

Вариант № 1

1.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y'' + 2xy' = 0$; 2. $(y - 1)y'' = 2(y')^2$;

3. $xyy'' - (x + 1)yy' = xy'^2, x \neq 0$.

1.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = \frac{1}{2}$$

1.3. Найти общее решение

1. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$;

2. $x^2y'' - 3xy' + 3y = -\ln x$.

1.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2y'' - (6 + x)xy' + (12 + 3x)y = x^5 e^{3x}.$$

1.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2 - 6x + 2tx = 0, \\ t^3 \dot{y} = \frac{t^4}{y} + 2yx, \\ x(-1) = 0, 5; \quad y(-1) = 0. \end{cases}$$

1.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 5y + 3e^t, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

1.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + y'' + y' - 3y = 1 + t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

1.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2 z}.$$

1.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{2x+3y}, \\ \dot{y} = \frac{y}{2x+3y}, \\ x(1) = y(1) = 1. \end{cases}$$

1.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})^T. \end{cases}$$

1.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y - \operatorname{ctg} t, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

1.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; 0)^T. \end{cases}$$

1.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -15 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 2

2.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. \quad xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}; \quad 2. \quad y'y''' = 2(y'')^2;$$

$$3. \quad yy'' = (1-x)y'^2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2.$$

2.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

2.3. Найти общее решение

$$1. \quad y''' - 64y' = 128 \cos x - 64e^{8x};$$

$$2. \quad (2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0.$$

2.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$xy'' - (x+3)y' + \left(1 + \frac{3}{x}\right)y = \frac{x^3 e^x}{x-1} \quad (x > 1)$$

2.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2 \dot{x}^2 + 3x^2 = 4tx\dot{x}, \\ t\dot{y} - y = xt^2 e^t, \\ x(1) = 1; \quad y(1) = -44e. \end{cases}$$

2.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + e^t, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

2.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + 2y'' + 2y' = 1 + e^{-t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

2.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z}.$$

2.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{x+y}, \\ \dot{y} = \frac{y}{x+y}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

2.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (-1, -1)^T. \end{cases}$$

2.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

2.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; 0)^T. \end{cases}$$

2.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & -12 \\ 3 & 0 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 3

3.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $yy'' - y'(1 + y') = 0$; 2. $y'' = xy' + y + 1$;

3. $yy'' - y'^2 + y^2 \sin x = 0$.

3.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

3.3. Найти общее решение

1. $y''' + 4y' = \operatorname{sh} 4x$;

2. $x^2 y'' - 6y = 12 \ln x$.

3.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$(x+3)y'' + 2(2x+7)y' + 4(x+4)y = xe^{-3x}$$

3.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t\dot{x} = x + \sqrt{x^2 + t^2}, \\ \dot{y} + \frac{1-2t}{t^2}y = \frac{4xe^{2/t}}{t^2-4}, \\ x(2) = 0; \quad y(2) = -4e. \end{cases}$$

3.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 6y, \\ \dot{y} = x + 4y + \cos t. \end{cases}$$

3.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - 3y'' + 3y' - y = \sin t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

3.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{y(z-1)} = \frac{dy}{x(z-1)} = \frac{dz}{-xy}.$$

3.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy, \\ \dot{y} = xy + y^2, \\ x(1) = 1, y(1) = 2. \end{cases}$$

3.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1, 0)^T. \end{cases}$$

3.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + e^t \sin e^t, \\ \dot{y} = x - y + e^t \sin e^t. \end{cases}$$

3.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

3.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 4

4.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. \quad xy'' - y' = 0; \quad 2. \quad (y - 1)y'' - 2(y')^2 = 0;$$

$$3. \quad (yy'' - y'^2) \sin x + y^2 = (\sin x - \cos x)yy', \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

4.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad y(0) = \ln 14, \quad y'(0) = \ln 8$$

4.3. Найти общее решение

$$1. \quad y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x;$$

$$2. \quad (x - 1)^3 y''' + (x - 1)y' - y = 0;$$

4.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$(x^3 + 2x^2)y'' + 2xy' - 2y = \frac{(x+2)^2}{x} \quad (x > 0).$$

4.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2 \dot{x}^2 + 2x^2 = 3tx\dot{x}, \\ t\dot{y} = y + te^t x, \\ x(1) = 1; \quad y(1) = -2e. \end{cases}$$

4.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 8y + \cos 2t, \\ \dot{y} = x + 5y. \end{cases}$$

4.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' + y' - y = 3 + t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

