1.1. Найти норму элемента $y(x)$ в пространствах $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$:

$$y(x) = \frac{\cos nx}{n^2+1}, \quad n = 1, 10, 100, \quad x \in [0, 2\pi].$$

1.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int_1^3 [2y - yy' + x(y')^2]dx, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 4.$$

1.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^1 [y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = -\operatorname{sh} 1.$$

1.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2}dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -2, \quad y_1(3) = 7, \quad y_2(3) = 1.$$

1.5. Найти допустимые экстремали и значение $x_2$ в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x-2}dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_2) + 4x_2 - 4 = 0.$$

1.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} [y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2 + \cos x]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1,$$

$$y_1 - y_2 - 2\sin x = 0.$$

1.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \int_0^1 xydx = 0.$$

2.1. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^1 xy^2y'dx, \quad y_0(x) = x^2, \quad \delta y(x) = x - 2.$$

2.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left[y - \frac{1}{2}(y')^2\right] \sin x dx, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\ln\sqrt{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

2.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{-1}^{0} [240y - (y''')^2]dx,$$

$$y(-1) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(-1) = -4,5, \quad y'(0) = 0, \quad y''(-1) = 16, \quad y''(0) = 0.$$

2.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2, y_3] = \int\limits_2^4 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2 + (y_3')^2}dx,$$

$$y_1(2) = 1, \quad y_2(2) = 2, \quad y_3(2) = 5, \quad y_1(4) = 3, \quad y_2(4) = 4, \quad y_3(4) = 9.$$

2.5. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^2 [2xy + (y')^2]dx, \quad y(0) = 0.$$

2.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + 2(y_2')^2 + y_2^2]dx,$$

$$y_1(0) = -2, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = -e^{-1}, \quad y_2(1) = 0,$$

$$y_1 - y_2' = 0.$$

2.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 y dx = 1, \quad \int\limits_0^1 xy dx = 0.$$

3.1. Определить сходится ли последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

к функции $y_0(x) = 0$ по норме пространства: а) $C[0, \pi]$; б) $C^1[0, \pi]$.

3.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 + 4y^2 + 2y\cos x]dx, \quad y(0) = \frac{4}{5}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}.$$

3.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y')^2 + (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \operatorname{sh} 1, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = \operatorname{ch} 1.$$

3.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1 y_2]dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = 1.$$

3.5. Методами вариационного исчисления найти кратчайшее расстояние от точки $A(0, 0)$ до кривой $y = \frac{1}{x^4}$.

3.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2 + x^3]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(1) = 2, \quad y_2(0) = y_1(1) = 1,$$

$$y_1 - 2y_2 + 3x = 0.$$

3.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad \int\limits_0^{\pi} y \sin x dx = 0.$$

4.1. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^1 xy^3 dx, \quad y_0(x) = \sin x, \quad \delta y(x) = x.$$

4.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_0^1 [xyy' - 2(y')^2] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \operatorname{ch}\frac{1}{2}.$$

4.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (y'')^2 dx,$$
$$y(0) = y(1) = y'(1) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

4.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 (y_1' y_2' + 6xy_1 + 12x^2 y_2) dx,$$
$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1.$$

4.5. Найти допустимые экстремали и значения $x_1$ и $x_2$ в задаче с подвижными границами

$$J[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad y(x_1) = x_1^2, \quad y(x_2) = x_2 - 5.$$

4.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2 + 1] dx,$$
$$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, \quad y_1(1) = 2,$$
$$y_1 + y_2 - 2x^2 = 0.$$

4.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^\pi y \sin x dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi, \quad \int\limits_0^\pi (y')^2 dx = \frac{3}{2}\pi.$$

5.1. Найти расстояние между элементами $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в пространствах $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$:

$$y_1(x) = \ln x, \quad y_2(x) = x, \quad x \in [e^{-1}, e].$$

5.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} [(y' + y)^2 + 2y \sin x] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1.$$

5.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y''')^2 dx,$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4, \quad y''(1) = 12.$$

5.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1] dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = \frac{3}{2}, \quad y_2(1) = 1.$$

5.5. Найти допустимые экстремали и значение $x_2$ в задаче с подвижными границами

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 + y^2] dx, \quad y(x_2) + x_2 - 1 = 0.$$

5.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + y_2^2] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(1) = 0, \quad y_2(0) = y_1(1) = 1,$$

$$y_1' - y_2 = 0.$$

5.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y')^2 + y^2] dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-1}, \quad \int\limits_0^1 e^{-x} y dx = \frac{1}{4}(1 - 3e^{-2}).$$

