

- 1.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{y}{y+1} \varphi(y) dy + e^x.$$

- 1.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{y^2 \varphi(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy = \frac{2}{3} x^3 + x.$$

- 1.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 |x - 1/2| \varphi(y) dy + x$$

в пространстве $C[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/2$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 1.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x \varphi(y) dy.$$

- 1.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, y) = e^{x^2 - y^2}.$$

- 1.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x + y - 2xy) \varphi(y) dy + x + x^2.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 1.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (\cos 2\pi x + 2x \sin 2\pi y + y \sin \pi x) \varphi(y) dy = 0.$$

- 1.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x + y) \varphi(y) dy + ax + b$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

- 1.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} (y-1)x, & 0 \leq x \leq y, \\ y(x-1), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

- 1.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^x - \int_0^x e^{x-y} \varphi(y) dy.$$

- 1.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = -1 + \int_0^x \varphi_2(y) dy, \\ \varphi_2(x) = x - \int_0^x \varphi_1(y) dy. \end{cases}$$

- 2.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{2y}{x^2} \varphi(y) dy + x^2.$$

- 2.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy + 2x + 1.$$

- 2.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x^{-1/4} y \varphi(y) dy + x^2$$

в пространстве $L_2[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/2$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 2.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x-y} \varphi(y) dy + e^x.$$

- 2.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту для ядра $K(x, y) = x \sin y + \sin 2x$ при $a = -\pi$, $b = \pi$.

- 2.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2 y^2) \varphi(y) dy + x^2 + x^4.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 2.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (\cos 2\pi(x-y) - 1) \varphi(y) dy = 0.$$

- 2.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 y + xy^2) \varphi(y) dy + ax + bx^3$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

2.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy = 1, \quad K(x, y) = \begin{cases} (y-1)x, & 0 \leq x \leq y, \\ y(x-1), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{y-x}\varphi(y)dy.$$

2.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + \int_0^x e^{2(x-y)}\varphi'(y)dy = e^{2x}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

- 3.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int_0^x (x-y)\varphi(y)dy = e^x - x - 1.$$

- 3.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_1^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy = x^2 - 1.$$

- 3.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 - 1)y^2 \varphi(y) dy + x$$

в пространстве $C[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/3$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 3.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = x + \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy.$$

- 3.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+y^2} \varphi(y) dy.$$

- 3.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^{1/3} + y^{1/3})\varphi(y)dy + 1 - 6x^2.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 3.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 [(x/y)^{2/5} + (y/x)^{2/5}] \varphi(y) dy = 0.$$

- 3.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^0 (1+x)(1-y)\varphi(y)dy + ae^x + b$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

3.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq y, \\ -y, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

3.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy.$$

3.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = -x + \int_0^x \varphi_2(y)dy, \\ \varphi_2(x) = -3x^2 + x - 5 \int_0^x \varphi_1(y)dy + \int_0^x \varphi_2(y)dy. \end{cases}$$

- 4.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy + 2 \operatorname{sh} x.$$

- 4.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy + e^{\pi x}.$$

- 4.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sin(\pi x/2) \cos(\pi x/2) \varphi(y) dy + \cos(\pi x/2)$$

в пространстве $L_2[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/4$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 4.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \int_0^1 yx\varphi(y)dy + \sqrt{1-x^2}.$$

- 4.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (xy - y)\varphi(y)dy + \sin \pi x.$$

С помощью резольвенты построить решение уравнения при $\lambda = 3$ и проверить его прямой подстановкой.

- 4.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^4 + 5x^3y)\varphi(y)dy + x^2 - x^4.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 4.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} [\cos^2(x+y) + 1/2] \varphi(y) dy = 0.$$

4.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(2x - y)\varphi(y)dy + a(\sin x - \sin^3 x) + b \cos x$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

4.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy = \sin \pi x \cos \frac{\pi}{2}x, \quad K(x, y) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq y, \\ -y, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

4.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-y}\varphi(y)dy.$$

4.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi'(x) - \varphi(x) + \int_0^x (x - y)\varphi'(y)dy - \int_0^x \varphi(y)dy = x, \quad \varphi(0) = -1.$$

- 5.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = 2 \int_0^x \frac{\varphi(y)}{2y+1} dy + 4x.$$

