 \leq \|\delta y\|_{C^1}^3 = o(\|\delta y\|_{C^1}^2), \quad \|\delta y\|_{C^1} \to 0.$$

Тогда, согласно определению, данный функционал дважды дифференцируем. Вторая вариация функционала существует и тождественно равна второму дифференциалу:

$$\delta^2 J[y, \delta y] = 2 \int\limits_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2] dx.$$

◀

Теорема 15 (необходимое условие экстремума второго порядка)**.** *Если функционал $J[y]$ в точке y_0 дважды дифференцируем и имеет минимум (максимум), то*

$$\delta^2 J[y_0, \delta y] \geq 0 \quad \left(\delta^2 J[y_0, \delta y] \leq 0\right) \tag{90}$$

для всех допустимых δy.

Доказательство. Пусть y_0 – точка минимума функционала, т.е. первая вариация функционала в этой точке равна нулю при любых допустимых δy. Допустим, что существует приращение η, при котором $\delta^2 J[y_0, \eta] < 0$. Положим $\delta y = \alpha\eta$. Тогда в силу двукратной дифференцируемости функционала в точке y_0 получим

$$\Delta J[y_0] = \frac{1}{2}\delta^2 J[y_0, \alpha\eta] + \gamma \cdot \|\alpha\eta\|^2 = \alpha^2 \left\{\frac{1}{2}\delta^2 J[y_0, \eta] + \gamma \cdot \|\eta\|^2\right\}.$$

Так как $\gamma \to 0$ при $\alpha \to 0$, то при достаточно малых α выполняется неравенство

$$|\gamma| < \frac{|\delta^2 J[y_0, \eta]|}{2\|\eta\|^2}.$$

Отсюда в силу исходного допущения ($\delta^2 J[y_0, \eta] < 0$) имеем $\Delta J[y_0] < 0$, что противоречит тому, что y_0 – точка минимума функционала. □

Знакопостоянство второй вариации функционала необходимо, но не достаточно для того, чтобы функционал $J[y]$ достигал на данной кривой экстремума.

Пример 44. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int\limits_0^1 y^2(x - y) dx,$$

определенный на пространстве $C[0, 1]$. Покажем, что знакопостоянство второй вариации функционала в стационарной точке $y_0 = 0$ не достаточно для существования экстремума функционала в этой точке.

► Вторая вариация функционала в точке $y_0 = 0$ положительна:

$$\delta^2 J[y_0, \delta y] = \int\limits_0^1 2x(\delta y)^2 dx > 0$$

для всех $\delta y(x) \neq 0$. Можно было бы предположить, что функционал $J[y]$ в точке $y_0 = 0$ достигает минимума. Однако в любой окрестности этой точки функционал $J[y]$ принимает не только положительные, но и отрицательные значения. Действительно, рассмотрим функцию

$$y_\varepsilon(x) = \begin{cases} -x + \varepsilon, & 0 \leq x < \varepsilon, \\ 0, & x \geq \varepsilon, \end{cases}$$

где ε – некоторое положительное число. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$J[y_\varepsilon] = -\frac{\varepsilon^4}{6} < 0.$$

◄

Теорема 16 (достаточное условие экстремума)**.** *Пусть функционал $J[y]$ дважды дифференцируем в точке y_0. Если в этой точке первая вариация обращается в нуль, $\delta J[y_0, \delta y] = 0$, а вторая вариация сильно положительна (отрицательна), т.е. для всех допустимых δy при некотором $k > 0$ выполняется условие*

$$\delta^2 J[y_0, \delta y] \geq k\|\delta y\|^2 \quad \left(\delta^2 J[y_0, \delta y] \leq -k\|\delta y\|^2\right),$$

то функционал $J[y]$ в точке y_0 имеет локальный минимум (максимум).

Доказательство. Докажем теорему для случая минимума. Пусть в точке y_0 первая вариация функционала равна нулю, $\delta J[y_0, \delta y] = 0$, а вторая вариация $\delta^2 J[y_0, \delta y]$ сильно положительна. Рассмотрим приращение функционала в этой точке

$$\Delta J[y_0] = \frac{1}{2}\,\delta^2 J[y_0, \delta y] + \gamma[y_0, \delta y] \cdot \|\delta y\|^2 \geq \left(\frac{1}{2}\,k + \gamma[y_0, \delta y]\right)\|\delta y\|^2.$$

Так как $\gamma \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$, то при достаточно малых $\|\delta y\|$ можно полагать $|\gamma| < k/2$ и, следовательно, $\Delta J[y_0] > 0$. Тогда в точке y_0 функционал имеет минимум. □

Нашей задачей будет найти достаточные условия сильной положительности (отрицательности) второй вариации функционала.

11.2 Необходимые условия слабого и сильного экстремума

Известно, что экстремали (решения уравнения Эйлера) не всегда доставляют экстремум функционалу, так как уравнение Эйлера представляет собой только необходимое условие экстремума.

Приводимые ниже необходимые условия минимума или максимума функционала позволяют в определенных случаях исключить такие экстремали, которые не дают экстремума функционалу.

Рассмотрим простейшую вариационную задачу для функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx, \tag{91}$$

определенного на множестве непрерывно дифференцируемых функций $y(x) \in C^1[a, b]$ с граничными условиями

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{92}$$

Будем полагать, что подынтегральная функция $F(x, y, y')$ есть трижды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных.

Вторая вариация функционала (91) определяется выражением (88). Приведем это выражение к более удобному виду. Проинтегрировав по частям второе слагаемое в выражении (88) и учитывая, что вариация функции $\delta y(x)$ для данного функционала удовлетворяет однородным краевым условиям $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, получим

$$\int\limits_a^b 2F_{yy'}\delta y\delta y'dx = \int\limits_a^b F_{yy'}d(\delta y)^2 =$$

$$= \left[F_{yy'}(\delta y)^2\right]\Big|_a^b - \int\limits_a^b \left[\frac{d}{dx}F_{yy'}\right](\delta y)^2dx = -\int\limits_a^b \left[\frac{d}{dx}F_{yy'}\right](\delta y)^2dx.$$

Следовательно, формулу (88) можно переписать в виде

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int\limits_a^b \left[\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)(\delta y)^2 + F_{y'y'}(\delta y')^2\right] dx.$$

Пусть функция $y_0(x)$ есть экстремаль функционала (91). Вторая вариация функционала на экстремали $y_0(x)$ определяется квадратичным функционалом

$$\delta^2 J[y_0, u] = \int\limits_a^b \left[\hat{P}(x)(u')^2 + \hat{Q}(x)u^2\right] dx, \tag{93}$$

заданным на множестве непрерывно дифференцируемых функций $u = u(x)$, удовлетворяющих условиям

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Здесь

$$\hat{Q}(x) = \hat{F}_{yy}(x) - \frac{d}{dx}\hat{F}_{yy'}(x) = F_{yy}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x)),$$

$$\hat{P}(x) = \hat{F}_{y'y'}(x) = F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)).$$

В соответствии с теоремой 15 неравенство

$$\delta^2 J[y_0, u] \geq 0 \quad (\delta^2 J[y_0, u] \leq 0)$$

есть необходимое условие минимума (максимума) функционала (91).

Определим условия неотрицательности (неположительности) квадратичного функционала (93).

1. Условие Лежандра

Квадратичный функционал (93) рассматривается для функций $u(x)$, удовлетворяющих, в частности, условию $u(a) = 0$. При этом условии, если мала производная $u'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то мала на этом отрезке и сама функция $u(x)$. Действительно,

$$u(x) = \int_a^x u'(x)dx, \quad x \in [a, b]$$

откуда в силу теоремы об оценке интеграла имеем

$$|u(x)| \leq \int_a^x |u'(x)|dx \leq (b - a) \max_{x \in [a,b]} |u'(x)|.$$

Обратное неверно: можно построить такую функцию $u(x)$, что она сама мала, а ее производная $u'(x)$ велика. Отсюда следует, что в квадратичном функционале (93) первое слагаемое играет основную роль, т.е. оно может быть намного больше второго слагаемого, но не может быть намного меньше его (при $\hat{P}(x) \neq 0$). Поэтому от коэффициента $\hat{P}(x)$ в первую очередь зависит, будет ли функционал (93) принимать значения только одного знака или разных.

Теорема 17 (необходимое условие Лежандра слабого экстремума). *Пусть функция $F(x, y, y')$ трижды непрерывно дифференцируема. Если экстремаль $y_0(x) \in C^2[a, b]$ доставляет слабый локальный минимум (максимум) в простейшей задаче* (91), (92), *то вдоль этой кривой выполняется условие*

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0 \quad (F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \leq 0)\,, \quad \forall x \in [a, b].$$

Доказательство. Пусть кривая $y_0(x)$ доставляет минимум функционалу $J[y]$. Тогда в силу теоремы 15 вторая вариация функционала

$$\delta^2 J[y_0, u] = \int\limits_a^b \left[\hat{P}(x)(u')^2 + \hat{Q}(x)u^2\right] dx \geq 0$$

для всех допустимых $u(x)$.

Предположим, что существует точка $x_0 \in [a, b]$, такая что $\hat{P}(x_0) < 0$. Тогда в силу непрерывности $\hat{P}(x)$ это неравенство справедливо и в некоторой окрестности точки x_0. Покажем, что в этом случае функционал $\delta^2 J[y_0, u]$ примет при соответствующем выборе $u(x)$ отрицательное значение.

В качестве $u(x)$ возьмем, например, функцию

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{\sigma}\sin^2\left[\frac{\pi}{2\sigma}(x - x_0 + \sigma)\right], & |x - x_0| < \sigma, \\ 0, & |x - x_0| \geq \sigma. \end{cases}$$

Производная этой функции имеет вид

$$u'(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{\sigma}}\sin\left[\frac{\pi}{\sigma}(x - x_0 + \sigma)\right], & |x - x_0| < \sigma, \\ 0, & |x - x_0| \geq \sigma. \end{cases}$$

Заметим, что при малых σ значение u^2 мало, а $(u')^2$ – наоборот, велико. Тогда основной вклад в интеграл, определяющий квадратичный функционал $\delta^2 J[y_0, u]$, будет вносить слагаемое $\hat{P}(x)(u')^2$. Поэтому в силу того, что $\hat{P}(x) < 0$ в некоторой окрестности точки $x_0 \in [a, b]$, вторая вариация функционала $\delta^2 J[y_0, u] < 0$ при указанной выше функции $u(x)$ и достаточно малом σ. Получаем противоречие, которое и доказывают теорему. □

Определение. Говорят, что на экстремали $y_0(x)$ выполнено *условие Лежандра*, если

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0 \quad [F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \leq 0]\,, \quad \forall x \in [a, b],$$

и *усиленное условие Лежандра*, если

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0 \quad [F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) < 0]\,, \quad \forall x \in [a, b].$$

Доказанное выше условие Лежандра не является достаточным условием экстремума. Ниже мы покажем, что усиленное условие Лежандра в сочетании с другим условием, называемым условием Якоби, будут достаточными условиями экстремума функционала $J[y]$.

Пример 45. Проверить выполнение условия Лежандра для функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y')^2 - 13\sqrt{1 + (y')^2}]dx$$

на экстремали, проходящей через точки $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$.

► Заметим, что подынтегральное выражение зависит лишь от y'. Вследствие этого экстремалями данной вариационной задачи являются прямые $y = C_1x + C_2$. При учете граничных условий получается $y_0(x) = x$ – допустимая экстремаль.

Условие Лежандра имеет вид

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \left[2 - \frac{13}{(1 + (y')^2)^{3/2}}\right]\Bigg|_{y_0=x} < 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

Таким образом, выполняется усиленное условие Лежандра, определяющее необходимое условие максимума для заданного функционала. Кроме того, можно сделать вывод, что слабого (а значит, и сильного) локального минимума не существует. ◄

2. Условие Якоби

Определение. Уравнение Эйлера для квадратичного функционала (93), т.е. уравнение

$$-\frac{d}{dx}(\hat{P}u') + \hat{Q}u = 0 \tag{94}$$

или

$$-\frac{d}{dx}(\hat{F}_{y'y'}u') + \left(\hat{F}_{yy} - \frac{d}{dx}\hat{F}_{yy'}\right)u = 0$$

называется *уравнением Якоби* исходного функционала (91) на экстремали $y_0(x)$.

Уравнение Якоби – линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Уравнению (94) и граничным условиям

$$u(a) = u(b) = 0$$

удовлетворяет, как нетрудно заметить, функция $u(x) = 0$. Однако уравнение Якоби может иметь и другие решения, удовлетворяющие тем же самым граничным условиям.

Пусть на экстремали $y_0(x)$ выполнено усиленное условие Лежандра.

Определение. Точка $\tilde{a}$ называется *сопряженной* с точкой $x = a$, если уравнение Якоби имеет решение, не равное нулю тождественно, обращающееся в нуль при $x = a$ и при $x = \tilde{a}$.

Замечание.

1. Все нетривиальные решения уравнения (94), удовлетворяющие условию $u(a) = 0$, отличаются друг от друга лишь постоянным множителем и, следовательно, обращаются в нуль одновременно. Поэтому мы можем для определенности наложить на $u(x)$ некоторое условие нормировки, например $u'(a) = 1$ (если $u(x) \neq 0$ и $u(a) = 0$, то обязательно $u'(a) \neq 0$).

2. Если $u(x)$ имеет справа от $x = a$ несколько корней, то за $\tilde{a}$ примем наименьший из них. Если же $u(x)$ справа от $x = a$ не обращается в нуль, то положим $\tilde{a} = \infty$.