6.1. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_{-1}^{1} (y^2 + y')dx, \quad y_0(x) = \sin x, \quad \delta y(x) = x.$$

6.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_{0}^{1/2} \left[ \frac{(y')^2}{x^2-1} - \frac{2y^2}{(x^2-1)^2} \right] dx, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

6.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{0}^{1} [48y - (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 4.$$

6.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{0}^{1} \left[ y_2^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2 \right] dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = e.$$

6.5. Найти допустимые экстремали и значение $x_2$ в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_{0}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_2) = x_2 - 10.$$

6.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{0}^{\pi} [(y_1')^2 - (y_2')^2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0, \quad y_2(\pi) = \pi/2,$$

$$y_1' - y_2 + \cos x = 0.$$

6.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{0}^{1} y_1' y_2' dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1, \quad \int\limits_{0}^{1} y_1 dx = 1, \quad \int\limits_{0}^{1} y_2 dx = 0.$$

7.1. Найти расстояние первого порядка между кривыми $y_1(x) = xe^{-x}$, $y_2(x) = 0$ на отрезке $[-1, 3]$.

7.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^2 \left[(y')^2 + \frac{6y^2}{x^2} - 32y\ln x\right] dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 4(4\ln 2 + 3).$$

7.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y'')^2 - 24xy]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{5}, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

7.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 \left[y_1^2 + y_2^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(1) = e, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = e.$$

7.5. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^1 [2y + 6y' + (y')^2]dx, \quad y(0) = 0.$$

7.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1y_2]dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} + 1, \quad y_2(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} - 1,$$

$$y_1' - y_2' - 4x = 0.$$

7.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 (y_1 + y_2)dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = -3, \quad \int\limits_0^1 y_1'y_2'dx = 0.$$

8.1. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^{2\pi} (x + y + y')dx, \quad y_0(x) = \sin 2x, \quad \delta y(x) = x^2.$$

8.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_{-2}^{-1} \left[x^3(y')^2 + 3xy^2 - \frac{6y}{x}\right] dx, \quad y(-2) = \frac{1}{4}, \quad y(-1) = 1.$$

8.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y''')^2 + (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = y''(1) = \operatorname{sh} 1, \quad y'(1) = \operatorname{ch} 1.$$

8.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_1^2 \left[12y_1^2 + y_2^2 + x^2(y_1')^2 + (y_2')^2\right] dx,$$

$$y_1(1) = 1, \quad y_1(2) = 8, \quad y_2(1) = e, \quad y_2(2) = e^2.$$

8.5. Методами вариационного исчисления найти кратчайшее расстояние от точки $A(1, 0)$ до эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

8.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_2')^2 - 2y_1'y_2' - 2y_1^2]dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = 0,$$
$$y_1' - y_2' = 0.$$

8.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 y_1'y_2'dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1, \quad \int\limits_0^1 xy_1'dx = 0, \quad \int\limits_0^1 xy_2'dx = 0.$$

9.1. Найти расстояние первого порядка между указанными кривыми на заданном промежутке

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x, \quad x \in [0, 1].$$

9.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^2 \left[\frac{3y^2}{x^3} + x^2 + \frac{(y')^2}{x}\right] dx, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = \frac{17}{2}.$$

9.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y'')^2 - (y')^2] dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

9.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} \left[(y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1y_2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(\pi/2) = e^{\pi/2}, \quad y_2(0) = -1, \quad y_2(\pi/2) = -e^{\pi/2}.$$

9.5. Найти допустимые экстремали и значение $x_2$ в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [3(y')^2 y - x(y')^3] dx, \quad y(0) = 0.$$

9.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2} dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2, \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 1,$$
$$2y_1 - y_2 - 3x = 0.$$

9.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = y_2(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 y_1 y_2 dx = -2.$$

10.1. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^3 xy^4 dx, \quad y_0(x) = x, \quad \delta y(x) = x^2.$$

10.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^4 \left[\frac{2yy'}{x} - \frac{3y^2}{x^2} - (y')^2 - \frac{y}{x}\right] dx, \quad y(1) = 4, \quad y(4) = 4.$$

10.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^b [(y'')^2 + (y')^2] dx,$$
$$y(0) = 0, \quad y(b) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(b) = 0.$$

10.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 \left[2y_1 + y_2^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2\right] dx,$$
$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = \frac{1}{2}, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = e^{-1}.$$

10.5. Найти допустимые экстремали и значение $x_2$ в задаче с подвижными границами

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 + y] dx, \quad y(x_2) = x_2.$$

10.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2] dx,$$
$$y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = -1, \quad y_2(1) = 1,$$
$$y_1 + y_2 - 2x^2 + x + 1 = 0.$$