- 5.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_1^x \frac{e^{2y}\varphi(y)}{\sqrt{x^2-y^2}} dy = x^2 - 1.$$

- 5.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-2}^2 (1+y)(1-x)\varphi(y) dy + x$$

в пространстве $C[-2, 2]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/40$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 5.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x \operatorname{tg} y \varphi(y) dy.$$

- 5.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, y) = \frac{2 + \cos x}{2 + \cos y}.$$

- 5.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2xy^3 + 5x^2y^2)\varphi(y) dy + 7x^4 + 3.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 5.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} [\sin(x+y) + 1/2] \varphi(y) dy = 0.$$

- 5.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (y \sin x + \cos y)\varphi(y) dy + ax + b$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

- 5.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} -x - 1, & 0 \leq x \leq y, \\ -y - 1, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

- 5.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \cos x - \int_0^x (x - y) \cos(x - y) \varphi(y) dy.$$

- 5.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_2(y) dy, \\ \varphi_2(x) = \frac{x^3}{6} + 2x - 1 - \int_0^x (x - y) \varphi_1(y) dy. \end{cases}$$

- 6.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int_0^x e^{x-y} \varphi(y) dy = \frac{1}{2} x^2.$$

- 6.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy + x^{3/2} + 1.$$

- 6.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{1-x} \varphi(y) dy + 3$$

в пространстве $L_2[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/16$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 6.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \int_0^1 x e^{x-y} \varphi(y) dy + e^x.$$

- 6.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту для ядра $K(x, y) = \sin(x - 2y)$ при $a = 0, b = 2\pi$.

- 6.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - xy) \varphi(y) dy + x^2 + x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 6.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 y^2 - 1) \varphi(y) dy = 0.$$

- 6.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (3x + xy - 5x^2 y^2) \varphi(y) dy + ax$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

6.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x, y)\varphi(y)dy = x - \pi, \quad K(x, y) = \begin{cases} \sin y \cos x, & 0 \leq x \leq y, \\ \cos y \sin x, & y \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

6.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x e^{-2(x-y)}\varphi(y)dy.$$

6.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) - 2\varphi'(x) + \varphi(x) + 2 \int_0^x \cos(x-y)\varphi''(y)dy + 2 \int_0^x \sin(x-y)\varphi'(y)dy = \cos x,$$
$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

- 7.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = 4 \int_0^x (y-x)\varphi(y)dy + 3 \cos x.$$

- 7.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{e^x - e^y}} dy = e^x - 1.$$

- 7.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 xy^2\varphi(y)dy + 2$$

в пространстве $C[-1, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/10$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 7.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \frac{\varphi(y)}{x+y} dy.$$

- 7.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^x e^{x-y}\varphi(y)dy.$$

- 7.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (5 + 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 9x^2y^2)\varphi(y)dy + x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 7.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{ch} y - y \operatorname{ch} x)\varphi(y)dy = 0.$$

- 7.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos x)\varphi(y)dy + ax + b$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

7.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} \cos y \sin x, & 0 \leq x \leq y, \\ \sin y \cos x, & y \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

7.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy.$$

7.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x - \int_0^x \varphi_1(y)dy + 4 \int_0^x e^{x-y}\varphi_2(y)dy, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{-(x-y)}\varphi_1(y)dy + \int_0^x \varphi_2(y)dy. \end{cases}$$

- 8.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{\cos y} \varphi(y) dy + 1.$$

- 8.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy + x + 2x^{3/2}.$$

- 8.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 y^{-1/5} \varphi(y) dy + x^2$$

в пространстве $L_2[-1, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/14$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 8.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin y \varphi(y) dy + \sin x.$$

- 8.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_1^e \frac{\ln y}{x} \varphi(y) dy + \ln x.$$

С помощью резольвенты построить решение уравнения при $\lambda = e$ и проверить его прямой подстановкой.