Теорема 18 (необходимое условие Якоби слабого экстремума)**.** *Пусть функция $F(x, y, y')$ трижды непрерывно дифференцируема. Если экстремаль $y_0(x) \in C^2[a, b]$ доставляет слабый локальный минимум (максимум) в простейшей задаче* (91), (92) *и при этом на кривой $y_0(x)$ выполнено усиленное условие Лежандра, то интервал (a, b) не содержит точек, сопряженных с $x = a$.*

Доказательство. Пусть экстремаль $y_0(x)$ доставляет минимум функционалу $J[y]$. Предположим, что вдоль этой экстремали существует точка $\tau \in (a, b)$, сопряженная с точкой $x = a$, т.е. существует решение уравнения Якоби $\bar{u}(x) \not\equiv 0$, $x \in [a, b]$, такое что $\bar{u}(a) = \bar{u}(\tau) = \bar{u}(b) = 0$. Нетрудно заметить, что

$$\bar{u}'(\tau - 0) \neq 0, \tag{95}$$

так как иначе, в силу теоремы существования и единственности решения линейного дифференциального уравнения, получим тождество $\bar{u}(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$. Построим функцию

$$u(x) = \begin{cases} \bar{u}(x), & x \in [a, \tau], \\ 0, & x \in [\tau, b]. \end{cases} \tag{96}$$

Подсчитаем значение второй вариации функционала $J[y]$ для функции $u(x)$, определяемой формулой (96), вдоль экстремали $y_0(x)$. Обозначим

$$\delta J[y_0, u] = \int\limits_a^b K(x, u(x), u'(x))dx,$$

где

$$K(x, u, u') = F_{yy}(x, y_0, y_0')u^2 + 2F_{yy'}(x, y_0, y_0')uu' + F_{y'y'}(x, y_0, y_0')(u')^2.$$

Учитывая

1) формулу Эйлера для однородной функции $K(x,u,u')$:

$$2K(x,u,u') = u\frac{\partial K}{\partial u} + u'\frac{\partial K}{\partial u'};$$

2) уравнение Якоби, которому удовлетворяет функция $\bar{u}(x)$:

$$\frac{\partial K}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial K}{\partial u'} = 0;$$

3) свойство $\bar{u}(a) = \bar{u}(b) = 0$,

получим

$$\delta^2 J[y_0,u] = \int\limits_a^b K(x,u,u')dx = \int\limits_a^\tau K(x,\bar{u},\bar{u}')dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^\tau \left(\bar{u}\frac{\partial \bar{K}}{\partial u} + \bar{u}'\frac{\partial \bar{K}}{\partial u'}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^\tau \left(\bar{u}\frac{d}{dx}\frac{\partial \bar{K}}{\partial u'} + \bar{u}'\frac{\partial \bar{K}}{\partial u'}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^\tau \frac{d}{dx}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{K}}{\partial u'}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\bar{u}\frac{\partial \bar{K}}{\partial u'}\right]\Bigg|_a^\tau = 0.$$

Таким образом, функция (96) – решение вариационной задачи о минимизации функционала $\delta^2 J[y_0,u]$, определенного на множестве функций $u(x) \in C^1[a,b]$, удовлетворяющих условиям $u(a) = u(b) = 0$.

Соотношение (95) вместе с соотношением $u'(\tau+0) = 0$ означает, что вариация (96) в точке $x = \tau$ имеет излом. Следовательно, при $x = \tau$ должно выполняться условие Вейерштрасса–Эрдмана

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial u'}\bigg|_{x=\tau-0} = \frac{\partial \bar{K}}{\partial u'}\bigg|_{x=\tau+0},$$

которое в более подробной записи имеет вид

$$\begin{aligned}&[F_{yy'}(x,y_0(x),y_0'(x))\bar{u}(x) + F_{y'y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\bar{u}'(x)]|_{x=\tau-0} = \\ &= [F_{yy'}(x,y_0(x),y_0'(x))\bar{u}(x) + F_{y'y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\bar{u}'(x)]|_{x=\tau+0}.\end{aligned} \tag{97}$$

Поскольку $u(\tau-0) = u(\tau+0) = 0$, $u'(\tau+0) = 0$, а также

$$F_{y'y'}(x,y_0(x),y_0'(x)) > 0, \quad \forall x \in [a,b],$$

то из (97) получим равенства $u'(\tau+0) = 0$, $u'(\tau-0) = 0$, противоречащие тому, что τ – точка излома функции (96). $\square$

Определение. Говорят, что на экстремали $y_0(x)$ выполнено *условие Якоби*, если в интервале (a, b) нет точек, сопряженных с $x = a$, и *усиленное условие Якоби*, если в полуинтервале $(a, b]$ нет точек, сопряженных с $x = a$.

Геометрически условие Якоби означает, что существует однопараметрическое семейство экстремалей, включающее в себя допустимую экстремаль $y_0(x)$, выходящих из граничной точки (a, A) и не пересекающихся при $a < x \leq b$ (см. ниже рис. 16), т.е. условия Якоби является достаточным условием включения допустимой экстремали в центральное поле экстремалей с центром в точке (a, A).

Пример 46. Проверить выполнение условия Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{x_1} [(y')^2 + 2yy' - 16y^2]dx,$$

проходящей через точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(x_1, y_1)$.

► Прежде всего заметим, что для данного функционала вторые производные интегранта постоянны:

$$F_{yy}(x, y, y') = -32, \quad F_{yy'}(x, y, y') = 2, \quad F_{y'y'}(x, y, y') = 2.$$

Поэтому условия Лежандра и Якоби могут быть рассмотрены без предварительного поиска экстремалей функционала.

Условие Лежандра выполнено в строгой форме

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 2 > 0, \quad \forall x \in [0, x_1], \quad x_1 > 0.$$

Уравнение Якоби принимает вид

$$u'' + 16u = 0.$$

Решением уравнения Якоби, удовлетворяющим условиям $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, является функция

$$u_0(x) = \frac{1}{4}\sin 4x.$$

Функция $u_0(x)$ обращается в нуль в точках $x = \pi k/4$, где k – целое число, и, следовательно, если $0 < x_1 \leq \pi/4$, то на интервале $0 < x < x_1$ нет точек, сопряженных с точкой $x = 0$, и условие Якоби будет выполнено. Если же $x_1 > \pi/4$, то на интервале $0 < x < x_1$ функция $u_0(x)$ обращается в нуль еще, по крайней мере, в одной точке $x = \pi/4$ и условие Якоби не выполнено. ◄

3. Условие Вейерштрасса

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция.
Функцию

$$\mathcal{E}(x, x') = f(x') - f(x) - f'(x)(x' - x)$$

назовем *функцией Вейерштрасса* функции $f(x)$.

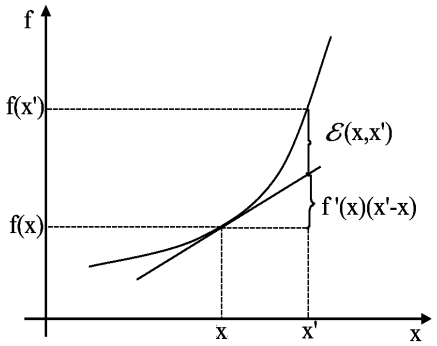

Рис. 13.

Геометрический смысл функции $\mathcal{E}(x, x')$ – разность в точке x' между значением f и значением касательной к графику f в точке x (см. рис. 13). Отсюда ясно, что если f выпукла вниз (выпукла вверх), то $\mathcal{E}(x, x') \geq 0$ ($\mathcal{E}(x, x') \leq 0$). Можно показать, что верно и обратное.

Пусть $F(x, y, y')$ – подынтегральная функция простейшей задачи вариационного исчисления (91), (92).

Функция

$$\mathcal{E}(x, y, y', k) = F(x, y, k) - F(x, y, y') - (k - y')F_{y'}(x, y, y') \qquad (98)$$

называется *функцией Вейерштрасса* функционала (91). Нетрудно видеть, что функция $\mathcal{E}(x, y, y', k)$ есть функция Вейерштрасса функции $y' \to F(x, y, y')$, где x, y играют роль параметров.

Сформулируем необходимое условие Вейерштрасса для простейшей вариационной задачи.

Теорема 19 (необходимое условие Вейерштрасса сильного экстремума)**.** *Пусть функция $F(x, y, y')$ дважды непрерывно дифференцируема. Если экстремаль $y_0(x) \in C^1[a, b]$ доставляет сильный локальный минимум [максимум] в простейшей задаче* (91), (92)*, то вдоль этой кривой для любого числа $k \in \mathbb{R}$ должно выполняться неравенство*

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), k) \geq 0 \quad [\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), k) \leq 0], \quad \forall x \in [a, b].$$

Доказательство. Пусть кривая $y_0(x)$ доставляет функционалу сильный локальный минимум. Рассмотрим приращение функционала на множестве функций, отличающихся от экстремали $y_0(x)$ локально, т.е. в малой окрестности некоторой точки $x_0 \in [a, b]$, параметризовав эти функции специальным образом.

Пусть $\lambda > 0$ – произвольное, сколь угодно малое число, $\xi \in \mathbb{R}$, x_0 – внутренняя точка отрезка $[a, b]$. Выберем λ настолько малым, чтобы промежуток $[x_0 - \lambda, x_0 + \sqrt{\lambda}]$ целиком лежал внутри отрезка $[a, b]$.

Рассмотрим семейство функций $\bar{\eta}_\lambda(x)$, задаваемых равенством

$$\bar{\eta}_\lambda(x) = \begin{cases} \xi\lambda + \xi(x - x_0), & x \in [x_0 - \lambda, x_0], \\ \xi\lambda - \xi\sqrt{\lambda}(x - x_0), & x \in [x_0, x_0 + \sqrt{\lambda}], \\ 0, & x \in [a, x_0 - \lambda) \cup (x_0 + \sqrt{\lambda}, b]. \end{cases}$$

Все $\bar{\eta}_\lambda(x)$ определены на промежутке $[a, b]$ и обращаются в нуль на концах этого промежутка для любых положительных λ и произвольных ξ. Сгладим угловые точки функций $\bar{\eta}_\lambda(x)$ так, чтобы они стали гладкими на отрезке $[a, b]$. Функции $\eta_\lambda(x)$ определим как сглаженные $\bar{\eta}_\lambda(x)$. Функции $\bar{\eta}_\lambda(x)$ и $\eta_\lambda(x)$ называют *игольчатыми вариациями Вейерштрасса.*

Рассмотрим приращение интегрального функционала, доставляемое функциями $\eta_\lambda(x)$ в точке сильного экстремума,

$$\Delta_\eta J[y_0] = J[y_0+\eta_\lambda] - J[y_0] = \int\limits_a^b [F(x, y_0+\eta_\lambda, y_0'+\eta_\lambda') - F(x, y_0, y_0')]dx =$$

$$= \int\limits_{x_0-\lambda}^{x_0} \Delta_\eta F(x, y_0, y_0')dx + \int\limits_{x_0}^{x_0+\sqrt{\lambda}} \Delta_\eta F(x, y_0, y_0')dx,$$

где

$$\Delta_\eta F(x, y_0, y_0') = F(x, y_0 + \eta_\lambda, y_0' + \eta_\lambda') - F(x, y_0, y_0').$$

При $\lambda \to 0$ первый из интегралов с точностью до бесконечно малых порядка, более высокого чем λ, может быть представлен в виде

$$\int\limits_{x_0-\lambda}^{x_0} \Delta_\eta F(x, y_0, y_0')dx = \int\limits_{x_0-\lambda}^{x_0} [F(x, y_0 + \eta_\lambda, y_0' + \xi) - F(x, y_0, y_0')]dx =$$

$$= [F(x, y_0, y_0' + \xi) - F(x, y_0, y_0')]|_{x=x_0} \cdot \lambda + o(\lambda), \quad \lambda \to 0.$$

Рассмотрим второй интеграл. В отличие от первого в нем можно заменить приращение подынтегральной функции дифференциалом, так как приращения аргументов функции малы при малых λ: $\max|\eta_\lambda| = \xi\lambda$, $\max|\eta_\lambda'| = \xi\sqrt{\lambda}$. Тогда, интегрируя второе слагаемое по частям и учитывая, что $y_0(x)$ – экстремаль, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\sqrt{\lambda}} \Delta_\eta F(x, y_0, y_0')dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+\sqrt{\lambda}} [F_y(x, y_0, y_0')\eta_\lambda + F_{y'}(x, y_0, y_0')\eta_\lambda']dx + o(\lambda) =$$

$$= -\eta_\lambda(x_0)F_{y'}(x, y_0, y_0')|_{x=x_0} + o(\lambda) = -\xi F_{y'}(x, y_0, y_0')|_{x=x_0} \cdot \lambda + o(\lambda), \ \lambda \to 0.$$

Объединяя результаты, заключаем, что для любого ξ и сколь угодно маленького положительного λ приращение функционала $J[y]$ представимо с точностью до бесконечно малых порядка более высокого, чем λ, в виде

$$\Delta_\eta J[y_0] = [F(x, y_0, y_0' + \xi) - F(x, y_0, y_0') - \xi F_{y'}(x, y_0, y_0')]|_{x=x_0} \cdot \lambda.$$

Переобозначая выражение $y_0'(x_0) + \xi = k$ и учитывая, что точка x_0 выбрана произвольным образом, получим

$$\Delta_\eta J[y_0] = \mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), k) \cdot \lambda, \quad x \in [a, b], \quad k \in \mathbb{R}.$$

Если принять во внимание, что приращение функционала $J[y]$ на кривой $y_0(x)$, доставляющей сильный локальный минимум, неотрицательно и $\lambda > 0$, то получим утверждение теоремы. □

Определение. Говорят, что на экстремали $y_0(x)$ выполнено *условие Вейерштрасса*, если

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), k) \geq 0 \quad [\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), k) \leq 0], \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Геометрический смысл условия Вейерштрасса на экстремали $y_0(x)$ состоит в том, что для любого фиксированного $x \in [a, b]$ график функции $F(y') = F(x, y_0(x), y')$ как функции от y' лежит выше (ниже) касательной к кривой $F(y')$ в точке $y_0'(x)$. Если функция $F(y')$ выпуклая по y' для любых x, y, то условие Вейерштрасса выполняется на любой экстремали $y_0(x)$.

Пример 47. Проверить выполнение условия Вейерштрасса для экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^a (y')^3 dx,$$

проходящей через точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(a, b)$, $a > 0$, $b > 0$.

► Поскольку интегрант функционала $F(x, y, y') = (y')^3$ не зависит от переменных x и y, то экстремалями функционала являются прямые линии $y = C_1 x + C_2$. Граничным условиям удовлетворяет единственная экстремаль

$$y_0(x) = \frac{b}{a} x.$$

Для функции Вейерштрасса получим

$$\mathcal{E}(x, y_0, y_0', k) = k^3 - \frac{b^3}{a^3} - 3\left(k - \frac{b}{a}\right)\frac{b^2}{a^2} = \left(k - \frac{b}{a}\right)^2 \left(k + 2\frac{b}{a}\right), \quad \frac{b}{a} > 0.$$

Очевидно, что эта функция не для любых значений k знакопостоянна. Отсюда следует, что условие Вейерштрасса не выполняется, поэтому сильный локальный экстремум у функционала отсутствует. ◄

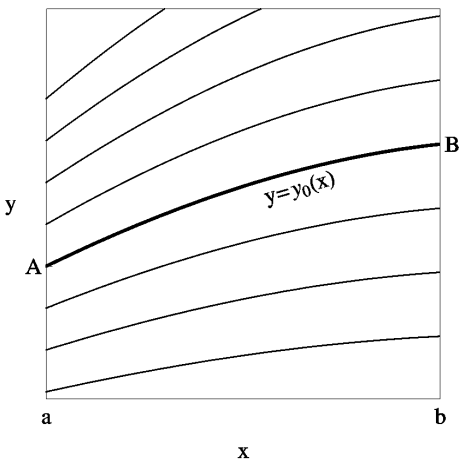

Рис. 14.

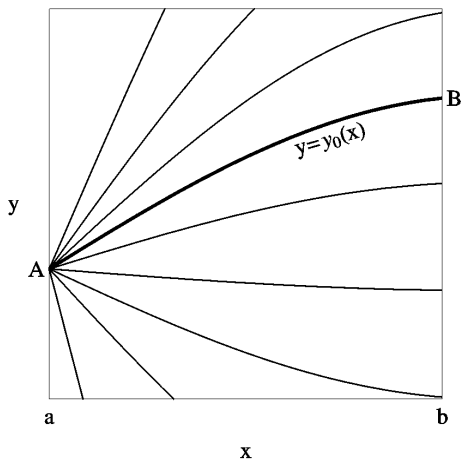

Рис. 15.