4.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{(x - z)^2} = \frac{dz}{x}.$$

4.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x}e^t = \frac{1}{y}, \\ \dot{y}e^t = \frac{1}{x}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

4.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1, 1)^T. \end{cases}$$

4.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + 2, 5e^{3t}, \\ \dot{y} = 2x - y + e^{-3t}. \end{cases}$$

4.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (-1; 0)^T. \end{cases}$$

4.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 5

5.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. (1+x^2)y'' = 2xy'; \quad 2. 2y(y'' - 2y) = 3(y')^2;$$

$$3. yy'' + \frac{yy'}{x} - y'^2 = 0.$$

5.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{\pi^2}y = \frac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

5.3. Найти общее решение

$$1. y''' - y'' - 4y' + 4y = (7x - 6)e^x;$$

$$2. x^2y'' + xy' + y = x.$$

5.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$(3x-4)y'' + (17-15x)y' + (12x-4)y = \frac{(3x-4)^2}{x-1}e^x, \quad x > \frac{4}{3}.$$

5.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x dt = t dx + t dt, \\ \frac{xyt^{y-1}}{t(1-\ln t)} dt + t^y \ln t dy = 0, \\ x(e) = 0; \quad y(e) = 1. \end{cases}$$

5.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - 2e^t, \\ \dot{y} = x + 3y + e^t. \end{cases}$$

5.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 2 - t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

5.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x}.$$

5.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{3y}{2x-y}, \\ \dot{y} = \frac{6x}{2x-y}, \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

5.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \cos 3t \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0, 0)^T. \end{cases}$$

5.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 4t^2 e^{t^2}, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

5.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (-1; 0)^T. \end{cases}$$

5.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 6

6.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $x^2 y'' + xy' - 1 = 0$; 2. $xy'' = 2yy' - y'$;

3. $x(yy'' - y'^2) = yy' \ln \frac{y}{y'}$, $y(1) = y'(1) = 1$.

6.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3$$

6.3. Найти общее решение

1. $y''' - 3y' - 2y = -4xe^x + \sin 3x$;

2. $x^2 y'' - xy' + y = 2x$.

6.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x(x^2 + 1)y'' - (x^2 + 5)y' + \frac{8}{x}y = \frac{2x^4}{x^2 + 1}, \quad x > 0.$$

6.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t\dot{x} = x + \sqrt{x^2 + t^2}, \\ \frac{\dot{y}t}{t^2 + y^2} = \frac{y^2}{t^2 + y^2} - \frac{2x}{t^2 - 1}, \\ x(1) = 0; \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

6.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + t, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$$

6.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' + 9y' - 9y = 1 - e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

6.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{(z - y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

6.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = 4xy, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

6.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1, 0)^T. \end{cases}$$

6.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

6.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y + 4 \sin t, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

6.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; -1)^T. \end{cases}$$

6.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 7

7.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $xy'' = \sqrt{1 + (y')^2}$; 2. $yy'' + (y')^2 = (y')^3$;

3. $xyy'' + yy' = xy'^2 + y^2$, $x \neq 0$.

7.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

7.3. Найти общее решение

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 21e^{2x} + \cos 2x$;

2. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$.

7.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$(2x+3)y'' + (8x+10)y' + (6x+3)y = \frac{(2x+3)^2}{x+1} e^{-x}, \quad x > -1.$$

7.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t(\dot{y} - y) = (1 + t^2)e^t, \\ x^2 + (1 - x)\dot{x} = 0, \\ x(1) = -1 \quad y(1) = e. \end{cases}$$

7.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - \sin 2t, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

7.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' - 9y' + 9y = 1 - e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

7.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}.$$

7.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = z(x + z), \\ \dot{y} = -y(y + z), \\ \dot{z} = 0, \\ x(0) = y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$$

7.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \vec{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (2, 2)^T. \end{cases}$$

7.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\vec{\dot{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$$

7.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\vec{\dot{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \vec{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

7.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\vec{\dot{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 8

8.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $xy''' + y'' = 1 + x$; 2. $yy'' + (y')^2 = 1$;

3. $4xyy'' - 4yy' + y'^2 = 0$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = -4$.

8.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad y(\pi/4) = 1, \quad y'(\pi/4) = 2$$

8.3. Найти общее решение

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 16e^{-x} + \sin 3x$;

2. $(x+1)^3 y''' + 2(x+1)^2 y'' - (x+1)y' + y = 0$.