- 8.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(2x+y) \varphi(y) dy + \pi - 2x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 8.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{ch} y - y^2 \operatorname{sh} x) \varphi(y) dy = 0.$$

8.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos y + \sin x \sin y) \varphi(y) dy + a + b \cos x$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

8.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = \frac{x}{2}, \quad K(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-y), & 0 \leq x \leq y, \\ \frac{1}{2}y(2-x), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

8.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-y) \varphi(y) dy.$$

8.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + 2\varphi'(x) - 2 \int_0^x \sin(x-y) \varphi'(y) dy = \cos x, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

- 9.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int_0^x 3^{x-y} \varphi(y) dy = x.$$

- 9.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{e^{x-y} \varphi(y)}{\sqrt{e^{2x} - e^{2y}}} dy = e^{3x} - e^x.$$

- 9.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x(1+y) \varphi(y) dy - 5$$

в пространстве $C[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/3$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 9.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = x^2 + 2 \int_0^x y \varphi(y) dy.$$

- 9.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, y) = a^{x-y}, \quad a > 0.$$

- 9.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x-2y) \varphi(y) dy + \cos 2x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 9.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh} x) \varphi(y) dy = 0.$$

- 9.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (xy + x^2 y^2) \varphi(y) dy + ax + b$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

9.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y-1) \sin x}{\sin 1}, & 0 \leq x \leq y, \\ \frac{\sin y \sin(x-1)}{\sin 1}, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

9.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = x - \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy.$$

9.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_2(y)dy, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \varphi_1(y)dy, \\ \varphi_3(x) = \sin x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-y)\varphi_1(y)dy. \end{cases}$$

- 10.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{4y - 5x}{y^2} \varphi(y) dy + \ln x.$$

- 10.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy + 2x + 1.$$

- 10.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 x^2 y^2 \varphi(y) dy + x^3$$

в пространстве $L_2[-1, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/2$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 10.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \int_1^e \frac{\ln y}{x} \varphi(y) dy + \ln x.$$

- 10.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту для ядра $K(x, y) = x^2 y - xy^2$ при $0 \leq x \leq 1$.

- 10.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(2x + y) \varphi(y) dy + \sin x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 10.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (5xy^3 + 4x^2y + 3xy) \varphi(y) dy = 0.$$

- 10.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1 + xy}{1 + y^2} \varphi(y) dy + a + x + bx^2$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

10.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy = \frac{x}{2}, \quad K(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-y), & 0 \leq x \leq y, \\ \frac{1}{2}y(2-x), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

10.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x-y) - 4(x-y)^2]\varphi(y)dy.$$

10.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-y)\varphi(y)dy + \int_0^x \operatorname{ch}(x-y)\varphi'(y)dy = \operatorname{ch} x, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

- 11.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{x \cos x}{y \cos y} \varphi(y) dy + e^x \cos x.$$

- 11.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y}} dy = \operatorname{ch} x - 1.$$

- 11.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 |x - 1/2| \varphi(y) dy + x$$

в пространстве $C[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/2$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 11.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \frac{x\varphi(y)}{x^2 + y^2} dy.$$

- 11.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = x^2 + \lambda \int_0^x (x - y)\varphi(y) dy.$$

- 11.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(3x + y)\varphi(y) dy + \cos x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 11.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (5xy^3 + 4x^2y)\varphi(y) dy = 0.$$

- 11.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})\varphi(y) dy + ax^2 + bx + c$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

11.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(y-1) \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leq x \leq y, \\ \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{sh}(y-1)}{\operatorname{sh} 1}, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

11.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \operatorname{sh} x - \int_0^x \operatorname{ch}(x-y) \varphi(y) dy.$$

11.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \sin x + \int_0^x \varphi_2(y) dy, \\ \varphi_2(x) = 1 - \cos x - \int_0^x \varphi_1(y) dy. \end{cases}$$

- 12.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy = 1 - \cos x.$$

- 12.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}}dy + e^{\pi x} + 1.$$

- 12.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x^{-1/4}y\varphi(y)dy + x^2$$

в пространстве $L_2[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/2$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 12.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \int_0^1 \sqrt{xy}\varphi(y)dy + x.$$

- 12.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} x \sin y\varphi(y)dy + \sin x.$$

С помощью резольвенты построить решение уравнения при $\lambda = 4$ и проверить его прямой подстановкой.