10.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = y_2(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 y_1 y_2 dx = -2.$$

11.1. Найти норму элемента $y(x)$ в пространствах $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$:

$$y(x) = \frac{\sin x}{n}, \quad n = 1, 10, 100, \quad x \in [0,1].$$

11.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_0^1 [e^x(y' - x)^2 + 2y]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}.$$

11.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^\pi [(y''')^2 - (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi, \quad y'(\pi) = 2, \quad y''(\pi) = 0.$$

11.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} \left[(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1y_2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(\pi/2) = e^{\pi/2}, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(\pi/2) = e^{\pi/2}.$$

11.5. Найти допустимые экстремали и значение $x_2$ в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 - y^2]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_2) = \sin 2x_2.$$

11.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 - (y_2')^2]dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = \frac{\pi}{4}, \quad y_2(\pi/2) = -\frac{1}{2},$$

$$y_1' - y_2 - \sin x = 0.$$

11.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 6, \quad \int\limits_0^1 y(x)dx = 3.$$

12.1. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} xyy'dx, \quad y_0(x) = \sin x, \quad \delta y(x) = \cos x.$$

12.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^2 [24x^3y - yy' - x^2(y')^2]dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = -7.$$

12.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 e^{-x}(y'')^2dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = 2e.$$

12.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [y_1y_2 + y_1'y_2']\,dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(1) = e, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = e.$$

12.5. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_1^2 [x^2(y')^2 + 6y^2 + 2x^3y]dx, \quad y(1) = \frac{1}{6}.$$

12.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 - (y_2')^2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = -2, \quad y_2(\pi/2) = 0,$$
$$y_1' - y_2 + 1 = 0.$$

12.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 [x^2 + (y')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 y^2(x)dx = 2.$$

13.1. Определить сходится ли последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

к функции $y_0(x) = 0$ по норме пространства: а) $C[0, \pi]$; б) $C^1[0, \pi]$.

13.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/4} \left[\frac{(y')^2}{\cos x} + \frac{y}{\cos^2 x}\right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

13.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 (x+1)^3 (y'')^2 dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = -1, \quad y'(1) = -\frac{1}{4}.$$

13.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [y_1' y_2' - y_1 y_2]\, dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi/2) = 1.$$

13.5. Методами вариационного исчисления найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $y = x - 1$.

13.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 - (y_2')^2] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = 1,$$
$$y_1' - y_2 - 2\cos(2x) = 0.$$

13.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{4}, \quad \int\limits_0^1 (y - (y')^2) dx = \frac{1}{12}.$$

14.1. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^1 (xy + y'x^2)dx, \quad y_0(x) = x, \quad \delta y(x) = x + 1.$$

14.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^4 \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) y^2 + 2yy' \ln x - 4(y')^2 - 10y\right] dx, \quad y(1) = -1, \quad y(4) = 0.$$

14.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^\pi [(y''')^2 - (y')^2]dx,$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(\pi) = y''(\pi) = \operatorname{sh}\pi, \quad y'(\pi) = \operatorname{ch}\pi + 1.$$

14.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 \left[2y_1^2 + 2y_1y_2 + (y_1')^2 - (y_2')^2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 2\operatorname{sh} e, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = -2\operatorname{sh} e.$$

14.5. Найти допустимые экстремали и значение $x_2$ в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 - y^2 - 2y]dx, \quad y(0) = 0.$$

14.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 - (y_2')^2 + 5y_1y_2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$

$$y_1' + y_2' - 2 = 0.$$

14.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e - 3, \quad \int\limits_0^1 ye^x dx = 0.$$

15.1. Найти расстояние между элементами $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в пространствах $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$:

$$y_1(x) = \sin 2x, \quad y_2(x) = \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

15.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int_1^2 [(xy' + y)^2 + (1 + x^2)y']dx, \quad y(1) = -\frac{1}{2}, \quad y(2) = 1.$$

15.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^{\pi/2} [(y'')^2 - y^2 + x^2]dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = -1.$$

15.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int_0^{\pi/2} \left[2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi/2) = -1.$$

15.5. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижными границами

$$J[y] = \int_0^{\pi/2} [4y^2 + (y')^2 + 2y\cos x]dx.$$

15.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int_0^1 [(y_1')^2 + 5y_1y_2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$

$$y_1 - y_2 = 0.$$

15.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 2e + 1, \quad y(1) = 2, \quad \int_0^1 ye^{-x}dx = e.$$

16.1. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^1 xy^3 dx, \quad y_0(x) = x, \quad \delta y(x) = \sin x.$$