8.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x(1-x^2)y'' + (2x^2-5)y' + \left(\frac{8}{x} - 2x\right)y = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1.$$

8.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t\dot{x} = x(1 + \ln \frac{x}{t}), \\ \frac{t+y\dot{y}}{\sqrt{t^2+y^2}} = \frac{xy}{t^3}e^{t/2} - \frac{y}{t^2}, \\ x(1) = 1/\sqrt{e}; \quad y(1) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

8.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 9y + e^t, \\ \dot{y} = x + 4y + 4e^t. \end{cases}$$

8.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \cos t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

8.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z-1} = \frac{dy}{(z-x)^2} = \frac{dz}{x-1}.$$

8.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x-y}{z-t}, \\ \dot{y} = \frac{x-y}{z-t}, \\ \dot{z} = x - y + 1, \\ x(1) = y(1) = 1; \quad z(1) = 2. \end{cases}$$

8.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1, 1)^T. \end{cases}$$

8.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

8.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + \frac{e^t}{1+e^t}, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

8.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

8.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -7 & 8 \\ 0 & 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 9

9.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $(y'')^2 - 2y'y''' + 1 = 0$; 2. $xy'' - y' = x^2yy'$;

3. $y^2y''' - 3yy'y'' + 2y'^3 + y^3 \sin x = 0$.

9.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 2e$$

9.3. Найти общее решение

1. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = xe^x + e^{2x}$;

2. $(3x + 2)^2 y'' + 7(3x + 2)y' = -63x + 18$.

9.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2 y'' + (4x + 2x^2) y' + 2(1 + 2x)y = 2e^{-2x}, \quad x > 0.$$

9.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + 2xt = 2te^{-t^2}, \\ tdy = \frac{xye^{t^2}}{t^2} dt + ydy, \\ x(0) = 0; \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

9.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y - e^{-2t}, \\ \dot{y} = x + y - \cos 2t. \end{cases}$$

9.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + y'' + y' + y = t + t^2$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

9.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{10}.$$

9.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} y' = \frac{z^2}{z+y}, \\ z' = \frac{y^2}{z+y}, \\ y(0) = 2, \quad z(0) = 1. \end{cases}$$

9.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 4t - 1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

9.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + (2 + 6t)e^t, \\ \dot{y} = x - y + e^t. \end{cases}$$

9.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; 1)^T. \end{cases}$$

9.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 10

10.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. \ y'''[1 + (y')^2] = 3y'(y'')^2; \quad 2. \ y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2;$$

$$3. \ xyy'' - 4xy'^2 + 4yy' = 0, \ y(1) = 1, \ y'(1) = 2.$$

10.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' - y' = e^{2x} \cos(e^x), \quad y(1) = 1, \ y'(1) = 2$$

10.3. Найти общее решение

$$1. \ y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x + 2 \sin 2x;$$

$$2. \ x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x + \frac{1}{x}.$$

10.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2y'' + (3x^2 - 2x)y' + (2 - 3x)y = -3x^3e^{-3x}, \ x > 0.$$

10.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - t^2, \\ \dot{y} = \frac{8txy}{(t^2 - y^2)(2t^2 + 2t + 1)}, \\ x(0) = 0,25; \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

10.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y + e^{4t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

10.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' + 2y = 10 + e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

10.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{-y(x^2 + z^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}.$$

10.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = \frac{3y}{x+3y}, \\ x(1) = y(1) = 1. \end{cases}$$

10.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \vec{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (17/18, -19/18)^T. \end{cases}$$

10.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\vec{\dot{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

10.11. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + \operatorname{th} t, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

10.12. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\vec{\dot{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \vec{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 1)^T. \end{cases}$$

10.13. Решить систему дифференциальных уравнений $\vec{\dot{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 11

11.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. \quad xy''' + y'' + x = 0; \quad 2. \quad yy'' - (y')^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$3. \quad x^2yy'' = (xy' + y)^2, \quad x \neq 0.$$

11.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3$$

11.3. Найти общее решение

$$1. \quad y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x + \sin x;$$
$$2. \quad x^4y''' + 2x^3y'' = 1.$$

11.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$xy'' + (2 - 2x)y' + (-2 + x)y = -4e^x.$$

11.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^3 dy = 2yxdx + t^5 \ln t \, dt, \\ t^2 \dot{x}^2 + 4x^2 = 4tx\dot{x}, \\ x(1) = y(1) = 1. \end{cases}$$

11.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - y + te^{4t}, \\ \dot{y} = x - 4y + 2e^{4t}. \end{cases}$$

11.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + y'' - 2y = \sin 3t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

11.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z+3} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{x+3}.$$

11.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - \frac{1}{y}, \\ \dot{y} = \frac{1}{x-y}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

11.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (2; 1)^T. \end{cases}$$

11.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

11.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg} t, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

11.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

11.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 12

12.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y^{(4)} \operatorname{cth} 2x = 2y''$; 2. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$;

3. $2xy^2y'' - 2xyy'^2 + 2xy'^3 = y'y^2$, $y(1) = y'(1) = -1$.