- 12.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} (\sin y + y \cos x)\varphi(y)dy + 1 - \frac{2}{\pi}x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 12.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2xy - 4x^2)\varphi(y)dy = 0.$$

12.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2 + y^2 - 3x^2y^2)\varphi(y)dy + ax + b$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

12.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy = xe^x, \quad K(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(y-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leq x \leq y, \\ \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

12.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + 2 \int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)dy.$$

12.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-y)\varphi(y)dy + \int_0^x \operatorname{ch}(x-y)\varphi'(y)dy = \operatorname{ch} x, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

- 13.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^x [3(x-y) - (x-y)^2] \varphi(y) dy + e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1.$$

- 13.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{(y+1)^2 \varphi(y)}{\sqrt{\ln x - \ln y}} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 + x.$$

- 13.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 - 1)y^2 \varphi(y) dy + x$$

в пространстве $C[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/3$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 13.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \frac{y\varphi(y)}{x^2 + y^2} dy.$$

- 13.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, y) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} y}.$$

- 13.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \cos^2(x-y) \varphi(y) dy + 1 + \cos 4x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 13.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (45x^2 \ln y - 9y^2 \ln x) \varphi(y) dy = 0.$$

- 13.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2 y^2) \varphi(y) dy + ax^2 + bx + c$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

13.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \frac{1}{2} \sin |x - y|, \quad 0 \leq x \leq y \leq \pi.$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

13.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^x + 2 \int_0^x \cos(x - y) \varphi(y) dy.$$

13.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{2x} + \int_0^x \varphi_2(y) dy, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{2(x-y)} \varphi_1(y) dy. \end{cases}$$

14.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = 2 \int_0^x \frac{1+y^2}{1-x^4} \varphi(y) dy + \frac{(1-3x)(1+x)}{1+x^2}.$$

14.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy + x^{3/2}.$$

14.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sin(\pi x/2) \cos(\pi x/2) \varphi(y) dy + \cos(\pi x/2)$$

в пространстве $L_2[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/4$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

14.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{y^3}} \varphi(y) dy + x^{3/2}.$$

14.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту для ядра $K(x, y) = \sin x - \sin y$ при $a = 0, b = 2\pi$.

14.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y) \varphi(y) dy + \cos 3x.$$

Построить резольвенту уравнения.

14.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi \cos(x+y) \varphi(y) dy = 0.$$

14.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1+xy) \varphi(y) dy + ax^2 + bx + c, \quad \text{где } a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

14.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy = x^3 - x^2, \quad K(x, y) = \begin{cases} x - y, & 0 \leq x \leq y, \\ y - x, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

14.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x \varphi(y)dy.$$

14.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + \int_0^x e^{2(x-y)}\varphi'(y)dy = e^{2x}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

- 15.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int_0^x \operatorname{sh}(x-y)\varphi(y)dy = \operatorname{sh} x - x.$$

- 15.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_1^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{\ln x - \ln y}} dy = \frac{1}{2} \ln x.$$

- 15.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-2}^2 (1+y)(1-x)\varphi(y)dy + x$$

в пространстве $C[-2, 2]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/40$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 15.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x y^p \varphi(y) dy, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

- 15.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = x e^{\frac{x^2}{2}} + \int_0^x e^{-(x-y)} \varphi(y) dy.$$

- 15.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\cos x \cos y + 2 \sin 2x \sin 2y) \varphi(y) dy + \cos x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 15.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \sin y \varphi(y) dy = 0.$$

- 15.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{1+xy}{\sqrt{1-y^2}} \varphi(y) dy + x^2 + ax + b$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

15.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} -e^{-y} \operatorname{ch} x, & 0 \leq x \leq y, \\ -\operatorname{ch} y e^{-x}, & y \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

15.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-y)^2 \varphi(y) dy.$$

15.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int_0^x \varphi_1(y) dy - \int_0^x e^{x-y} \varphi_2(y) dy, \\ \varphi_2(x) = -x - \int_0^x (x-y) \varphi_1(y) dy + \int_0^x \varphi_2(y) dy. \end{cases}$$

- 16.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{4x - 3y}{y^2} \varphi(y) dy + 4x \ln x - 1.$$

- 16.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy - x^{3/2} + 1.$$

- 16.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{1-x} \varphi(y) dy + 3$$

в пространстве $L_2[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/16$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 16.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi y \sin x \varphi(y) dy + \cos x.$$

- 16.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 yx \varphi(y) dy + \sqrt{1-x^2}.$$

С помощью резольвенты построить решение уравнения при $\lambda = 6$ и проверить его прямой подстановкой.