11.3 Поле экстремалей

Пусть кривая $y_0(x)$ является допустимой экстремалью простейшей вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Известно, что общее решение уравнения Эйлера как дифференциального уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных и определяет таким образом множество экстремалей данной вариационной задачи. Если в этом множестве оставить зависимость от одного параметра, то можно получить различные однопараметрические семейства экстремалей.

Определение. Семейство кривых $y = y(x, C)$ образует *собственное поле* в заданной области G плоскости xOy, если через каждую точку этой области проходит одна и только одна кривая этого семейства.

Если все кривые семейства $y = y(x, C)$ проходят через некоторую точку (x_0, y_0), т.е. образуют пучок кривых, то они заведомо не образуют собственного поля в области G, если центр пучка принадлежит области G. Однако понятие поля можно расширить.

Определение. Семейство кривых $y = y(x, C)$ образует *центральное поле* в заданной области G плоскости xOy, если эти кривые покрывают без самопересечений всю область G и исходят из одной точки (x_0, y_0), принадлежащей области G. Точка (x_0, y_0) называется *центром пучка* кривых.

Если собственное или центральное поле образовано семейством экстремалей некоторой вариационной задачи, то оно называется *полем*

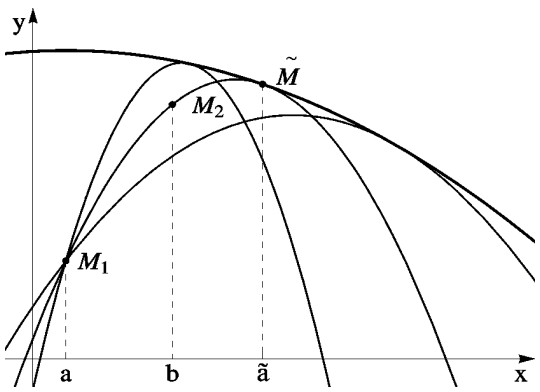

Рис. 16.

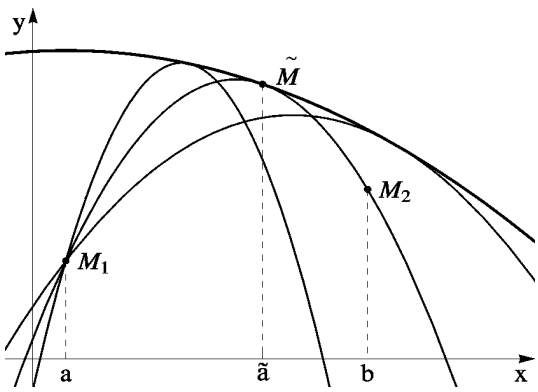

Рис. 17.

экстремалей. Одним из требований, входящих в наиболее распространенные достаточные условия экстремума простейшей вариационной задачи, является возможность включения исследуемой экстремали в поле экстремалей.

Говорят, что экстремаль $y_0(x)$ *включена в собственное поле экстремалей*, если найдено семейство экстремалей $y = y(x, C)$, образующее поле, содержащее при некотором значении $C = C_0$ экстремаль $y_0(x)$, причем эта экстремаль не лежит, за исключением, быть может, точек (a, A) и (b, B), на границе области G, в которой семейство образует поле (рис. 14).

Если пучок экстремалей с центром в точке (a, A) в окрестности экстремали $y_0(x)$, проходящей через ту же точку, образует поле, то говорят, что *найдено центральное поле экстремалей*, включающее данную экстремаль $y_0(x)$. За параметр семейства $y = y(x, C)$ принимается угловой коэффициент касательной к кривым пучка в точке (a, A) (см. рис. 15).

В ряде случаев изучаемую экстремаль можно включить как в собственное, так и в центральное поле.

Поле экстремалей, заданное в области G, позволяет в этой области определить функцию $\xi(x, y)$, значением которой является значение тангенса угла наклона касательной к экстремали в точке (x, y), т.е. $\xi(x, y)$ есть производная той экстремали $y(x)$, значение которой в точке x равно y. Функцию $\xi(x, y)$ называют *функцией наклона поля* экстремалей и определяют по правилу

$$\xi(x, y) = \left[\frac{d}{dx}\, y(x, C)\right]\Bigg|_{C=C(x,y)}.$$

Отметим, что на экстремалях $y = y(x)$ функция наклона поля $\xi(x, y(x)) \equiv y'(x)$ совпадает с производной функции $y(x)$.

Пусть $y = y(x, C)$ – уравнение пучка экстремалей с центром в точке (a, A). Обсудим условия включения экстремали $y_0(x)$ в центральное

поле экстремалей.

Известно, что близкие кривые семейства $y = y(x, C)$ будут пересекаться вблизи C-дискриминантной кривой (огибающей) и, в частности, кривые этого семейства, близкие к рассматриваемой экстремали $y_0(x)$, проходящей через точки $M_1(a, A)$ и $M_2(b, B)$, будут пересекаться в точках, близких к точкам касания кривой $y_0(x)$ с C-дискриминантной кривой. Если дуга M_1M_2 экстремали $y_0(x)$ не имеет отличных от точки M_1 общих точек с C-дискриминантной кривой пучка экстремалей, включающего данную экстремаль, то достаточно близкие к дуге M_1M_2 экстремали пучка не пересекаются, т.е. образуют в окрестности дуги M_1M_2 центральное поле, включающее эту дугу (см. рис. 16).

Если дуга M_1M_2 экстремали $y_0(x)$ имеет отличную от M_1 общую точку $\tilde{M}$ с C-дискриминантной кривой пучка $y = y(x, C)$, то близкие к $y_0(x)$ кривые пучка могут пересекаться между собой и с кривой $y_0(x)$ вблизи точки $\tilde{M}$ и поля не образуют (см. рис. 17). Точка $\tilde{M}$ называется точкой, *сопряженной* с точкой M_1.

Полученный выше результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. *Для того чтобы дугу M_1M_2 экстремали $y_0(x)$ можно было включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $M_1(a, A)$ достаточно, чтобы точка $\tilde{M}$, сопряженная с точкой M_1, не лежала на дуге M_1M_2.*

Нетрудно видеть, что достаточным условием включения экстремали в центральное поле экстремалей с центром в точке (a, A) является условие $\tilde{a} > b$ (усиленное условие Якоби).

Сформулируем теорему о возможности включения экстремали в центральное поле экстремалей.

Теорема 20. *Пусть $y_0(x) \in C^2[a, b]$ – допустимая экстремаль в простейшей задаче вариационного исчисления, функция $F(x, y, y')$ трижды непрерывно дифференцируема, на $y_0(x)$ выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби. Тогда $y_0(x)$ можно окружить центральным полем экстремалей.*

Доказательство теоремы см. в работах [16, 17].

Понятие собственного и центрального поля, а также функции наклона поля почти без изменения переносятся и на случай пространства любого числа измерений.

Определение. Семейство $y_k = y_k(x, C_1, \ldots, C_n)$, $k = 1, \ldots, n$, образует *собственное поле* в области G пространства $x, y_1, \ldots, y_n$, если через каждую точку области G проходит одна и только одна кривая семейства $y_k = y_k(x, C_1, \ldots, C_n)$.

Определение. *Функциями наклона поля* $\xi_k = \xi_k(x, y_1, \ldots, y_n)$, $k = 1, \ldots, n$, называют частные производные от функций $y_k(x, C_1, \ldots, C_n)$ по x, вычисленные в точке $(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Аналогично определяется и центральное поле.

Пример 48. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int\limits_0^a [(y')^2 - y^2]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0, \quad 0 < a < \pi.$$

Проверить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

► Уравнение Эйлера:

$$y'' + y = 0.$$

Общее решение:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Имеется единственная допустимая экстремаль $y_0(x) = 0$.

Поскольку $\hat{F}_{y'y'} = 2 > 0$ для всех $x \in [0, a]$, то выполняется усиленное условие Лежандра.

Уравнение Якоби совпадает с уравнением Эйлера: $u'' + u = 0$. Начальным условиям $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ удовлетворяет функция $u_0(x) = \sin x$. Эта функция не имеет нулей в полуинтервале $(0, a]$. Значит, сопряженных точек нет, а значит, выполнено усиленное условие Якоби. В силу теоремы 20 можно утверждать, что экстремаль $y_0(x) = 0$ может быть включена в центральное поле экстремалей с центром в точке $(0, 0)$.

Из условия прохождения экстремалей через точку $(0, 0)$ получаем $C_1 = 0$. Семейство экстремалей $y(x, C) = C \sin x$ на отрезке $0 \le x \le a$, где $0 < a < \pi$, образуют центральное поле с центром в точке $(0, 0)$, включающее при $C = 0$ экстремаль $y_0(x) = 0$. Функция наклона поля экстремалей запишется в виде

$$\xi(x, y) = \left[\frac{d}{dx}(C \sin x)\right]\Bigg|_{C = y/\sin x} = y \operatorname{ctg} x.$$

Если в данной задаче положить $a \ge \pi$, то семейство экстремалей $y(x, C) = C \sin x$ в этом случае поля уже не образует. ◄

Пример 49. Пусть задан функционал

$$J[y] = \int\limits_{-1}^1 [x^2(y')^2 + 12y^2]dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

Проверить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

► Уравнение Эйлера:

$$x^2y'' + 2xy' - 12y = 0.$$

Общее решение:

$$y(x) = C_1x^3 + C_2x^{-4}.$$

Краевым условиям удовлетворяет экстремаль $y_0(x) = x^3$.

Единственным однопараметрическим семейством экстремалей, содержащим экстремаль $y_0(x)$, является $y(x, C) = Cx^3$. Однако данное семейство не образует поля, так как кривые этого семейства не проходят через точки оси Oy с ординатами, отличными от нуля. Таким образом, допустимая экстремаль $y_0(x)$ не может быть включена в поле экстремалей.

Заметим, что в данном случае $\hat{F}_{y'y'} = 2x^2$ и усиленное условие Лежандра нарушается в точке $x = 0$. ◄

Упражнение 21. Показать, что если подынтегральная функция функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y')dx$$

не содержит явно y, то каждая экстремаль всегда может быть включена в поле экстремалей.

11.4 Достаточные условия сильного и слабого экстремума

Рассмотрим простейшую вариационную задачу для функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx \tag{99}$$

с граничными условиями

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{100}$$

Пусть кривая

$$\gamma_0 : \ y = y_0(x), \quad x \in [a, b],$$

является допустимой экстремалью вариационной задачи (99)–(100), проходящей через точки $M_1(a, A)$ и $M_2(b, B)$. Будем полагать, что экстремаль $y_0(x)$ на отрезке $[a, b]$ может быть *включена в поле экстремалей* (*собственное или центральное*), наклон которого равен $\xi(x, y)$.

Теорема 21 (Гильберт). *Если положить*

$$P(x,y) = F(x,y,\xi(x,y)) - \xi(x,y)F_{y'}(x,y,\xi(x,y)),$$
$$Q(x,y) = F_{y'}(x,y,\xi(x,y)),$$

то выражение $Pdx + Qdy$ *будет (внутри поля) полным дифференциалом.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = F_{y'x}(x,y,\xi) + F_{y'y'}(x,y,\xi)\xi_x,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = F_y(x,y,\xi) + F_{y'}(x,y,\xi)\xi_y - \xi_y F_{y'}(x,y,\xi) - \\ - \xi[F_{y'y}(x,y,\xi) + F_{y'y'}(x,y,\xi)\xi_y],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -F_y(x,y,\xi) + F_{y'x}(x,y,\xi) + F_{y'y}(x,y,\xi)\xi + F_{y'y'}(x,y,\xi)(\xi_x + \xi_y\xi),$$

но вдоль каждой экстремали $y = y(x)$, образующей поле, имеем $\xi(x,y(x)) = y'(x)$ и, следовательно,

$$\xi_x + \xi_y\xi = \xi_x + \xi_y y' = y'',$$

поэтому вдоль упомянутой экстремали

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -F_y(x,y,y') + F_{y'x}(x,y,y') + F_{y'y}(x,y,y')y' + F_{y'y'}(x,y,y')y'' = 0,$$

так как экстремали удовлетворяют уравнению Эйлера. Поскольку образующие экстремали заполняют поле, то всюду внутри поля имеем $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ и, следовательно, внутри поля выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_\gamma Pdx + Qdy =$$
$$= \int\limits_\gamma [F(x,y,\xi(x,y)) - \xi(x,y)F_{y'}(x,y,\xi(x,y))]dx + F_{y'}(x,y,\xi(x,y))dy, \tag{101}$$

где γ – кривая, соединяющая точки M_1 и M_2 и принадлежащая области, в которой определено поле экстремалей. В силу того, что под знаком интеграла стоит полный дифференциал, *значение интеграла не зависит от выбора кривой* γ, а зависит только от точек M_1 и M_2.

Определение. Интеграл (101) называется *инвариантным интегралом Гильберта.*

Если кривая γ в интеграле Гильберта совпадает с экстремалью γ_0, то, учитывая, что вдоль этой экстремали $dy = \xi(x, y(x))dx$, получим равенство

$$\int\limits_{\gamma_0} Pdx + Qdy = \int\limits_{\gamma_0} F(x, y, y')dx = J[\gamma_0].$$

Поскольку интеграл Гильберта не зависит от пути интегрирования, то

$$\int\limits_{\gamma_0} F(x, y, y')dx = \int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy$$

не только при $\gamma = \gamma_0$, но и при любом выборе кривой γ.

Отсюда следует, что функционал (99) может быть представлен в виде интеграла Гильберта, взятого по *любой* кривой, соединяющей концы экстремали M_1 и M_2 и принадлежащей области, в которой определено поле экстремалей.

Теперь займемся выводом достаточных условий экстремума.

Если γ_0 – экстремаль, о которой предполагается, что она доставляет экстремум функционалу $J[y]$ в задаче с закрепленными концами, то для выяснения характера этого экстремума исследуем знак приращения функционала

$$\Delta J[y_0] = J[\gamma] - J[\gamma_0] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx - \int\limits_a^b F(x, y_0(x), y_0'(x))dx,$$

где γ – произвольная кривая, заданная уравнением $y = y(x)$ и удовлетворяющая граничным условиям (100).

Идея метода, который мы собираемся применить, заключается в том, чтобы свести дело к сравнению интегралов от различных выражений *по одной и той же кривой* γ.