12.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

12.3. Найти общее решение

1. $y''' + y'' + y' + y = \cos 2x + (8x+4)e^x$;

3. $x^2y'' + xy' - y = -\ln(x+1)$.

12.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2y'' - (x^2 + 4x)y' + 2(x+3)y = 12x^4e^{-2x}, \quad x > 0.$$

12.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2\dot{x} + (1-2t)x = ty \exp\left(\frac{2}{t} + t - 1\right), \\ t\dot{y} = y \ln \frac{y}{t}, \\ x(1) = -e^2; \quad y(1) = 1. \end{cases}$$

12.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 2t, \\ \dot{y} = 4x - 2y. \end{cases}$$

12.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + 3y'' - y' - 3y = 1-t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

12.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{2x-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z-x}.$$

12.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{y}, \\ \dot{y} = \frac{1}{x}, \\ x(0) = 1; \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

12.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; -1)^T. \end{cases}$$

12.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

12.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

12.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 13

13.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^2$; 2. $xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$;

3. $xyy'' - yy' = 2xy'^2, x \neq 0$.

13.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}, \quad y(1) = 0,5, \quad y'(1) = 2$$

13.3. Найти общее решение

1. $y''' - 4y'' + 4y' = \sin x + (x - 1)e^x$;

2. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 5x^2y'' - xy' = x^2$.

13.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2 y'' + (4x + x^2) y' + 2(1 + x)y = e^x, \quad x > 0.$$

13.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{4xy}{t^4} + \operatorname{tg} \frac{y}{t}, \\ tdx = (t^3 - x)dt, \\ x(1) = 0,25; \quad y(1) = \pi/2. \end{cases}$$

13.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, \\ \dot{y} = 3x - y + 3 \sin 2t. \end{cases}$$

13.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' - y' + y = e^t + e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

13.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{2z - y} = \frac{dy}{x - 4z} = \frac{dz}{4y - 2x}.$$

13.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = 5(3 - x - y), \\ \dot{y} = 7(3 - x - y), \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

13.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (2; 0)^T. \end{cases}$$

13.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3(1 + t)e^t, \\ \dot{y} = x + y - e^t. \end{cases}$$

13.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

13.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 14

14.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0$; 2. $xy'' = 2yy' - y'$;
3. $(1 - \sin x)yy'' + yy' \cos x = y'^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

14.2. Найти решение задачи Коши

$$x^3(y'' - y) = x^2 - 2, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1$$

14.3. Найти общее решение

1. $y''' - 36y' = \sin x + 2e^{6x}$;
2. $(x+1)^3y'' + 3(x+1)^2y' + (x+1)y = 6 \ln(x+1)$.

14.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2 y'' + (x^2 - 4x)y' + 2(3 - x)y = -(2x + 1)x^4, \quad x > 0.$$

14.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2 - 6x + 2t\dot{x} = 0, \\ t^3\dot{y} = \frac{t^4}{y} + 2yx, \\ x(-1) = 0, 5; \quad y(-1) = 0. \end{cases}$$

14.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 5y + 3e^t, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

14.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + y'' + y' - 3y = 1+t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

14.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2z}.$$

14.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{2x+3y}, \\ \dot{y} = \frac{y}{2x+3y}, \\ x(1) = y(1) = 1. \end{cases}$$

14.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})^T. \end{cases}$$

14.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

14.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y - \operatorname{ctg} t, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

14.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; 0)^T. \end{cases}$$

14.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -15 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 15

15.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. \quad xy''' + y'' = x + 1; \quad 2. \quad 3(y')^2 = 4yy'' + y^2;$$

$$3. \quad yy'' + yy' \operatorname{tg} x + 2y'^2 = 0.$$

15.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

15.3. Найти общее решение

$$1. \quad y^{(4)} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2;$$

$$2. \quad x^2y'' + xy' - y = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

15.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$xy'' + (2+3x)y' + 3y = -3e^{-3x}, \quad x > 0.$$