- 16.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \sin y + 3 \cos 2x \cos 2y) \varphi(y) dy + \sin 3x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 16.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos y \varphi(y) dy = 0.$$

16.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left(xy - \frac{1}{3}\right) \varphi(y) dy + ax^2 - bx + 1$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

16.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi/2} K(x, y) \varphi(y) dy = \cos 2x, \quad K(x, y) = \begin{cases} \sin x \cos y, & 0 \leq x \leq y, \\ \sin y \cos x, & y \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

16.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-y} \varphi(y) dy.$$

16.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi'(x) - \varphi(x) + \int_0^x (x-y) \varphi'(y) dy - \int_0^x \varphi(y) dy = x, \quad \varphi(0) = -1.$$

17.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = 2 \int_e^x \frac{\varphi(y)}{y \ln x} dy + 1.$$

17.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{e^{-y^2} \varphi(y)}{\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}}} dy = x^2 + x.$$

17.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 xy^2 \varphi(y) dy + 2$$

в пространстве $C[-1, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/10$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

17.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x (x - y) \varphi(y) dy.$$

17.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, y) = \frac{y^2 - y + 1}{x^2 - x + 1}.$$

17.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (4xy - x^2) \varphi(y) dy + x.$$

Построить резольвенту уравнения.

17.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \varphi(y) dy = 0.$$

17.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x + y) \varphi(y) dy + ax + b + 1$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

17.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} y(x-1), & 0 \leq x \leq y, \\ x(y-1), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

17.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)dy.$$

17.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - \int_0^x \varphi_2(y)dy, \\ \varphi_2(x) = \cos x - 1 + \int_0^x \varphi_3(y)dy, \\ \varphi_3(x) = \cos x + \int_0^x \varphi_1(y)dy. \end{cases}$$

- 18.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int_0^x (x-y)^2 \varphi(y) dy = x^3.$$

- 18.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy + x - x^{3/2}.$$

- 18.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 y^{-1/5} \varphi(y) dy + x^2$$

в пространстве $L_2[-1, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/14$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 18.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \int_0^1 yx\varphi(y) dy + 2x.$$

- 18.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту для ядра $K(x, y) = x \sin(2\pi y)$ при $a = 0, b = 1$.

- 18.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (3xy + 5x^2y^2)\varphi(y) dy + x^2 + x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 18.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi \cos(x-y)\varphi(y) dy = 0.$$

- 18.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2x+4y)\varphi(y) dy + e^{ax+b}$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

18.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x, y)\varphi(y)dy = 1, \quad K(x, y) = \begin{cases} \sin x \cos y, & 0 \leq x \leq y, \\ \sin y \cos x, & y \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

18.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-y)e^{-(y-x)}\varphi(y)dy.$$

18.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) - 2\varphi'(x) + \varphi(x) + 2 \int_0^x \cos(x-y)\varphi''(y)dy + 2 \int_0^x \sin(x-y)\varphi'(y)dy = \cos x, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

19.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{x}{y^2} \varphi(y) dy + x^2.$$

19.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{y^2 \varphi(y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{1/4}} dy = x.$$

19.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x(1+y)\varphi(y) dy - 5$$

в пространстве $C[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/3$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

19.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = 2^x + \int_0^x 2^{x-y} \varphi(y) dy.$$

19.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = x + \int_0^x (y-x)\varphi(y) dy.$$

19.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 y^2 + 4xy + 1)\varphi(y) dy + 2\pi^2 \cos 2\pi x.$$

Построить резольвенту уравнения.

19.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi \sin(x+y)\varphi(y) dy = 0.$$

19.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi (\sin x \sin 2y + \sin 2x \sin 4y)\varphi(y) dy + ax^2 + bx + c$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

19.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} (x+1)(y-2), & 0 \leq x \leq y, \\ (y+1)(x-2), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

19.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-y)^2 \varphi(y) dy.$$

19.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + 1 + \int_0^x \varphi_3(y) dy, \\ \varphi_2(x) = -x + \int_0^x (x-y) \varphi_1(y) dy, \\ \varphi_3(x) = \cos x - 1 - \int_0^x \varphi_1(y) dy. \end{cases}$$

20.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = - \int_0^x e^{x-y} \cos x \varphi(y) dy + e^{x-\sin x}.$$

20.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy - e^x + 1.$$

20.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 x^2 y^2 \varphi(y) dy + x^3$$

в пространстве $L_2[-1, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/2$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

20.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 y \varphi(y) dy + 1.$$

20.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x e^{x-y} \varphi(y) dy + e^x.$$

С помощью резольвенты построить решение уравнения при $\lambda = -2$ и проверить его прямой подстановкой.