Имеет место формула

$$\Delta J[y_0] = \int\limits_{\gamma} F(x, y, y')dx - \int\limits_{\gamma_0} F(x, y, y')dx = \int\limits_{\gamma} F(x, y, y')dx -$$

$$- \int\limits_{\gamma} [F(x, y, \xi(x, y)) - \xi(x, y)F_{y'}(x, y, \xi(x, y))]dx + F_{y'}(x, y, \xi(x, y))dy =$$

$$= \int\limits_{\gamma} \left[F(x, y, y') - F(x, y, \xi(x, y)) - (y' - \xi(x, y))F_{y'}(x, y, \xi(x, y))\right] dx.$$

Функция, определяемая равенством

$$\mathcal{E}(x, y, \xi, y') = F(x, y, y') - F(x, y, \xi) - (y' - \xi)F_{y'}(x, y, \xi),$$

где $\xi = \xi(x, y)$ – функция наклона поля экстремалей, называется *функцией Вейерштрасса* функционала (99) (сравните с формулой (98)). С помощью этой функции приращение функционала можно записать в виде

$$\Delta J[y_0] = \int\limits_a^b \mathcal{E}(x, y(x), \xi(x, y(x)), y'(x))dx,$$

где $y(x) = y_0(x) + \delta y(x)$. Заметим, что на экстремали функция Вейерштрасса равна нулю, так как $\xi(x, y_0(x)) \equiv y_0'(x)$.

Очевидно, что достаточным условием достижения функционалом $J[y]$ экстремума на экстремали $y_0(x)$ будет знакоопределенность функции $\mathcal{E}$ в окрестности экстремали $y_0(x)$. Экстремум будет слабым или сильным в зависимости от того, в слабой или сильной окрестности экстремали $y_0(x)$ сохраняет знак функция Вейерштрасса.

Сформулируем достаточные условия сильного и слабого экстремума для простейшей вариационной задачи (см. работы [1, 3, 5]).

Достаточные условия сильного экстремума

Теорема 22 (достаточное условие Вейерштрасса сильного экстремума). *Функция $y_0(x)$ доставляет сильный экстремум функционалу* (99), *если:*

1) *функция $y_0(x)$ является экстремалью функционала* (99), *удовлетворяющей граничным условиям* (100);

2) *экстремаль $y_0(x)$ может быть включена в поле экстремалей на отрезке $[a, b]$ (в частности, это будет, если выполнено усиленное условие Якоби);*

3) *функция Вейерштрасса $\mathcal{E}(x, y, \xi, y')$ сохраняет знак во всех точках сильной окрестности экстремали $y_0(x)$, т.е. в точках (x, y), близких к экстремали $y_0(x)$, и для произвольных значений y'.*

Если

$$\mathcal{E}(x, y, \xi, y') \geq 0, \quad (\mathcal{E}(x, y, \xi, y') \leq 0)\,,$$

то функционал (99) *имеет на $y_0(x)$ сильный минимум (максимум).*

Исследование знака функции Вейерштрасса часто сопряжено с некоторыми затруднениями. Предположим, что функция $F(x, y, y')$ трижды дифференцируема по y' при любых y'. Тогда условие Вейерштрасса можно заменить легко проверяемым условием Лежандра в случае достаточного условия сильного экстремума или усиленным условием Лежандра – в случае достаточного условия слабого экстремума.

Действительно, разложим функцию $F(x, y, y')$ в ряд Тейлора в точке ξ (по третьему аргументу) с остаточным членом в форме Лагранжа

$$F(x, y, y') = F(x, y, \xi) + (y' - \xi)F_{y'}(x, y, \xi) + \frac{1}{2}(y' - \xi)^2 F_{y'y'}(x, y, q),$$

где $q = \xi + \theta(y' - \xi)$, $0 < \theta < 1$. Тогда функцию Вейерштрасса можно представить в виде

$$\mathcal{E}(x, y, \xi, y') = \frac{1}{2}(y' - \xi)^2 F_{y'y'}(x, y, q). \tag{102}$$

При исследовании на сильный экстремум условие знакопостоянства функции Вейерштрасса $\mathcal{E}(x, y, \xi, y')$ для произвольных значений y' может быть заменено требованием

$$F_{y'y'}(x, y, q) \geq 0 \quad (F_{y'y'}(x, y, q) \leq 0)$$

в точках (x, y), близких к точкам кривой $y_0(x)$, и при произвольных значениях q.

Отсюда как частный случай предыдущей теоремы сформулируем дополнительную теорему, определяющую достаточное условие сильного экстремума.

Теорема 23 (упрощенное достаточное условие сильного экстремума). *Пусть:*

1) *функция $y_0(x)$ является экстремалью функционала* (99), *удовлетворяющей граничным условиям* (100);

2) *функция $F(x, y, y')$ трижды дифференцируема по y' для произвольных значений y';*

3) *экстремаль $y_0(x)$ может быть включена в поле экстремалей на отрезке $[a, b]$ (в частности, это будет, если выполнено усиленное условие Якоби);*

4) *выполнено условие*

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0, \quad [F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \leq 0]$$

во всех точках сильной окрестности экстремали $y_0(x)$, т.е. в точках (x, y), близких к экстремали $y_0(x)$, и для произвольных значений y'.

Тогда $y_0(x)$ доставляет сильный локальный минимум [максимум] функционалу (99).

Достаточные условия слабого экстремума

Теорема 24 (достаточное условие Вейерштрасса слабого экстремума). *Функция $y_0(x)$ доставляет слабый экстремум функционалу* (99), *если:*

1) *функция $y_0(x)$ является экстремалью функционала* (99), *удовлетворяющей граничным условиям* (100);

2) *экстремаль $y_0(x)$ может быть включена в поле экстремалей на отрезке $[a, b]$ (в частности, это будет, если выполнено усиленное условие Якоби);*

3) *функция Вейерштрасса $\mathcal{E}(x, y, \xi, y')$ сохраняет знак во всех точках слабой окрестности экстремали $y_0(x)$, т.е. в точках (x, y), близких к экстремали $y_0(x)$, и для значений y', близких к значениям $\xi(x, y)$ ($\xi(x, y)$ – заданная функция, так как определено поле экстремалей).*

Если

$$\mathcal{E}(x, y, \xi, y') \geq 0, \quad (\mathcal{E}(x, y, \xi, y') \leq 0),$$

то функционал (99) *имеет на $y_0(x)$ слабый минимум (максимум).*

Достаточные условия слабого экстремума также могут быть упрощены в предположении, что функция $F(x, y, y')$ трижды дифференцируема по аргументу y'. В этом случае, согласно (102), функция $\mathcal{E}(x, y, \xi, y')$ сохраняет знак, если сохраняет знак $F_{y'y'}(x, y, q)$. При исследовании на слабый экстремум функция $F_{y'y'}(x, y, q)$ должна сохранять знак для точек (x, y), близких к точкам на исследуемой экстремали $y_0(x)$, и для значений q, близких к наклону поля ξ. Если $F_{y'y'}(x, y, q) \neq 0$ в точках экстремали $y_0(x)$, то в силу непрерывности эта функция сохраняет знак и в точках, близких к кривой $y_0(x)$, и для значений y', близких к значениям y' на кривой $y_0(x)$. Таким образом, как нетрудно видеть, условие знакопостоянства функции Вейерштрасса может быть заменено усиленным условием Лежандра

$$F_{y'y'}(x, y_0, y_0') > 0, \quad (F_{y'y'}(x, y_0, y_0') < 0)$$

на кривой $y_0(x)$.

Таким образом, усиленное условие Лежандра в сочетании с усиленным условием Якоби будут достаточными условиями слабого экстремума функционала (99).

Теорема 25 (упрощенное достаточное условие слабого экстремума)**.** *Пусть:*

1) *функция $y_0(x)$ является экстремалью функционала* (99)*, удовлетворяющей граничным условиям* (100)*;*

2) *на экстремали $y_0(x)$ выполнено усиленное условие Лежандра*

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x) > 0 \quad [F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) < 0], \quad \forall x \in [a, b];$$

3) *на экстремали $y_0(x)$ выполнено усиленное условие Якоби.*

Тогда $y_0(x)$ доставляет слабый локальный минимум [*максимум*] *функционалу* (99).

Сформулируем *достаточные условия отсутствия экстремума*:

1) Если в точках экстремали $y_0(x)$ при произвольных значениях y' функция Вейерштрасса $\mathcal{E}(x, y, \xi, y')$ принимает значения противоположных знаков, то сильный экстремум на $y_0(x)$ не достигается.

2) Если в точках экстремали $y_0(x)$ при значениях y', сколь угодно близких к $\xi(x, y)$, функция Вейерштрасса $\mathcal{E}(x, y, \xi, y')$ имеет значения противоположных знаков, то на $y_0(x)$ не достигается не только сильный, но и слабый экстремум.

Замечание. Так как множество функций, среди которых есть функция, доставляющая сильный экстремум, шире, чем для слабого экстремума, то если функция $y_0(x) \in C^1[a,b]$ доставляет сильный, то она доставляет и слабый экстремум. Поэтому для функций из пространства $C^1[a,b]$ необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного, а достаточное условие сильного экстремума является достаточным условием слабого.

Пример 50. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_0^a (y')^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

► Поскольку подынтегральная функция $F(x,y,y') = (y')^3$ не зависит от x и y явно, то уравнение Эйлера имеет общее решение

$$y(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничным условиям удовлетворяет единственная экстремаль

$$y_0(x) = \frac{b}{a}\, x.$$

Проверим необходимые условия экстремума второго порядка.

Прежде всего проверим условие Лежандра. Поскольку на экстремали $y_0(x)$ вторая производная положительна

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 6y'|_{y=y_0(x)} = 6\frac{b}{a} > 0,$$

то на ней выполнено усиленное условие Лежандра.

Для проверки условия Якоби построим дифференциальное уравнение (уравнение Якоби)

$$u'' = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

Решение данной задачи Коши имеет вид $u(x) = x$. Так как $u(x) \neq 0$ при $x \in (0,a]$ (формально считаем, что сопряженная точка $\tilde{a} = \infty$), то на экстремали $y_0(x)$ выполняется усиленное условие Якоби.

Отсюда следует, что экстремаль $y_0(x)$ может быть включена в центральное поле экстремалей $y(x,C) = Cx$ с центром в точке $(0,0)$, наклон которого $\xi(x,y) = y/x$, или в собственное поле экстремалей $y(x,C) = \frac{b}{a}\, x + C$ с функцией наклона $\xi(x,y) = b/a$.

Проверим достаточное условие сильного экстремума.

Функция Вейерштрасса

$$\mathcal{E}(x,y,\xi,y') = (y')^3 - \xi^3 - 3\xi^2(y'-\xi) = (y'-\xi)^2(y'+2\xi)$$

не сохраняет знак в сильной окрестности экстремали $y_0(x)$, поскольку выражение $(y' + 2\xi)$ при произвольных y' может иметь любой знак (видно, что близость точек (x, y), через которые проходят кривые сравнения, к экстремали $y_0(x)$ в данном случае не существенна, поскольку функция Вейерштрасса не зависит от x и y). Следовательно, условия, достаточные для достижения сильного минимума, не выполнены. Однако это еще не означает, что сильного экстремума не существует, но если принять во внимание, что в данном случае нарушается также и необходимое условие Вейерштрасса (см. пример 47), то можно утверждать, что сильный экстремум на прямой $y_0(x) = \frac{b}{a}x$ не достигается.

Проверим достаточное условие слабого экстремума.

На экстремали $y_0(x) = \frac{b}{a}x$ наклон поля $\xi(x, y) = \frac{b}{a} > 0$, и если y' принимает значения, близкие к $\xi(x, y) = \frac{b}{a}$, то функция Вейерштрасса $\mathcal{E}(x, y, \xi, y') \geq 0$ и, следовательно, все условия, достаточные для достижения слабого минимума, выполнены. Таким образом, на экстремали $y_0(x) = \frac{b}{a}x$ достигается слабый минимум.

Заметим, что поскольку подынтегральная функция трижды дифференцируема по y', то в данном случае можно было бы воспользоваться упрощенным достаточным условием слабого экстремума. В силу того, что на экстремали $y_0(x)$ выполнены усиленное условие Лежандра и Якоби, то в соответствии с теоремой 25 прямая $y_0(x) = \frac{b}{a}x$ реализует слабый минимум функционала. ◀

11.5 Схема исследования функционала на экстремум

Исследование на сильный и слабый экстремум функционала в простейшей задаче классического вариационного исчисления сводится к реализации следующей схемы.

1. Найти допустимые экстремали функционала:

   а) записать необходимое условие экстремума первого порядка – уравнение Эйлера
   $$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0;$$

   б) найти решения уравнения Эйлера (экстремали);

   в) среди полученных экстремалей выбрать те, которые удовлетворяют заданным краевым условиям (допустимые экстремали).

2. Проверить необходимые условия экстремума второго порядка.

   Пусть $y_0(x)$ – допустимая экстремаль данной вариационной задачи.

а) Проверить выполнение условия Лежандра.

Если

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0 \quad [F_{y'y'}(x, y_0(x), y'(x_0)) \leq 0], \quad x \in [a, b],$$

(выполнено условие Лежандра), то это означает, что выполнено необходимое условие слабого (а следовательно, и сильного) минимума [максимума].

Если же величина $F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0(x))$ знакопеременна на отрезке $[a, b]$, то найденная допустимая экстремаль не доставляет ни слабого, ни сильного экстремума.

Если

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0 \quad [F_{y'y'}(x, y_0(x), y'(x_0)) < 0], \quad x \in [a, b],$$

(выполнено усиленное условие Лежандра), то это означает, что выполнено необходимое условие слабого и сильного минимума [максимума]. В этом случае переходим к исследованию условия Якоби.

б) Проверить выполнение условия Якоби.

Выписать уравнение Якоби на экстремали $y_0(x)$:

$$\left(\hat{F}_{yy} - \frac{d}{dx}\hat{F}_{yy'}\right) u - \frac{d}{dx}(\hat{F}_{y'y'}u') = 0$$

и решить его с начальными данными $u(a) = 0$, $u'(a) = 1$.

Найти сопряженные точки $\tilde{a}$, т.е. нули найденного решения $u(x)$ уравнения Якоби при $x > a$.

Если в интервале (a, b) нет точек, сопряженных с a (выполнено условие Якоби), то это означает, что выполнено необходимое условие слабого (а следовательно, и сильного) экстремума.

Если в интервале (a, b) есть сопряженные точки, то это означает, что найденная экстремаль не доставляет функционалу ни слабого, ни сильного экстремума.

Если в полуинтервале $(a, b]$ нет точек, сопряженных с a (выполнено усиленное условие Якоби), то это означает, что выполнено необходимое условие слабого (а следовательно, и сильного) экстремума.

Выполнения усиленных условий Лежандра и Якоби достаточно для включения экстремали в поле экстремалей.

в) Проверить выполнение условия Вейерштрасса.

Если функция Вейерштрасса

$$\mathcal{E}(x, y, y', k) = F(x, y, k) - F(x, y, y') - (k - y')F_{y'}(x, y, y')$$

знакопостоянна вдоль допустимой экстремали $y_0(x)$, т.е.

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), k) \geq 0 \quad [\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), k) \leq 0], \quad x \in [a, b],$$

для любого $k \in \mathbb{R}$ (выполнено условие Вейерштрасса), то это означает, что выполнено необходимое условие сильного минимума [максимума] функционала.