15.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2 \dot{x}^2 + 3x^2 = 4tx\dot{x}, \\ t\dot{y} - y = xt^2 e^t, \\ x(1) = 1; \quad y(1) = -44e. \end{cases}$$

15.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + e^t, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

15.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + 2y'' + 2y' = 1 + e^{-t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

15.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z}.$$

15.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{x+y}, \\ \dot{y} = \frac{y}{x+y}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

15.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \vec{\dot{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (-1, -1)^T. \end{cases}$$

15.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\vec{\dot{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

15.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\vec{\dot{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \vec{\dot{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; 0)^T. \end{cases}$$

15.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\vec{\dot{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & -12 \\ 3 & 0 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 16

16.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $yy'' - y'(1 + y') = 0$; 2. $y'' = xy' + y + 1$;

3. $y^2(y'' - y') = y'^2(y - 2xy')$, $y(1) = y'(1) = e$.

16.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3$$

16.3. Найти общее решение

1. $y''' + 6y'' + 9y' = (x + 1)e^{2x} + \cos x$;

2. $x^3y'' - x^2y' + 3xy + 16 \ln x = 0$.

16.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$xy'' + 2(1+x)y' + (2+x)y = 4e^{-x}, \quad x > 0.$$

16.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t\dot{x} = x + \sqrt{x^2 + t^2}, \\ \dot{y} + \frac{1-2t}{t^2}y = \frac{4xe^{2/t}}{t^2-4}, \\ x(2) = 0; \quad y(2) = -4e. \end{cases}$$

16.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 6y, \\ \dot{y} = x + 4y + \cos t. \end{cases}$$

16.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - 3y'' + 3y' - y = \sin t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

16.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{y(z-1)} = \frac{dy}{x(z-1)} = \frac{dz}{-xy}.$$

16.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy, \\ \dot{y} = xy + y^2, \\ x(1) = 1, y(1) = 2. \end{cases}$$

16.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1, 0)^T. \end{cases}$$

16.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

16.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + e^t \sin e^t, \\ \dot{y} = x - y + e^t \sin e^t. \end{cases}$$

16.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

16.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 17

17.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. (1+x^2)y'' = 2xy'; \quad 2. 2y(y'' - 2y) = 3(y')^2;$$

$$3. yy'' + yy' \operatorname{tg} x = 2y'^2.$$

17.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

17.3. Найти общее решение

$$\begin{aligned} 1. & y^{(5)} + y^{(4)} = x + e^{-2x}; \\ 2. & x^2 y'' + xy' + 4y = x + 1. \end{aligned}$$

17.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^4(2x^2 - 3)y'' - x(2x^4 + 9x^2 - 9)y' + 6(4x^2 - 3)y = 0 \quad \left(x > \sqrt{\frac{3}{2}} \right).$$

17.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2 \dot{x}^2 + 2x^2 = 3tx\dot{x}, \\ t\dot{y} = y + te^t x, \\ x(1) = 1; \quad y(1) = -2e. \end{cases}$$

17.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 8y + \cos 2t, \\ \dot{y} = x + 5y. \end{cases}$$

17.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' + y' - y = 3+t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

17.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{(x-z)^2} = \frac{dz}{x}.$$

17.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x}e^t = \frac{1}{y}, \\ \dot{y}e^t = \frac{1}{x}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

17.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1, 1)^T. \end{cases}$$

17.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

17.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + 2, 5e^{3t}, \\ \dot{y} = 2x - y + e^{-3t}. \end{cases}$$

17.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (-1; 0)^T. \end{cases}$$

17.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 18

18.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $x^2 y'' + xy' - 1 = 0$; 2. $xy'' = 2yy' - y'$;

3. $xyy'' + x(2\ln x - 1)y'^2 = yy'$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$.

18.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

18.3. Найти общее решение

1. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$;
2. $x^2 y'' + xy' + y = \ln x^2$.

18.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2 y'' + (x^2 + 1)xy' + (x^2 - 1)y = 0 \quad (x > 0).$$

18.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x dt = t dx + t dt, \\ \frac{xyt^{y-1}}{t(1-\ln t)} dt + t^y \ln t dy = 0, \\ x(e) = 0; \quad y(e) = 1. \end{cases}$$

18.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - 2e^t, \\ \dot{y} = x + 3y + e^t. \end{cases}$$

18.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 2 - t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

18.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x}.$$

18.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{3y}{2x-y}, \\ \dot{y} = \frac{6x}{2x-y}, \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

18.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \cos 3t \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0, 0)^T. \end{cases}$$

18.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

18.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 4t^2 e^{t^2}, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