20.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} \cos(x-y) \varphi(y) dy + x.$$

Построить резольвенту уравнения.

20.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \left(x \sin 2\pi y - \frac{1}{2\pi} \right) \varphi(y) dy = 0.$$

20.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1 + x^2 + y^3) \varphi(y) dy + ax + bx^3$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

20.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = x, \quad K(x, y) = \begin{cases} (x+1)(y-3), & 0 \leq x \leq y, \\ (y+1)(x-3), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

20.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = x + 2 \int_0^x [(x-y) - \sin(x-y)] \varphi(y) dy.$$

20.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + 2\varphi'(x) - 2 \int_0^x \sin(x-y) \varphi'(y) dy = \cos x, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

21.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int_0^x (x-y)^2 \varphi(y) dy = x^3 + x^2.$$

21.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{xy^2 \varphi(y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{1/3}} dy = x^2 - x.$$

21.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 |x - 1/2| \varphi(y) dy + x$$

в пространстве $C[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/2$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

21.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1+x^2}{1+y^2} \varphi(y) dy.$$

21.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, y) = 2^{\text{sh } x - \text{sh } y}.$$

21.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} \sin(x - 2y) \varphi(y) dy + 2.$$

Построить резольвенту уравнения.

21.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (xe^y + 2y) \varphi(y) dy = 0.$$

21.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+y) \varphi(y) dy + a \sin x + b$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

21.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} \sin x \cos y, & 0 \leq x \leq y, \\ \sin y \cos x, & y \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

21.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \sin 2(x-y) \varphi(y) dy.$$

21.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_1(y) dy + \int_0^x (x-y) \varphi_2(y) dy, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{x-y} \varphi_1(y) dy + \int_0^x \varphi_2(y) dy. \end{cases}$$

22.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)dy + x.$$

22.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}}dy + e^{\pi x}.$$

22.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x^{-1/4}y\varphi(y)dy + x^2$$

в пространстве $L_2[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/2$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

22.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1-x) \sin(2\pi y)\varphi(y)dy + \frac{1}{2}(1-x).$$

22.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту для ядра $K(x, y) = \sin x \sin y$ при $a = 0, b = 1$.

22.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^1 (xe^y + ye^x)\varphi(y)dy + e^x.$$

Построить резольвенту уравнения.

22.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x+y)\varphi(y)dy = 0.$$

22.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1+xy)\varphi(y)dy + ax^2 + bx + c$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

22.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy = \pi x + 1, \quad K(x, y) = \begin{cases} -e^{-y} \operatorname{sh} x, & 0 \leq x \leq y, \\ -e^{-x} \operatorname{sh} y, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

22.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{6} \int_0^x (x - y)^3 \varphi(y) dy.$$

22.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x - y)\varphi(y)dy + \int_0^x \operatorname{ch}(x - y)\varphi'(y)dy = \operatorname{ch} x, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

23.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_{\pi/2}^x \frac{\cos y}{\sin x} \varphi(y) dy - \frac{\operatorname{ctg} x}{x^2}.$$

23.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^{2/3}} dy = x + 2x^{4/3}.$$

23.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 - 1)y^2 \varphi(y) dy + x$$

в пространстве $C[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/3$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

23.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = x - \int_0^x (x-y)\varphi(y) dy.$$

23.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^{x^2+2x} + 2 \int_0^x e^{x^2-y^2} \varphi(y) dy.$$

23.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sin(3x-y) + \sin x) \varphi(y) dy + 3\pi \cos 2x.$$

Построить резольвенту уравнения.