Если функция $\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), k)$ знакопеременна на отрезке $[a, b]$ при любом $k \in \mathbb{R}$, то в этом случае допустимая экстремаль не доставляет сильного экстремума.

3. Проверить достаточные условия экстремума.

Если экстремаль $y_0(x)$ может быть включена в поле экстремалей на отрезке $[a, b]$, то рассматривают выполнение следующих достаточных условий.

а) Проверить выполнение упрощенных достаточных условий.

Пусть функция $F(x, y, y')$ трижды дифференцируема по y' при любых y'. Тогда достаточные условия существования сильного (слабого) экстремума формулируются в наиболее простой форме.

Если в сильной окрестности экстремали $y_0(x)$ выполнено условие

$$F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0, \quad [F_{y'y'}(x, y, y') \leq 0],$$

то экстремаль доставляет сильный локальный минимум [максимум] функционалу.

Если на экстремали $y_0(x)$ выполнено усиленное условие Лежандра

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x) > 0 \quad [F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) < 0], \quad x \in [a, b],$$

то экстремаль доставляет слабый локальный минимум [максимум] функционалу.

Если упрощенное достаточное условие экстремума нарушено, то переходим к проверке достаточного условия Вейерштрасса.

б) Проверить выполнение достаточных условий Вейерштрасса.

Если функция Вейерштрасса

$$\mathcal{E}(x, y, \xi, y') = F(x, y, y') - F(x, y, \xi) - (y' - \xi)F_{y'}(x, y, \xi),$$

где $\xi = \xi(x, y)$ – наклон поля экстремалей функционала, сохраняет знак в слабой (сильной) окрестности экстремали $y_0(x)$, то в зависимости от знака функции $\mathcal{E}(x, y, \xi, y')$ получим слабый (сильный) минимум [максимум].

Если в точках экстремали $y_0(x)$ при произвольных значениях y' функция Вейерштрасса $\mathcal{E}(x, y, \xi, y')$ имеет противоположные знаки, то сильный экстремум на $y_0(x)$ не достигается.

Если в точках экстремали $y_0(x)$ при значениях y', сколь угодно близких к $\xi(x, y)$, функция Вейерштрасса $\mathcal{E}(x, y, \xi, y')$ имеет противоположные знаки, то на $y_0(x)$ не достигается и слабый экстремум.

Пример 51. Исследовать на экстремум функционал

$$\int\limits_0^a [6(y')^2 - (y')^4 + yy']dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

► Найдем экстремаль, удовлетворяющую уравнению Эйлера и краевым условиям. Так как интегрант функционала

$$F(x, y, y') = 6(y')^2 - (y')^4 + yy'$$

не зависит от переменной x явно, то в данном случае можно понизить порядок уравнения Эйлера, построив первый интеграл

$$(y')^2((y')^2 - 2) = C.$$

Разрешая полученное уравнение относительно y' и затем интегрируя, находим общее решение уравнения Эйлера

$$y = C_1 x + C_2.$$

Из краевых условий находим допустимую экстремаль $y_0(x) = \frac{b}{a}\,x$.

Проверим необходимые условия экстремума второго порядка.

Проверим условие Лежандра. Поскольку

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \left[12 - 12(y')^2\right]\Big|_{y=y_0(x)} = 12\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right),$$

то вторая производная на допустимой экстремали принимает постоянное значение, а значит условие Лежандра выполнено. Следовательно, выполнено и необходимое условие Лежандра слабого экстремума. При $a \neq b$ выполнено усиленное условие Лежандра.

Проверим условия Якоби. Полагая $a \neq b$, запишем уравнение Якоби

$$u'' = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

Решением этого уравнения будет функция $u(x) = x$. Так как функция $u(x) = x \neq 0$ при $x \in (0, a]$, то выполняется усиленное условие Якоби. Следовательно, выполнено необходимое условие Якоби слабого экстремума.

Допустимая экстремаль (при $a \neq b$) может быть включена в центральное поле экстремалей $y(x, C) = Cx$ с центром в точке $(0, 0)$ или в собственное поле $y(x, C) = \frac{b}{a}x + C$.

Проверим необходимое условие Вейерштрасса. Запишем функцию Вейерштрасса

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, y, y', k) &= F(x, y, k) - F(x, y, y') - (k - y')F_{y'}(x, y, y') = \\ &= \left[6k^2 - k^4 + yk - 6(y')^2 + (y')^4 - yy' - (k - y')(12y' - 4(y')^3 + y)\right] = \\ &= -(k - y')^2[k^2 + 2y'k + 3(y')^2 - 6].\end{aligned}$$

Вдоль допустимой экстремали $y_0(x)$ функция Вейерштрасса представима в виде

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), k) = -\left(k - \frac{b}{a}\right)^2 \left[k^2 + 2\frac{b}{a}k + 3\frac{b^2}{a^2} - 6\right].$$

Знак функции Вейерштрасса противоположен знаку множителя, заключенного в квадратную скобку. Этот множитель обращается в нуль и может изменить знак лишь при переходе k через значение

$$k_{1,2} = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{6 - 2\frac{b^2}{a^2}}.$$

Если $6 - 2\frac{b^2}{a^2} > 0$ или $\frac{b}{a} < \sqrt{3}$, то квадратный трехчлен имеет два вещественных корня и, следовательно, знак выражения, заключенного в квадратные скобки, зависит от k. Это означает, что функция Вейерштрасса не является знакопостоянной (условие Вейерштрасса нарушено). Следовательно, нарушено необходимое условие Вейерштрасса сильного экстремума, т.е. при $\frac{b}{a} < \sqrt{3}$ на допустимой экстремали $y_0(x)$ сильный экстремум не достигается. Заметим, что сюда же относится случай $a = b$.

Если $6 - 2\frac{b^2}{a^2} \leq 0$ или $\frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$, то при любом k квадратный трехчлен принимает неотрицательные значения, а, значит, $\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), k) \leq 0$ при любых $k \in \mathbb{R}$ (условие Вейерштрасса выполнено). Следовательно, при $\frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$ выполнено необходимое условие Вейерштрасса сильного экстремума.

Проверим достаточные условия сильного экстремума.

Прежде всего заметим, что функция $F(x, y, y')$ трижды дифференцируема по y' при любых y'. Поэтому начнем с рассмотрения упрощенных достаточных условий. Нетрудно видеть, что выражение

$$F_{y'y'}(x, y, y') = 12 - 12(y')^2$$

при произвольных y' не сохраняет знак (в данном случае близость по координатам к экстремали $y_0(x)$ не существенна, так как отсутствует зависимость от x и y), а значит, упрощенное достаточное условие сильного экстремума нарушено. Вопрос о сильном экстремуме остается открытым.

Переходим к проверке достаточного условия Вейерштрасса сильного экстремума. Функция Вейерштрасса для поля имеет вид

$$\mathcal{E}(x,y,\xi,y') = 6(y')^2-(y')^4+yy'-6\xi^2+\xi^4-y\xi-(y'-\xi)(12\xi-4\xi^3+y) = \\ = -(y'-\xi)^2[(y')^2+2\xi y'+3\xi^2-6],$$

где $\xi = \xi(x,y)$ – функция наклона поля экстремалей. Нетрудно видеть, что функция Вейерштрасса не зависит от x и y и целиком определяется взаимоотношениями между y' и наклоном ξ поля экстремалей.

На экстремалях собственного поля $y(x,C) = \frac{b}{a}x + C$, наклон которого $\xi(x,y) = \frac{b}{a}$, функция Вейерштрасса принимает вид

$$\mathcal{E} = -\left(y' - \frac{b}{a}\right)^2 \left[(y')^2 + 2\frac{b}{a}y' + 3\frac{b^2}{a^2} - 6\right].$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые имели место при проверке необходимого условия Вейерштрасса, получим следующее. Функция Вейерштрасса сохраняет знак ($\mathcal{E} \le 0$) в сильной окрестности экстремали $y_0(x)$ при условии $\xi \ge \sqrt{3}$, т.е. в точках, близких к экстремали, и для произвольных значений y' (видно, что для данных рассуждений удобнее использовать именно собственное поле экстремалей). Значит, на допустимой экстремали $y_0(x) = \frac{b}{a}x$ согласно достаточному условию Вейерштрасса при $\xi \ge \sqrt{3}$ достигается сильный максимум.

Проверим достаточные условия слабого экстремума.

Прежде всего рассмотрим упрощенное достаточное условие. При $a \ne b$ выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби. Если $0 < \frac{b}{a} < 1$, имеем $F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0$, т.е. на экстремали $y_0(x) = \frac{b}{a}x$ достигается слабый минимум. Если $\frac{b}{a} > 1$, имеем $F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) < 0$, т.е. на экстремали $y_0(x) = \frac{b}{a}x$ достигается слабый максимум. При $a = b$ вторая производная $F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0$ и усиленное условие Лежандра не выполняется. Кроме того, в этом случае не работает условие Якоби.

Рассмотрим случай $a = b$ отдельным образом. На экстремали $y_0(x) = x$ ($a = b$) и на экстремалях собственного поля $y(x,C) = x + C$, наклон которого $\xi(x,y) = 1$, функция Вейерштрасса принимает вид

$$\mathcal{E} = -(y'-1)^2\left[(y')^2 + 2y' - 3\right].$$

Так как $y' = 1$ является простым корнем уравнения $(y')^2 + 2y' - 3 = 0$, то это означает, что при значениях y', близких к $\xi(x, y) = 1$, функция Вейерштрасса не сохраняет знак. Следовательно, по достаточному условию отсутствия экстремума на экстремали $y_0(x) = x$ слабый экстремум не достигается. ◀

Пример 52 (задача о поверхности вращения наименьшей площади)**.** Пусть даны две точки плоскости: $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$. Требуется соединить точки A и B кривой $y = y(x)$, лежащей выше оси Ox и обладающей тем свойством, что поверхность, образованная вращением кривой $y = y(x)$ вокруг оси абсцисс, имеет наименьшую возможную площадь.

▶ Исследуем на экстремум функционал (см. пример 18)

$$S[y] = 2\pi \int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + (y')^2}dx, \quad y(-a) = y(a) = D > 0.$$

В рассмотренном ранее примере было показано, что экстремум функционала может достигаться только на функциях вида

$$y(x) = C \operatorname{ch} \frac{x}{C},$$

где C – корень уравнения

$$f(C) \equiv C \operatorname{ch} \frac{a}{C} = D. \tag{103}$$

Если $D = D_0$, то уравнение (103) имеет единственный корень $C_0 > 0$ и, соответственно, одну допустимую экстремаль $y_0(x)$. Если $D > D_0$, то уравнение (103) имеет два корня C_1 и C_2, причем $0 < C_1 < C_0 < C_2$, и каждый из них определяет свою допустимую экстремаль $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответственно. Нашей задачей будет выяснить, доставляют ли данные экстремали экстремум функционалу $S[y]$.

Проверим выполнение условия Лежандра. Используя равенство

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{y}{C},$$

находим

$$F_{y'y'}(x, y, y') = \frac{2\pi y}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{2\pi C^3}{y^2},$$

$$F_{yy}(x, y, y') - \frac{d}{dx}F_{yy'}(x, y, y') = -2\pi C \left(\frac{y'}{y}\right)'.$$

Нетрудно видеть, что для всех допустимых экстремалей $F_{y'y'} > 0$, т.е. выполнено усиленное условие Лежандра. Следовательно, выполнено и необходимое условие слабого экстремума (минимума).

Проверим выполнение условия Якоби. Уравнение Якоби (94) на допустимых экстремалях имеет вид

$$C^2u'' - 2Cu' \operatorname{th}\frac{x}{C} + u = 0.$$

Это уравнение имеет линейно независимые решения

$$u_1 = \operatorname{sh}\frac{x}{C}, \quad u_2 = \operatorname{ch}\frac{x}{C} - \frac{x}{C}\operatorname{sh}\frac{x}{C}.$$

Тогда общее решение уравнения Якоби

$$u(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x).$$

Граничному условию $u(-a) = 0$ удовлетворяет решение

$$u(x) = u_2(a)u_1(x) + u_1(a)u_2(x). \tag{104}$$

Исследуем поведение функции $u(x)$ при $x \in (-a, a]$. Имеем

$$f'(C) = \operatorname{ch}\frac{a}{C}\left(1 - \frac{a}{C}\operatorname{th}\frac{a}{C}\right), \quad f''(C) = \frac{a^2}{C^3}\operatorname{ch}\frac{a}{C} > 0,$$

так что

$$\begin{cases} f'(C) < 0 & \text{при } 0 < C < C_0, \\ f'(C) = 0 & \text{при } C = C_0, \\ f'(C) > 0 & \text{при } C > C_0. \end{cases}$$

Поскольку точка $x = 0$ не является корнем функции (104), то вместо $u(x)$ достаточно исследовать функцию

$$\bar{u}(x) = \frac{u(x)}{\operatorname{sh}\frac{a}{C}\operatorname{sh}\frac{x}{C}} = \operatorname{cth}\frac{x}{C} - \frac{x}{C} + \operatorname{cth}\frac{a}{C} - \frac{a}{C}.$$

Так как

$$\bar{u}'(x) = -\frac{1}{C}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{C}} - \frac{1}{C},$$

то нетрудно видеть, что в каждом из интервалов $[-a, 0)$ и $(0, a]$ функция $\bar{u}(x)$ убывает. Далее заметим, что

$$\bar{u}(a) = 2\left(\operatorname{cth}\frac{a}{C} - \frac{a}{C}\right) = \operatorname{cth}\frac{a}{C}\left(1 - \frac{a}{C}\operatorname{th}\frac{a}{C}\right) = \operatorname{cth}\frac{a}{C}f'(C),$$

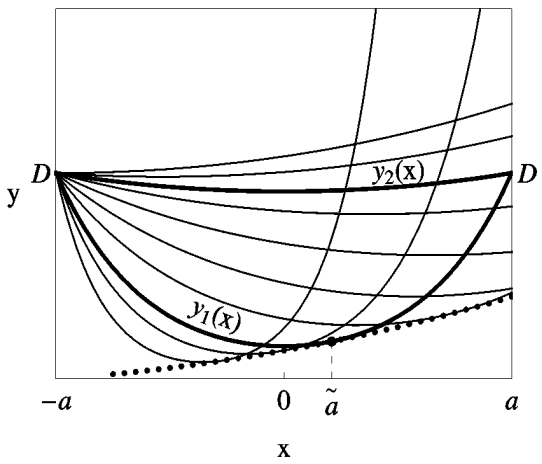

Рис. 18.