16.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^2 \left[12xy - \frac{12}{x}yy' - 3(y')^2\right] dx, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y(2) = 0.$$

16.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [-2xy + (y'')^2] dx,$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{5!}, \quad y'(1) = \frac{1}{12}.$$

16.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/4} (2y_2 - 4y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2) dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\frac{\pi}{4}) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

16.5. Найти допустимые экстремали и значение $x_2$ в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 + y^2] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_2) = \operatorname{ch} x_2.$$

16.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + 5y_1] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$

$$y_1 + y_2 - 2x^2 = 0.$$

16.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e - 3, \quad \int\limits_0^1 y e^x dx = 0.$$

17.1. Найти расстояние второго порядка между кривыми $y_1(x) = x$, $y_2(x) = -\cos x$ на отрезке $[0, \pi/3]$.

17.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int_0^1 \left[(1+x^2)(y')^2 - 4xy' + yy'\sin^2 x + \frac{1}{2}y^2 \sin 2x\right] dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \ln 2.$$

17.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^1 [1 + x^2 + 2(y''')^2]dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 6, \quad y''(1) = 22.$$

17.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int_{-1}^1 (2xy_1 - (y_1')^2 + \frac{1}{3}(y_2')^3)dx,$$

$$y_1(-1) = 2, \quad y_1(1) = 0, \quad y_2(-1) = -1, \quad y_2(1) = 1.$$

17.5. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int_0^1 [y + xy' + (y')^2]dx, \quad y(0) = 0.$$

17.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int_0^1 [(y_1')^2 + 5y_2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$

$$y_1 + y_2' - 2x^3 = 0.$$

17.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int_0^1 [y^2 + (y')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 4e, \quad \int_0^1 ye^x dx = 1 + e^2.$$

18.1. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^1 (xy^2 + y'x)dx, \quad y_0(x) = x^2, \quad \delta y(x) = x.$$

18.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/4} \left[ yy' \operatorname{arctg} x - (y')^2 + \frac{y^2}{2(1+x^2)} - 9y^2 + 16y \operatorname{sh} x \right] dx,$$
$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{sh}^3\frac{\pi}{4} + \operatorname{sh}\frac{\pi}{4}.$$

18.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [2e^x y - (y'')^2]dx,$$
$$y(0) = y'(0) = 1, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 2e.$$

18.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} ((y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1y_2)dx,$$
$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

18.5. Методами вариационного исчисления найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1, 5)$ до параболы $x = y^2$.

18.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 - y_1y_2]dx,$$
$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = 1,$$
$$y_1 - y_2' - 2\cos x = 0.$$

18.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 [2xy + (y')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 3, \quad \int\limits_0^1 xydx = 1.$$

19.1. Найти расстояние первого порядка между указанными кривыми на заданном промежутке

$$y_1(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad y_2(x) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

19.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} [(y')^2 + y^2 - 4y\sin x]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = e^{\pi}.$$

19.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [4(y')^2 + (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{4}(e^2 - 3), \quad y'(1) = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

19.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1)dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(1) = \frac{3}{2}, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = 1.$$

19.5. Найти допустимые экстремали и значение $x_2$ в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 + y]dx, \quad y(0) = 1.$$

19.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + y_1^2 + y_2^2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$

$$y_1 + y_2 = 2x.$$

19.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_1^2 x(y')^2]dx,$$

$$y(1) = 0, \quad y(2) = 12, \quad \int\limits_1^2 xydx = 9.$$

20.1. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} xy dx, \quad y_0(x) = \sin x, \quad \delta y(x) = \cos x.$$

20.2. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_{1/4}^{1} [6xy' - x^{1/2}y^2 - x^{5/2}(y')^2]dx, \quad y\left(\frac{1}{4}\right) = -1, \quad y(1) = 1.$$

20.3. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/2\sqrt{2}} [16y^2 + (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(\pi/2\sqrt{2}) = 0, \quad y'(\pi/2\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}.$$

20.4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{1/2}^{1} ((y_1')^2 - 2xy_1y_2')dx,$$

$$y_1\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2\left(\frac{1}{2}\right) = 15, \quad y_2(1) = 1.$$

20.5. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижными границами

$$J[y] = \int\limits_1^{e} [x(y')^2 + \frac{1}{x}y^2 + \frac{2\ln x}{x}y]dx.$$

20.6. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{1} [(y_1')^2 + y_1^2 - y_2^2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$

$$y_1 + y_2 = 2x^2.$$

20.7. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^\pi [2y + 3y' + (y')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi^2, \quad \int\limits_0^\pi y \sin x dx = \pi^2 - 1.$$