23.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi \cos x \cos y \varphi(y) dy = 0.$$

23.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (3xy + 5x^2y^2) \varphi(y) dy + ax^2 + bx$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

23.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} \sin x \cos y, & 0 \leq x \leq y, \\ \sin y \cos x, & y \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

23.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^x - x - 1 + \int_0^x \varphi(y) dy.$$

23.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2x - \int_0^x (x-y)\varphi_1(y)dy + \int_0^x \varphi_2(y)dy, \\ \varphi_2(x) = -2 - 4 \int_0^x \varphi_1(y)dy + 3 \int_0^x (x-y)\varphi_2(y)dy. \end{cases}$$

- 24.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int_0^x (1+x-y)\varphi(y)dy = \frac{1}{2}e^{-x} \sin x.$$

- 24.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy + e^{\pi x} + 1.$$

- 24.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sin(\pi x/2) \cos(\pi x/2) \varphi(y) dy + \cos(\pi x/2)$$

в пространстве $L_2[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/4$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 24.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin x \varphi(y) dy + 2 \sin x.$$

- 24.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-y} \varphi(y) dy + e^x.$$

С помощью резольвенты построить решение уравнения при $\lambda = 2$ и проверить его прямой подстановкой.

- 24.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 2 \int_0^1 (\sin 2\pi(x-y) - 2) \varphi(y) dy + 5x.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 24.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi x \sin y \varphi(y) dy = 0.$$

24.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 [5(xy)^{1/3} + 7(xy)^{2/3}] \varphi(y) dy + ax + bx^{1/3}$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

24.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = 2x - 1, \quad K(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch}(y+1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leq x \leq y, \\ \frac{\operatorname{ch} y \operatorname{ch}(x+1)}{\operatorname{sh} 1}, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

24.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-y) \varphi(y) dy.$$

24.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-y) \varphi(y) dy + \int_0^x \operatorname{ch}(x-y) \varphi'(y) dy = \operatorname{ch} x, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

25.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = 6 \int_0^x \cos 5(x-y)\varphi(y)dy - 4e^{5x}.$$

25.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^{1/3}} dy = x + 2x^{5/3}.$$

25.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-2}^2 (1+y)(1-x)\varphi(y)dy + x$$

в пространстве $C[-2, 2]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/40$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

25.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy.$$

25.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, y) = e^{x-y}.$$

25.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x+y-2xy)\varphi(y)dy + x + x^2.$$

Построить резольвенту уравнения.

25.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 |x|\varphi(y)dy = 0.$$

25.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 yx\varphi(y)dy + ax^2 + bx + c$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

25.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin(y - 1), & -\pi \leq x \leq y, \\ \sin y \sin(x - 1), & y \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

25.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = xe^{2x} - \int_0^x e^{2(x-y)} \varphi(y) dy.$$

25.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2 - \int_0^x (x-y)\varphi_1(y)dy - 4 \int_0^x \varphi_2(y)dy, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \varphi_1(y)dy - \int_0^x (x-y)\varphi_2(y)dy. \end{cases}$$

26.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_{\pi/4}^x \frac{\varphi(y)}{\cos x \sin y} dy + 1.$$

26.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy + x^{3/2}.$$

26.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{1-x}\varphi(y)dy + 3$$

в пространстве $L_2[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/16$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

26.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\cos(x+y) + \cos(x-y))\varphi(y)dy + \cos x.$$

26.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту для ядра $K(x, y) = x - \operatorname{sh} y$ при $a = -1, b = 1$.

26.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2y^2)\varphi(y)dy + x^2 + x^4.$$

Построить резольвенту уравнения.

26.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (1-x^2)\varphi(y)dy = 0.$$

26.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} yx\varphi(y)dy + ax + b \sin x$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

26.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x, y)\varphi(y)dy = x - \pi, \quad K(x, y) = \begin{cases} \sin y \cos x, & 0 \leq x \leq y, \\ \cos y \sin x, & y \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

26.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^x \sin(x - y)\varphi(y)dy.$$

26.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + \int_0^x e^{2(x-y)}\varphi'(y)dy = e^{2x}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

27.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int_0^x (1 - x^2 + y^2)\varphi(y)dy = \frac{1}{2}x^2.$$

27.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^{1/3}}dy = x^2 + 3x^{8/3}.$$

27.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 xy^2\varphi(y)dy + 2$$

в пространстве $C[-1, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/10$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

27.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy.$$

27.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 - 2x - \int_0^x e^{x^2-y^2}\varphi(y)dy.$$

27.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^{1/3} + y^{1/3})\varphi(y)dy + 1 - 6x^2.$$

Построить резольвенту уравнения.