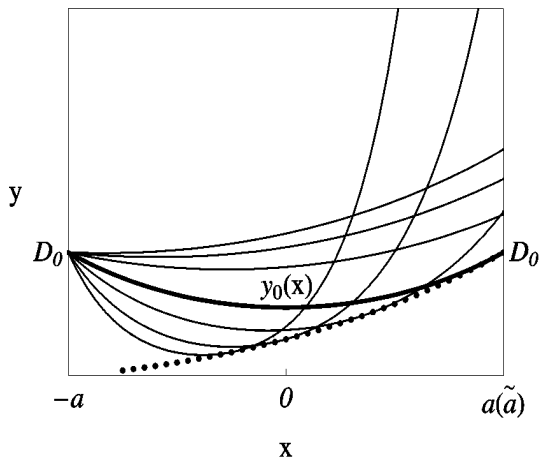

Рис. 19.

так что

$$\begin{cases} \bar{u}(a) < 0, & \text{если } C = C_1, \\ \bar{u}(a) = 0, & \text{если } C = C_0, \\ \bar{u}(a) > 0, & \text{если } C = C_2. \end{cases}$$

Таким образом, при $C = C_1$ функция $\bar{u}(x)$, а вместе с ней и функция $u(x)$, обращается в нуль на интервале $(-a, a)$. Это означает, что на экстремали $y_1(x)$ условие Якоби не выполняется. Условие Якоби выполнено только на экстремалях, соответствующих $C = C_0$ и $C = C_2$, причем во втором случае выполнено усиленное условие Якоби, так как на интервале $x \in (-a, a]$ нет точек, сопряженных с точкой $x = -a$.

Проанализируем полученные результаты. Поскольку на экстремали $y_2(x)$ выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби, то данная экстремаль может быть включена на отрезке $[-a, a]$ в поле экстремалей $y(x, C) = C\,\mathrm{ch}(x/C)$, $C_0 < C$ (собственное) или $y(x, C) = C\,\mathrm{ch}((x+a)/C - \mathrm{arch}(D/C))$, $D > D_0$ (центральное) (рис. 18). Необходимые условия существования слабого (а значит, и сильного) экстремума выполнены.

Экстремаль $y_1(x)$ не может реализовать экстремум функционала, так как на ней не выполнено условие Якоби (т.е. не выполняется необходимое условие слабого, а значит, и сильного экстремума). Геометрически это означает, что данная экстремаль на отрезке $[-a, a]$ касается огибающей семейства кривых $y(x, C) = C\,\mathrm{ch}((x+a)/C - \mathrm{arch}(D/C))$, $D > D_0$ (рис. 18) в некоторой точке с абсциссой $x = \tilde{a}$. Таким образом, кривая $y_1(x)$ не может быть включена в поле экстремалей.

Экстремаль $y_0(x)$ имеет сопряженную точку, совпадающую с конечной точкой (a, D) (рис. 19). Нетрудно видеть, что кривая лежит на границе поля экстремалей (собственного или центрального). Поскольку на данной экстремали усиленное условие Лежандра и условие Якоби (простое, а не усиленное) выполнены, то это означает, что на

данной экстремали выполнены необходимые условия существования слабого (а значит, и сильного) экстремума.

Проверим условие Вейерштрасса. Имеем

$$\mathcal{E}(x,y,y',k) = y\sqrt{1+k^2} - y\sqrt{1+(y')^2} - (k-y')\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} =$$
$$= \frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}}\left(\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+(y')^2} - 1 - y'k\right) =$$
$$= \frac{y(y'-k)^2}{\sqrt{1+(y')^2}\left(\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+(y')^2} + 1 + y'k\right)}.$$

Если учесть, что допустимые экстремали $y_0(x)$ и $y_2(x)$, на которых мы определяем функцию Вейерштрасса, есть функции со значениями в верхней полуплоскости, то нетрудно показать, что

$$\mathcal{E}(x,y(x),y'(x),k) \geq 0, \quad x \in [-a,a], \quad k \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, необходимое условие Вейерштрасса для сильного экстремума (минимума) выполнено на обеих допустимых экстремалях.

Проверим выполнение достаточных условий сильного экстремума. В силу того, что подынтегральная функция $F(x,y,y') = y\sqrt{1+(y')^2}$ трижды дифференцируема по y' при любых y', то прежде всего следует проверить упрощенное достаточное условие. Нетрудно видеть, что вторая производная

$$F_{y'y'}(x,y(x),y'(x)) = \frac{2\pi y}{(1+(y')^2)^{3/2}} > 0$$

положительна во всех точках сильной окрестности любой из допустимых экстремалей. Тогда можно утверждать, что экстремали $y_0(x)$ и $y_2(x)$ доставляют функционалу $S[y]$ сильный (а значит и слабый) локальный минимум.

Таким образом, мы показали, что только две из трех допустимых экстремалей рассматриваемой нами вариационной задачи доставляют функционалу экстремум (минимум) в пространстве непрерывно дифференцируемых функций. Вращая каждую из данных кривых вокруг оси Ox, получим поверхность вращения наименьшей площади.

◀

12 Основы теории Гамильтона–Якоби

12.1 Каноническая форма уравнений Эйлера

Рассмотрим функционал

$$J[y_1, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx. \tag{105}$$

Уравнения Эйлера, отвечающие данному функционалу,

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx}F_{y_k'} = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{106}$$

образуют систему n уравнений второго порядка. Такую систему можно свести к системе $2n$ уравнений первого порядка.

Полагая в (106)

$$F_{y_k'} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{107}$$

получим

$$\frac{dp_k}{dx} = F_{y_k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

В случае, если

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_k' \partial y_l'}\right) \neq 0,$$

систему уравнений (107) можно разрешить относительно y_k':

$$F_{y_k'} = p_k \quad \Rightarrow \quad y_k' = \varphi_k(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n), \quad k = 1, \ldots, n.$$

При этом получим систему $2n$ уравнений первого порядка в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_k}{dx} = \varphi_k(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n), \\ \dfrac{dp_k}{dx} = \left.\dfrac{\partial F}{\partial y_k}\right|_{y_k' = \varphi_k}, \quad k = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{108}$$

Перейдем от переменных

$$x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n'$$

к новым переменным

$$x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n.$$

Здесь и далее в этом разделе для удобства будем использовать обозначение

$$y = (y_1, \ldots, y_n), \quad y' = (y'_1, \ldots, y'_n), \quad p = (p_1, \ldots, p_n).$$

Определим функцию

$$H(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n) = \left[\sum_{k=1}^{n} y'_k p_k - F(x, y, y')\right]\Bigg|_{y'_k = \varphi_k}. \tag{109}$$

Определение. Функция $H(x, y, p)$, определяемая равенством (109), называется *функцией Гамильтона*, или *гамильтонианом*, для функционала (105).

С помощью функции Гамильтона система (108) может быть записана в каноническом виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_k}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dfrac{dp_k}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_k}, \quad k = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{110}$$

Определение. Система дифференциальных уравнений (110) называется *канонической*, или *гамильтоновой, системой.* Переменные y_k, p_k $(k = 1, \ldots, n)$ называются *каноническими переменными.*

В механике гамильтоновы системы описывают движение при голономных связях и силах, имеющих потенциал???.

Переход от переменных y_k, y'_k $(k = 1, \ldots, n)$ и функции $F(x, y, y')$ к переменным y_k, p_k $(k = 1, \ldots, n)$ и функции $H(x, y, p)$ по правилу (107) и (109) называют *преобразованием Лежандра.*

Утверждение 3. *Система уравнений Эйлера* (106) *эквивалентна системе* $2n$ *уравнений первого порядка* (110).

Доказательство. Найдем полный дифференциал функции Гамильтона:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_k} dy_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k.$$

С другой стороны, по определению функции Гамильтона, имеем

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x} dx + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\partial F}{\partial y_k}\right) dy_k + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k dp_k.$$

Для получения частных производных функции H выпишем коэффициенты при соответствующих дифференциалах:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y_k} = -\frac{\partial F}{\partial y_k} = -\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_k} = -\frac{dp_k}{dx}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \varphi_k = \frac{dy_k}{dx}.$$

Отсюда

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_k}.$$

Таким образом, если $y_k(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера, то p_k, y_k удовлетворяют системе уравнений Гамильтона. Доказательство обратного утверждения проводится аналогично. Следовательно, системы уравнений Эйлера и Гамильтона эквивалентны. □

Введем новый функционал

$$S[y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n] = \int\limits_a^b \left[\sum_{k=1}^n p_k y'_k - H(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)\right] dx, \tag{111}$$

в котором y_k и p_k $(k = 1, \ldots, n)$ рассматриваются как независимые функции. Этот функционал, как нетрудно видеть, совпадает с исходным функционалом (105), если за p_k взять выражение (107).

Упражнение 22. Показать, что система уравнений Эйлера для функционала (111) совпадает с канонической системой функционала (105).

Пример 53. Записать систему уравнений Гамильтона для функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

► Вводим каноническую переменную

$$p = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{p}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}$$

и строим гамильтониан для данного функционала:

$$H(x, y, p) = y'p - F = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}.$$

Тогда, согласно (110), получим каноническую систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{p}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}, \\ \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}. \end{cases}$$

◄

12.2 Первые интегралы гамильтоновой системы

Из теории дифференциальных уравнений известно, что каждой системе обыкновенных дифференциальных уравнений можно поставить в соответствие некоторый набор функций, называемых первыми интегралами данной системы. Знание этих функций дает возможность понизить порядок дифференциальной системы или, быть может, записать общее решение без интегрирования системы.

Определение. Функция, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой интегральной линии заданной системы дифференциальных уравнений, называется *первым интегралом* этой системы.

В механике первый интеграл можно рассматривать как некоторую сохраняющуюся физическую величину, связанную с рассматриваемой механической системой, например энергию или импульс.

Рассмотрим функцию переменных x, y_k, p_k $(k = 1, \ldots, n)$

$$A(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n).$$

Функция $A(x, y, p)$ будет первым интегралом гамильтоновой системы (110), если она постоянна на решениях $y_k = y_k(x)$, $p_k = p_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ этой системы, т.е.

$$A(x, y(x), p(x)) = A(x_0, y(x_0), p(x_0)), \quad x_0 \in [a, b].$$

Вычислим полную производную функции $A(x, y, p)$ по переменной x вдоль интегральных линий гамильтоновой системы (110):

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dx} + \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dx} \right) =$$
$$= \frac{\partial A}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial y_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial y_k} \right) = \frac{\partial A}{\partial x} + \{A, H\}. \quad (112)$$

Определение. Выражение

$$\{A, B\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial y_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial y_k} \right)$$

называют *скобкой Пуассона* функций $A(x, y, p)$ и $B(x, y, p)$.

Из определения скобки Пуассона следуют ее свойства:

1) антисимметричность

$$\{A, B\} = -\{B, A\};$$

2) билинейность

$$\{\lambda_1 A + \lambda_2 B, C\} = \lambda_1\{A, C\} + \lambda_2\{B, C\}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R};$$

3) правило Лейбница

$$\{AB, C\} = \{A, C\}B + A\{B, C\};$$

4) тождество Якоби

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0.$$

Упражнение 23. Доказать свойства скобки Пуассона.

Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях данная функция является первым интегралом системы Гамильтона.

Утверждение 4. *Дифференцируемая функция $A(x, y, p)$ является первым интегралом гамильтоновой системы тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \{A, H\} = 0, \tag{113}$$

где $H(x, y, p)$ – функция Гамильтона данной системы.

Доказательство. Рассмотрим полную производную функцию $A(x, y, p)$, вычисленную на решениях гамильтоновой системы (см. формулу (112)):

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x} + \{A, H\}.$$

Если $A(x, y, p)$ является первым интегралом гамильтоновой системы, то на решениях этой системы функция $A(x, y, p)$ сохраняет свое значение, а следовательно, имеет место равенство $\frac{dA}{dx} = 0$. Тогда справедливо равенство (113). Обратно, если справедливо равенство (113), то функция $A(x, y, p)$ постоянна на решениях системы Гамильтона, а значит, является первым интегралом. □

Рассмотрим возможные первые интегралы гамильтоновой системы.

Интеграл импульса

Если функция $H(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)$ не зависит явно от y_k, то

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_k}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_k = \text{const}.$$

Интеграл энергии

Если функция $H(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)$ не зависит явно от x, то, в силу (113), получим

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} + \{H, H\} = 0 \quad \Rightarrow \quad H(y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n) = \text{const}$$

вдоль интегральных кривых системы (110).

12.3 Уравнение Гамильтона-Якоби

Рассмотрим инвариантный интеграл Гильберта

$$\int\limits_{\gamma} [F(x, y, \xi) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k F_{\xi_k}(x, y, \xi)]dx + \sum_{k=1}^{n} F_{\xi_k}(x, y, \xi)dy_k,$$

образованный для функций наклона $\xi_k = \xi_k(x, y)$, $k = 1, \ldots, n$, поля экстремалей $y_k = y_k(x, C_1, \ldots, C_n)$, $k = 1, \ldots, n$, функционала (105). Здесь γ – некоторая кривая, соединяющая концы экстремалей $y_k(x)$. Известно, что интеграл Гильберта не зависит от формы кривой γ (при условии, что кривая принадлежит области, в которой определено поле экстремалей), а только от начальной и конечной точки интегрирования. Фиксируя начальную точку $(a, y_1(a), \ldots, y_n(a))$ кривой γ и меняя ее конечную точку $(x, y_1, \ldots, y_n)$, получим функцию

$$S(x, y_1, \ldots, y_n) = \int\limits_{(a, y(a))}^{(x,y)} [F(x, y, \xi) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k F_{\xi_k}(x, y, \xi)]dx + \sum_{k=1}^{n} F_{\xi_k}(x, y, \xi)dy_k. \tag{114}$$

Эта функция определена с точностью до произвольной постоянной и называется *функцией поля*. Нетрудно показать, что функция $S(x, y_1, \ldots, y_n)$ определена однозначно (по крайней мере, в малой окрестности начальной точки).

Построим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $S = S(x, y_1, \ldots, y_n)$. С этой целью найдем частные производные этой функции:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = F(x, y, \xi) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k F_{\xi_k}(x, y, \xi), \quad \frac{\partial S}{\partial y_k} = F_{\xi_k}(x, y, \xi), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Переходя к каноническим переменным, определим

$$p_k = F_{y'_k}(x, y, y'), \quad y'_k = \xi_k(x, y), \quad k = 1, \ldots, n,$$

и учтем, что в соответствии с преобразованием Лежандра

$$F(x,y,\xi)-\sum_{k=1}^{n}\xi_k F_{\xi_k}(x,y,\xi)=-H(x,y,p).$$

Тогда

$$\frac{\partial S}{\partial x}=-H(x,y_1,\ldots,y_n,p_1,\ldots,p_n),\quad \frac{\partial S}{\partial y_k}=p_k,\quad k=1,\ldots,n.$$

Путем исключения p_k получается уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial S}{\partial x}+H\left(x,y_1,\ldots,y_n,\frac{\partial S}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial y_n}\right)=0, \tag{115}$$

определяющее функцию поля.

Определение. Уравнение (115) называется *уравнением Гамильтона–Якоби.*

Заметим, что интеграл (114) в канонических переменных запишется в виде

$$S(x,y_1,\ldots,y_n)=\int\limits_{(a,y(a))}^{(x,y)} pdy-H(x,y,p)dx.$$

Этот интеграл называют *инвариантным интегралом Картана.*

Существует тесная связь между уравнением Гамильтона–Якоби и канонической системой уравнений Эйлера. Эти уравнения представляют собой так называемую характеристическую систему для уравнения (115).

Определение. *Полным интегралом* уравнения в частных производных первого порядка называется его решение, содержащее столько произвольных постоянных, каково число независимых переменных.

Для уравнения Гамильтона–Якоби, учитывая то, что оно не содержит неизвестную функцию, а лишь ее частные производные, полный интеграл можно взять в виде

$$S=S(x,y_1,\ldots,y_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)+S_0,$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – произвольные постоянные.

Выясним связь между решением уравнения Гамильтона–Якоби и общим решением канонической системы уравнений Эйлера.

Будем полагать, что S непрерывно дифференцируема по параметрам α_k и каждая частная производная S_{α_k}, S_{y_k} $(k=1,\ldots,n)$ непрерывно дифференцируема по всем аргументам.

Теорема 26 (Якоби). *Пусть* $S = S(x, y_1, \ldots, y_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *– полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, удовлетворяющий условию*

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_i \partial y_j}\right) \neq 0.$$

Тогда равенства

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_k} = \beta_k, \quad \frac{\partial S}{\partial y_k} = p_k,$$

где α_k, β_k, $k = 1, \ldots, n$, *– произвольные постоянные, образуют решение канонической системы* (110), *зависящее от* $2n$ *произвольных постоянных.*

Доказательство. Покажем, что вдоль каждой экстремали

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha_k}\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{116}$$

Согласно (112), полная производная (116) вдоль экстремалей запишется в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha_k}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial\alpha_k} + \left\{\frac{\partial S}{\partial\alpha_k}, H\right\} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial\alpha_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial\alpha_k}\frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{117}$$

Далее, продифференцировав уравнение Гамильтона–Якоби по α_k, находим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial\alpha_k} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial\alpha_k}.$$

Подставив это выражение в (117), получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha_k}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial\alpha_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial\alpha_k}\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, мы получили n первых интегралов канонической системы:

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_k} = \beta_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{118}$$

Поскольку

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_i \partial y_j}\right) \neq 0,$$

то система (118) определяет y_k как функции остальных аргументов:

$$y_k = y_k(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n), \quad k = 1, \ldots, n.$$

В итоге получим общее решение канонической системы (110)

$$\begin{cases} y_k = y_k(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n), \\ p_k = \left.\dfrac{\partial S}{\partial y_k}\right|_{y_k = y_k(x,\alpha,\beta)}, \quad k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

□

Пример 54. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

► Гамильтониан для данного функционала запишется в виде (см. пример 53)

$$H(x, y, p) = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}.$$

Следовательно, уравнение Гамильтона–Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2}$$

или

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2. \tag{119}$$

Решение можно искать в форме

$$S = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2). \tag{120}$$

Подстановка решения (120) в уравнение (119) дает

$$A^2 + B^2 = 1, \quad B(A + C) = 0, \quad B^2 + C^2 = 1.$$

Полагая $A = -C = \sin\alpha$, $B = -\cos\alpha$, получим решение уравнения (119)

$$S(x, y, \alpha) = \frac{1}{2}(x^2 \sin\alpha - 2xy\cos\alpha - y^2 \sin\alpha).$$

Общий интеграл уравнения Эйлера в силу теоремы Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta$$

или

$$x^2 \cos\alpha + 2xy\sin\alpha - y^2\cos\alpha = 2\beta.$$

◄

13 Принцип Гамильтона

Рассмотрим механическую систему, состоящую из материальной точки массы m, движущейся прямолинейно по оси Ox под действием силы $f(x,t)$.

Дифференциальное уравнение движения (уравнение Ньютона) запишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x,t). \tag{121}$$

Пусть $U(x,t)$ – потенциал силового поля, т.е.

$$f(x,t) = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Сформулируем вариационную задачу, уравнение Эйлера которой совпадает с дифференциальным уравнением Ньютона для движения материальной точки под действием силы $f(x,t)$. С этой целью модифицируем уравнение (121):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[m\frac{dx}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{d\dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{d\dot{x}}T\right],$$

где

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

– кинетическая энергия системы. Учитывая, что

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = 0,$$

уравнение движения системы запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(T-U) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(T-U)\right] = 0$$

или

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0,$$

где

$$L(x,\dot{x},t) = T(\dot{x}) - U(x,t).$$

Определение. Функция $L = T - U$, где T – кинетическая энергия, U – потенциальная энергия системы, называется *функцией Лагранжа* механической системы.

Функция Лагранжа определяет функционал

$$S[x] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt,$$

для которого уравнение Эйлера совпадает с дифференциальным уравнением движения системы. Интеграл $S[x]$ в классической механике называют *действием*.

Принцип Гамильтона:
Пусть в моменты времени $t = t_0$ и $t = t_1$ система занимает определенные положения $x_0 = x(t_0)$ и $x_1 = x(t_1)$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы интеграл $S[x]$ имел экстремальное значение.

Принцип Гамильтона справедлив и в случае, когда на систему наложены некоторые связи. В этом случае применение принципа Гамильтона приводит к вариационной задаче на условный экстремум.

Пример 55. Рассмотрим систему n материальных точек с массами m_k и координатами $\boldsymbol{r}_k = \{x_k, y_k, z_k\}$, на которые действует сила

$$\boldsymbol{F}_k = -\boldsymbol{\nabla} U = \left\{-\frac{\partial U}{\partial x_k}, -\frac{\partial U}{\partial y_k}, -\frac{\partial U}{\partial z_k}\right\}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $U = U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t)$ – потенциал силового поля.

Пусть движение системы подчинено голономным связям

$$\Phi_i(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad m < 3n,$$

которые предполагаются независимыми.

Используя принцип Гамильтона, получим уравнения движения системы. Для этого прежде всего определим функцию Лагранжа

$$L(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_n, t) = T - U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t),$$

где

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left[\left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt}\right)^2$$

– кинетическая энергия системы.

Сформулируем вариационную задачу (задачу Лагранжа) для функционала

$$S[\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_n, t)dt$$

с граничными условиями

$$\boldsymbol{r}_k(t_0) = \boldsymbol{r}_k^0, \quad \boldsymbol{r}_k(t_1) = \boldsymbol{r}_k^1, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и уравнениями связи

$$\Phi_i(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0, \quad i = 1, \ldots m, \quad m < 3n. \tag{122}$$

Следуя схеме решения сформулированной выше задачи Лагранжа, введем вспомогательную функцию

$$F^\star = T - U + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\Phi_i,$$

где $\lambda_i(t)$ – множители Лагранжа. Система уравнений Эйлера для функционала с интегрантом $F^\star$, дополненная уравнениями (122), будет определять уравнения движения системы n материальных точек, подчиненных m голономным связям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^\star}{\partial \boldsymbol{r}_k} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F^\star}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \\ \Phi_i(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

или в более подробной форме

$$\begin{cases} m_k \dfrac{d^2\boldsymbol{r}_k}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla}_k U + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\boldsymbol{\nabla}_k \Phi_i, \quad k = 1, \ldots, n, \\ \Phi_i(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Заметим, что из уравнений связи (122) можно выразить m переменных через $3n - m$ независимых переменных. Эти независимые переменные обозначим q_r, $r = 1, \ldots, 3n - m$. Тогда все $3n$ переменные можно выразить через переменные q_r, т.е.

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(q_1, \ldots, q_{3n-m}, t), \quad k = 1, \ldots, n,$$

а также

$$T = T(q_1, \ldots, q_{3n-m}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{3n-m}, t), \quad U = U(q_1, \ldots, q_{3n-m}, t).$$

В результате

$$L = L(q_1, \ldots, q_{3n-m}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{3n-m}, t)$$

и уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = 0, \quad r = 1, \ldots, 3n - m.$$

Определение. Число величин, задание которых необходимо для однозначного определения положения механической системы, называют *числом степеней свободы* этой системы.

Определение. Любые n величин q_i, $i = 1, \ldots, n$, полностью задающих положение механической системы с n степенями свободы, называют ее *обобщенными координатами*, а производные $\dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$, – *обобщенными скоростями.*

Пусть задана функция Лагранжа механической системы с n степенями свободы

$$L = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t).$$

Запишем функционал действия для этой системы

$$S[q_1, \ldots, q_n] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)dt.$$

Уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{123}$$

Построим каноническую систему, соответствующую системе уравнений Эйлера. Для этого введем дополнительные переменные

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{124}$$

Определение. Переменные p_i называют *обобщенными импульсами* системы.

Если

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0,$$

то из соотношения (124) возможно однозначно выразить $\dot{q}_i$ через переменные q_i, p_i, t:

$$\dot{q}_i = \varphi_i(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда функция Гамильтона имеет вид

$$H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t) = \left[\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\right]_{\dot{q}_i = \varphi_i}.$$

Система уравнений Эйлера (123) эквивалентна системе уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Пример 56 (гармонический осциллятор)**.** Пусть на невесомой пружине с коэффициентом жесткости k подвешено тело массы m. Рассмотрим вертикальное движение тела, которое будет происходить под действием силы упругости пружины и силы тяжести после смещения тела из положения равновесия.

► Поместим начало отсчета по оси Ox в точку, соответствующую равновесному положению тела. При смещении груза на величину x из положения равновесия его потенциальная энергия определяется выражением

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Тогда лагранжиан системы имеет вид

$$L(x, \dot{x}, t) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{125}$$

Это уравнение описывает колебания груза на пружине.

Найдем обобщенный импульс

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m}.$$

Тогда

$$H(p, x, t) = [p\dot{x} - L(x, \dot{x}, t)]_{\dot{x}=\frac{p}{m}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}.$$

и каноническая система, соответствующая уравнению Эйлера (125)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{p}{m}, \\ \dfrac{dp}{dt} = -kx. \end{cases} \tag{126}$$

Заметим, что

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = 0.$$

Это означает, что функция Гамильтона является первым интегралом системы (126), т.е. эта функция сохраняет свое значение на решениях системы. В этом случае первый интеграл, как уже упоминалось, называют интегралом энергии. Смысл названия становится понятным, если учесть, что функция $H(p, x, t)$ определяет полную энергию гармонического осциллятора.

Колебания любой физической природы, описываемые уравнением (125), называются *гармоническими*, а совершающая такие колебания система – *гармоническим осциллятором.* ◀

Упражнение 24. Исследовать на экстремум функционал

$$S[x] = \int\limits_0^{t_1} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right] dt.$$

Подробное обсуждение этого вопроса можно найти, например, в [5].

14 Прямые методы вариационного исчисления

14.1 Понятие о прямых методах вариационного исчисления

Применение необходимых условий экстремума в задачах вариационного исчисления, связанных с обращением в ноль первой вариации функционала на экстремалях, приводит к необходимости решать дифференциальное уравнение второго порядка, в общем случае нелинейного, с граничными условиями на разных концах отрезка интегрирования, что представляет часто достаточно сложную задачу, поэтому наряду с таким подходом в вариационном исчислении получили развитие так называемые *прямые методы* — приближенные численные методы, дающие непосредственное решение вариационной задачи (т.е. не сводящие вариационную задачу к дифференциальным уравнениям).

Функционал $J[y]$ можно рассматривать как функцию бесконечного множества переменных. Действительно, допустимые функции могут быть разложены в ряд

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_k(x)$ – некоторые заданные функции. Нетрудно видеть, что для определения функции $y(x)$ достаточно задать значения всех коэффициентов α_k, т.е. функционал в этом случае является функцией бесконечного множества переменных:

$$J[y] = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots).$$

Основная идея прямых методов заключается в том, что вариационная задача рассматривается как предельная для последовательности задач на экстремум функций конечного числа переменных. При реализации этих методов в качестве допустимых берутся только те функции, которые характеризуются конечным числом параметров, а интеграл, входящий в определение функционала, заменяется конечной суммой.

Рассмотрим задачу о нахождении минимума (аналогичные рассуждения могут быть проведены и в случае максимума) некоторого функционала $J[y]$, определенного на множестве $D(J)$ допустимых кривых. Для того чтобы задача имела смысл, следует предположить, что множество $D(J)$ содержит кривые, для которых $J[y] < +\infty$, и что

$$\inf_{y \in D(J)} J[y] = \mu > -\infty.$$

В этом случае, по определению точной нижней грани, существует такая последовательность кривых $\{y_n(x)\}$, для которой последовательность значений функционала $\{J[y_n]\}$ сходится к минимуму или к нижней грани значений функционала $J[y]$.

Определение. Пусть $J[y]$ – произвольный, ограниченный снизу функционал, минимизируемый в пространстве $D(J)$. Последовательность $\{y_n(x)\}$ $(n \in \mathbb{N})$, состоящую из элементов $D(J)$, назовем *минимизирующей последовательностью*, если

$$\lim_{n\to\infty} J[y_n] = \inf_{y\in D(J)} J[y]. \tag{127}$$

Нетрудно видеть, что для любого ограниченного функционала всегда можно построить минимизирующую последовательность. Каждый из употребляемых в вариационном исчислении прямых методов характеризуется именно способом построения минимизирующих последовательностей.

Однако из (127) еще не следует, что минимизирующая последовательность имеет предельную кривую, т.е. что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y_\star(x)$. Минимизирующая последовательность может и не стремиться к функции, реализующей экстремум в классе допустимых функций.

Пример 57. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int\limits_{-1}^{1} x^2(y')^2 dx \to \min, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

Нетрудно видеть, что $J[y] \geq 0$, $\forall y \in D(J)$. Тогда последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{\operatorname{arctg}(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

является минимизирующей. Действительно,

$$J[y_n] = \int\limits_{-1}^{1} x^2(y_n')^2 dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{n^2x^2dx}{(1+n^2x^2)^2[\operatorname{arctg}(n)]^2} =$$

$$= \frac{-n + (1+n^2)\operatorname{arctg}(n)}{n(1+n^2)[\operatorname{arctg}(n)]^2} \leq \frac{1}{n|\operatorname{arctg}(n)|} \quad \Rightarrow \quad J[y_n] \to 0, \quad n \to \infty.$$

С другой стороны, последовательность $\{y_n(x)\}$ не сходится ни к какой функции по метрике пространства $C^1[-1, 1]$.

Если для последовательности $\{y_n(x)\}$ существует предельная кривая $y_\star(x)$ и если окажется законным предельный переход

$$J[y_\star] = \lim_{n\to\infty} J[y_n], \tag{128}$$

то тогда

$$J[y_\star] = \mu,$$

т.е. предельная кривая $y_\star(x)$ и будет решением рассматриваемой задачи.

Таким образом, решение вариационной задачи прямым методом складывается из:

1) построения минимизирующей последовательности $\{y_n(x)\}$;

2) доказательства существования у этой последовательности предельной кривой;

3) доказательство законности предельного перехода (128).