27.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (1+2x)y\varphi(y)dy = 0.$$

27.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x+y)\varphi(y)dy + ae^x + bx$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

27.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = e^{-|x-y|}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

27.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \sin x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-y)\varphi(y)dy.$$

27.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = -1 + \int_0^x \varphi_2(y)dy, \\ \varphi_2(x) = x - \int_0^x \varphi_1(y)dy. \end{cases}$$

- 28.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = 2 \int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy + e^x.$$

- 28.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy + x + 2.$$

- 28.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 y^{-1/5} \varphi(y) dy + x^2$$

в пространстве $L_2[-1, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/14$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

- 28.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = x^2 + \int_0^x \varphi(y) dy.$$

- 28.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \sin 2x) \varphi(y) dy = \sin x.$$

Указание. Используйте ортогональность ядер.

- 28.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^4 + 5x^3y) \varphi(y) dy + x^2 - x^4.$$

Построить резольвенту уравнения.

- 28.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} (\sin x \sin 4y + \sin 2x \sin 3y + \sin 3x \sin 2y + \sin 4x \sin y) \varphi(y) dy = 0.$$

- 28.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x+y) \varphi(y) dy + ax + b$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

28.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy = 1, \quad K(x, y) = \begin{cases} (y-1)x, & 0 \leq x \leq y, \\ y(x-1), & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

28.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-y)^2 \varphi(y)dy.$$

28.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi'(x) - \varphi(x) + \int_0^x (x-y)\varphi'(y)dy - \int_0^x \varphi(y)dy = x, \quad \varphi(0) = -1.$$

29.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1-y^2}{1-x^4} \varphi(y) dy + \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1-x^2}.$$

29.2. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^{1/3}} dy = x^3 + 4x^{11/3}.$$

29.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x(1+y)\varphi(y) dy - 5$$

в пространстве $C[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/3$ с точностью $0,01$ найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

29.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x-y} \varphi(y) dy + e^x.$$

29.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром

$$K(x, y) = xy^2.$$

29.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2xy^3 + 5x^2y^2)\varphi(y) dy + 7x^4 + 3.$$

Построить резольвенту уравнения.

29.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2y + \cos 3x \cos^3 y)\varphi(y) dy = 0.$$

29.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2y + xy^2)\varphi(y) dy + ax + bx^3$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

29.9. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x, y) = \begin{cases} -e^{-y} \operatorname{sh} x, & 0 \leq x \leq y, \\ -e^{-x} \operatorname{sh} y, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Построить резольвенту интегрального уравнения в виде разложения по собственным функциям ядра.

29.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-y)e^{x-y}\varphi(y)dy.$$

29.11. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = -x + \int_0^x \varphi_2(y)dy, \\ \varphi_2(x) = -3x^2 + x - 5 \int_0^x \varphi_1(y)dy + \int_0^x \varphi_2(y)dy. \end{cases}$$

30.1. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\int_1^x (2y - x)\varphi(y)dy = x^3 - 1.$$

30.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy + 2e^{\pi x} + 1.$$

30.3. Определить при каких значениях параметра λ к интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 x^2 y^2 \varphi(y) dy + x^3$$

в пространстве $L_2[-1, 1]$ применим принцип сжимающих отображений. При $\lambda = 1/2$ с точностью 0,01 найти приближенное решение и сравнить его с точным решением.

30.4. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x y^p \varphi(y) dy, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

30.5. Методом итерированных ядер найти резольвенту для ядра $K(x, y) = 4xy - x^2$ при $a = 0, b = 1$.

30.6. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - xy)\varphi(y) dy + x^2 + x.$$

Построить резольвенту уравнения.

30.7. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (45x^2 \ln y - 9y^2 \ln x)\varphi(y) dy = 0.$$

30.8. Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^0 (1+x)(1-y)\varphi(y) dy + ae^x + b$$

при различных значениях параметра λ и параметров, входящих в свободный член этого уравнения.

30.9. Найти решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром при различных значениях параметра λ

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy = \sin \pi x \cos \frac{\pi}{2}x, \quad K(x, y) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq y, \\ -y, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

30.10. С помощью преобразования Лапласа построить резольвенту и найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \cos(x - y) \sin(x - y)\varphi(y)dy.$$

30.11. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) - 2\varphi'(x) + \varphi(x) + 2 \int_0^x \cos(x - y)\varphi''(y)dy + 2 \int_0^x \sin(x - y)\varphi'(y)dy = \cos x, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$