Сами члены минимизирующей последовательности можно рассматривать как приближенные решения соответствующей вариационной задачи.

Теорема 27. *Пусть область определения функционала $J[y]$, ограниченного снизу, есть метрическое пространство, расстояние в котором обозначим через ρ, и пусть минимизирующая последовательность $\{y_n(x)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ функционала $J[y]$ сходится к элементу $y_\star(x) \in D(J)$:*

$$\rho(y_n, y_\star) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Предположим далее, что функционал $J[y]$ на элементе $y_\star(x)$ полунепрерывен снизу, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если $y(x) \in D(J)$ и $\rho(y, y_\star) < \delta$, то $J[y] > J[y_\star] - \varepsilon$.

Тогда $y_\star(x)$ доставляет минимум функционалу $J[y]$.

Доказательство теоремы можно найти в работе [18].

Разнообразие прямых методов в вариационном исчислении определяется выбором конкретных способов построения минимизирующей последовательности функций. Наиболее известными приближенными численными методами являются методы Эйлера, Ритца, Канторовича и Галеркина. Ниже будут рассмотрены только первые два метода.

Говоря о прямых методах, мы ограничимся лишь указанием способов фактического построения приближенных решений, не касаясь вопросов сходимости и существования точного решения.

14.2 Конечно-разностный метод Эйлера

Рассмотрим вариационную задачу

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx \to \min, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Идея метода Эйлера заключается в том, что допустимые функции отождествляются с ломанными $y_{[n]}$, $n = 1, 2, \ldots$, составленными из заданного числа n прямолинейных звеньев, с заданными абсциссами вершин (рис. 20):

$$x_k = a + k\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Функционал, вычисленный на таких ломаных, превращается в функцию

$$J[y_{[n]}] = \Phi_n(y_1, \ldots, y_{n-1}) : \ \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^1$$

ординат $y_1, \ldots, y_{n-1}$ вершин ломаной.

Действительно, заменяя интеграл в определении минимизируемого функционала его интегральной суммой на основе метода прямоугольников, получим

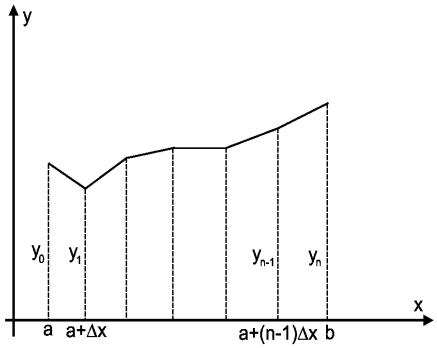

Рис. 20.

$$\Phi_n(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) \Delta x,$$

$$x_0 = a, \quad y_0 = A, \quad x_n = b, \quad y_n = B.$$

В результате вариационная задача сводится к задаче отыскания экстремума функции конечного числа переменных.

Выберем ординаты $y_1, \ldots, y_{n-1}$ так, чтобы функция $\Phi_n(y_1, \ldots, y_{n-1})$ достигала экстремума, т.е. определяем $y_1, \ldots, y_{n-1}$ из системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_{n-1}} = 0. \tag{129}$$

Определяя при каждом n ту ломаную, которая дает минимум соответствующей функции n переменных, тем самым мы построим (минимизирующую) последовательность ломаных $y_{[n]}$, $n = 1, 2, \ldots$, которая в пределе $n \to \infty$ при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию $F(x, y, y')$ (см. [1]), даст решение вариационной задачи.

Если не совершать предельного перехода, то из системы уравнений (129) можно определить искомые ординаты y_k, $k = 1, \ldots, n-1$, и тем самым получить ломаную, являющуюся приближенным решением вариационной задачи.

Пример 58. Найти экстремаль функционала

$$J[y] = \int_0^1 ((y')^2 + y^2 + 2xy)dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

► Интервал $[0,1]$ разбивается на пять отрезков:

$$y_0 = y(0) = 1, \quad y_1 = y(0{,}2), \quad y_2 = y(0{,}4), \quad y_3 = y(0{,}6),$$
$$y_4 = y(0{,}8), \quad y_5 = y(1) = 2.$$

Тем самым получаем приближенную задачу на нахождение экстремума функционала

$$J[y_{[5]}] = \Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0{,}2 \sum_{k=0}^{4} \left[\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{0{,}2} \right)^2 + y_k^2 + 0{,}4 k y_k \right],$$

которая решается методами дифференциального исчисления:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} &= -9{,}92 + 20{,}4 y_1 - 10 y_2 = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} &= 0{,}16 - 10 y_1 + 20{,}4 y_2 - 10 y_3 = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y_3} &= 0{,}24 - 10 y_2 + 20{,}4 y_3 - 10 y_4 = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y_4} &= -19{,}68 - 10 y_3 + 20{,}4 y_4 = 0.
\end{aligned}$$

Нетрудно найти точное решение поставленной вариационной задачи:

$$y(x) = -x + \operatorname{ch} x - \frac{\operatorname{ch} 1 - 3}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{sh} x. \tag{130}$$

В следующей таблице сравниваются y_k, полученные на основе метода Эйлера, с точными значениями $y(0{,}2 \cdot k)$ (округленными до четвертого знака):

k	0	1	2	3	4	5
$y(0{,}2 \cdot k)$	1,0000	1,0701	1,1909	1,3754	1,6389	2,0000
y_k	1,0000	1,0697	1,1903	1,3747	1,6384	2,0000

◄

14.3 Метод Ритца

Пусть ищется минимум функционала $J[y]$, заданного на множестве функций $D(J)$ из линейного нормированного пространства E.

Рассмотрим некоторую последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{131}$$

из E такую, что как сами функции, так и их линейные комбинации

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \cdots \alpha_n \varphi_n(x) \tag{132}$$

являются допустимыми для функционала $J[y]$.

Система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, называемая *системой координатных функций*, такова, что функции $\varphi_k(x)$ линейно независимы и образуют в рассматриваемом пространстве *полную систему* функций (т.е. каждая функция $y(x) \in D(J)$ может быть приближена с любой степенью точности линейной комбинацией функций (132), причем число n зависит от требуемой точности вычислений).

Поставим задачу: при заданном n выбрать коэффициенты α_k, $k = 1, \ldots, n$, так, чтобы значение функционала на функции $y_n(x)$ было как можно меньше. Это – задача о нахождении минимума функции от n переменных (которыми являются $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$).

На линейных комбинациях (132) функционал $J[y_n]$ превращается в функцию коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$J[y_n(x)] = \Phi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Эти коэффициенты выбираются так, чтобы функция $\Phi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ достигала экстремума. Следовательно коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ должны быть определены из условий стационарности, т.е. из системы

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_n} = 0. \tag{133}$$

Таким образом, при каждом n мы получим соответствующий минимум $J_n = J[y_n]$. Ясно, что при увеличении n этот минимум не может возрастать, т.е.

$$J_1 \geq J_2 \geq \cdots ,$$

поскольку среди линейных комбинаций первых $n+1$ функций содержатся все линейные комбинации первых n функций.

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких условиях можно утверждать, что последовательность функций $y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ можно считать минимизирующей.

Теорема 28. *Если функционал $J[y]$ непрерывен (в смысле метрики того пространства, на котором он рассматривается), а система функций* (131) *– полная, то*

$$\lim_{n \to \infty} J_n = \inf_{y \in D(J)} J[y].$$

Доказательство теоремы можно найти в книге [5].

Рассмотрим простейшую вариационную задачу минимизации функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx \tag{134}$$

на множестве непрерывно дифференцируемых функций $y(x) \in C^1[a, b]$, подчиненных граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{135}$$

Тогда областью определения функционала будет множество

$$D(J) = \{y(x) \in C^1[a, b] : \ y(a) = A, \ y(b) = B\}.$$

Функции $\varphi_k(x)$ подбираются таким образом, чтобы линейная комбинация (132) удовлетворяла граничным условиям вариационной задачи. Если условия неоднородны, то проще всего искать решение вариационной задачи в виде

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x), \tag{136}$$

где

$$\begin{gathered} \varphi_0(a) = A, \quad \varphi_0(b) = B, \\ \varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{137}$$

Условиям (135), (137) удовлетворяет, например, последовательность функций

$$\begin{gathered} \varphi_0(x) = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a), \\ \varphi_k(x) = (x - a)^k (x - b), \quad k = 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

или

$$\varphi_k(x) = (x - a)(x - b)^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Условиям (135), (137) удовлетворяет также последовательность

$$\begin{gathered} \varphi_0(x) = A + (B - A) \sin\left(\frac{\pi(x - a)}{2(b - a)}\right), \\ \varphi_k(x) = \sin\left(k\pi \frac{x - a}{b - a}\right), \quad k = 1, 2, \ldots. \end{gathered}$$

На функциях (136) функционал $J[y]$ превращается в функцию коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$: $J[y_n(x)] = \Phi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. С учетом найденных из условий стационарности (133) значений $\alpha_k = \alpha_k^\star$, $k = 1, \ldots, n$

приближенное решение вариационной задачи (134), (135) запишется в виде

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\star \varphi_k(x).$$

В общем случае минимизирующая последовательность $\{y_n(x)\}$, полученная методом Ритца, не является сходящейся, т.е. может не стремиться к функции, реализующей экстремум в классе допустимых функций. Вопрос об условии сходимости последовательности $\{y_n(x)\}$ к решению вариационной задачи подлежит отдельному исследованию (см. работы [1, 9]).

Рассмотрим функционал вида (см. пример 15)

$$J[y] = \int_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2r(x)y]dx, \tag{138}$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{139}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 29. *Пусть в задаче* (138), (139) *выполняются условия:*

1) $p(x) \geq p_0 > 0$, $p(x) \in C^1[a, b]$;

2) $q(x) \geq 0$, $q(x)$, $r(x) \in C[a, b]$;

3) *последовательность* $\{y_n(x)\}$ *является минимизирующей.*

Тогда эта последовательность функций будет сходящейся равномерно на $[a, b]$ *к* $y_\star(x)$ *– решению задачи* (138), (139).

Доказательство теоремы можно найти в работах [1, 9].

Пример 59. Найти экстремум функционала

$$J[y] = \int_0^1 ((y')^2 + y^2 + 2xy)dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

► Полагаем $\varphi_0(x) = 1+x$. В качестве координатных функций выберем

$$\varphi_k(x) = x^{k+1} - x^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Эти функции удовлетворяют граничным условиям

$$\varphi_k(0) = 0, \quad \varphi_k(1) = 0.$$

Пусть $n = 1$. Ищем решение вариационной задачи в виде

$$y_1(x) = 1 + x + \alpha_1\varphi_1(x) = 1 + x + \alpha_1(x^2 - x).$$

Подстановка в интеграл дает

$$J[y_1] = 5 - \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{11}{30}\alpha_1^2 = \Phi(\alpha_1).$$

Из необходимого условия экстремума функции $\Phi(\alpha_1)$ найдем значение коэффициента α_1. Тогда функция $y_1(x)$ запишется в виде

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{11}x + \frac{10}{11}x^2.$$

Пусть $n = 2$. Тогда в соответствии с (136) получим

$$y_2(x) = 1 + x + \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = 1 + x + \alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x^3 - x^2).$$

После подстановки $y_2(x)$ в функционал и интегрирования получим

$$J[y_2] = 5 - \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{11}{30}\alpha_1^2 - \frac{11}{30}\alpha_2 + \frac{11}{30}\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{7}\alpha_2^2 = \Phi(\alpha_1, \alpha_2).$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума функции $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$, находим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1} = \frac{11}{15}\alpha_1 + \frac{11}{30}\alpha_2 - \frac{2}{3} = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_2} = \frac{11}{30}\alpha_1 + \frac{2}{7}\alpha_2 - \frac{11}{30} = 0.$$

Решая систему, получим

$$\alpha_1 = \frac{353}{473}, \quad \alpha_2 = \frac{14}{43}.$$

Следовательно, приближенное выражение $y_2(x)$ для экстремали $y(x)$ имеет вид

$$y_2(x) = 1 + \frac{120}{473}x + \frac{199}{473}x^2 + \frac{14}{43}x^3.$$

Сравним полученное методом Ритца приближенное решение $y_2(x)$ и точное решение (130) вариационной задачи при некоторых аргументах:

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y(x)$	1,0000	1,0697	1,1903	1,3747	1,6384	2,0000
$y_1(x)$	1,0000	1,0545	1,1818	1,3818	1,6546	2,0000
$y_2(x)$	1,0000	1,0702	1,1896	1,3740	1,6389	2,0000

Из таблицы видно, что значения уже второй из функций минимизирующей последовательности отличаются от значений точного решения в выбранных точках отрезка не более чем на $7 \cdot 10^{-4}$. ◀

Литература

[1] Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. – М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 248 с.

[2] Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Основы вариационного исчисления. Том 1. Часть 2. – М.: ОНТИ, 1935. – 400 с.

[3] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Едиториал УРСС, 1998. – 424 с.

[4] Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1950. – 347 с.

[5] Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.

[6] Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. – СПб.: Лань, 2009. - 320 с.

[7] Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – СПб.: Лань, 2005. – 191 с.

[8] Гурса Э. Курс математического анализа. Том 3. Часть 2. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. – М.;Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1934. – 318 с.

[9] Михлин С.Г. Курс математической физики. – СПб.: Лань, 2002. – 576 с.

[10] Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. – М.: Гос. изд-во физико-матем. лит-ры, 1961. – 436 с.

[11] Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В. Вариационное исчисление. – Л.: КУБУЧ, 1933. – 204 с.

[12] Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 159 с.

[13] Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: МИР, 1974. – 488 с.

[14] Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: Изд-во МГТУ, 1999. – 487 с.

[15] Краснов И.М., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика. Т.6. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 256 с.

[16] Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи: Учебн. пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 302 с.

[17] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Физматлит, 2007. – 408 с.

[18] Андреева В.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации: Учебн. пособие. – М.: Высшая школа, 2006. – 584с.

[19] Лутманов С.В. Курс лекций по методам оптимизации. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2001. – 368 с.

[20] Волков В.Т., Ягола А.Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций. Учеб. пособие для вузов. – М.: Университет, 2008. – 140 с.

[21] Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 344с.

[22] Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. Методы математической физики: I. Основы комплексного анализа. II. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002. – 672 с.

[23] Краснов М.П., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1973. – 191 с.

[24] Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. – М.: Физматлит, 2003. – 432 с.

[25] Волков В.Т., Ягола А.Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Методы решения задач. Учеб. пособие для вузов. – М.: Университет, 2007. – 140 с.

[26] Сборник задач по математике для втузов. Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: учебн. пособие. / под ред. Ефимова А.В. – М.: Наука, 1990. – 304 с.

[27] Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учебн. пособие. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.

[28] Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах: Учебн. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2000. – 228 с.

[29] Романко В.К., Агаханов Н.Х., Власов В.В., Коваленко Л.И. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. – М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. – 256 с.

[30] Леонов А.С., Волков Н.П. Сборник задач по вариационному исчислению и уравнениям математической физики. – М.: МИФИ, 1991. – 58 с.