18.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (-1; 0)^T. \end{cases}$$

18.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 19

19.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. \quad xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}; \quad 2. \quad yy'' + (y')^2 = 1;$$

$$3. \quad yy'' - \frac{yy'}{x+1} = 2y'^2.$$

19.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}, \quad y(1) = 0,5, \quad y'(1) = 2$$

19.3. Найти общее решение

$$1. \quad y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = e^{2x} - 3 + x;$$
$$2. \quad (x + 10)^2 y''' - 2(x + 10)y'' = 0.$$

19.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^3 y'' - 3x^2(1 + 2x^2)y' + 3x(1 + 2x^2)y = 0 \quad (x > 0).$$

19.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t\dot{x} = x + \sqrt{x^2 + t^2}, \\ \frac{\dot{y}t}{t^2 + y^2} = \frac{y^2}{t^2 + y^2} - \frac{2x}{t^2 - 1}, \\ x(1) = 0; \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

19.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + t, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$$

19.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' + 9y' - 9y = 1 - e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

19.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{(z - y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

19.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = 4xy, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

19.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1, 0)^T. \end{cases}$$

19.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

19.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y + 4 \sin t, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

19.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; -1)^T. \end{cases}$$

19.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 20

20.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. \quad y''' = (y'')^2; \quad 2. \quad (y'')^2 - 2y'y''' + 1 = 0;$$

$$3. \quad xy y'' + (1 + x^2)yy' + xy^2 = xy'^2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1.$$

20.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

20.3. Найти общее решение

$$1. \quad y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39;$$

$$2. \quad x^2 y'' - 4xy' + 6y = -\frac{x^2 + 1}{x}.$$

20.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2(2+x)y'' - x(x^2 + 2x - 2)y' - (x^2 + 4x + 2)y = 0 \quad (x > 0).$$

20.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t(\dot{y} - y) = (1 + t^2)e^t, \\ x^2 + (1 - x)\dot{x} = 0, \\ x(1) = -1 \quad y(1) = e. \end{cases}$$

20.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - \sin 2t, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

20.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' - 9y' + 9y = 1 - e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

20.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}.$$

20.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = z(x + z), \\ \dot{y} = -y(y + z), \\ \dot{z} = 0, \\ x(0) = y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$$

20.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (2, 2)^T. \end{cases}$$

20.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

20.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$$

20.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

20.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 21

21.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $x^2y'' + xy' - 1 = 0$; 2. $xy'' = 2yy' - y'$;

3. $xyy'' + 2xy'^2 = 2yy'$, $x \neq 0$.

21.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3$$

21.3. Найти общее решение

1. $y''' - 3y' - 2y = -4xe^x + \sin 3x$;

2. $x^2y'' - xy' + y = 2x$.

21.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2y'' - (6+x)xy' + (12+3x)y = x^5e^{3x}.$$

21.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t\dot{x} = x(1 + \ln \frac{x}{t}), \\ \frac{t+y\dot{y}}{\sqrt{t^2+y^2}} = \frac{xy}{t^3}e^{t/2} - \frac{y}{t^2}, \\ x(1) = 1/\sqrt{e}; \quad y(1) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

21.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 9y + e^t, \\ \dot{y} = x + 4y + 4e^t. \end{cases}$$

21.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \cos t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

21.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z-1} = \frac{dy}{(z-x)^2} = \frac{dz}{x-1}.$$

21.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x-y}{z-t}, \\ \dot{y} = \frac{x-y}{z-t}, \\ \dot{z} = x - y + 1, \\ x(1) = y(1) = 1; \quad z(1) = 2. \end{cases}$$

21.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1, 1)^T. \end{cases}$$

21.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

21.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + \frac{e^t}{1+e^t}, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

21.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

21.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -7 & 8 \\ 0 & 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 22

22.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$\begin{aligned} 1. \quad & y'''[1 + (y')^2] = 3y'(y'')^2; \quad 2. \quad y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2; \\ 3. \quad & y^2 y'' - \frac{3}{2} x^2 y^2 y' + \frac{3}{8} x^2 y'^3 - y y'^2 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -2. \end{aligned}$$

22.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' - y' = e^{2x} \cos(e^x), \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$$

22.3. Найти общее решение

$$\begin{aligned} 1. \quad & y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x + 2 \sin 2x; \\ 2. \quad & x^2 y'' - 4xy' + 6y = 2x + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

22.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2 y'' - (x-4)xy' + (2-2x)y = e^{-2x}.$$

22.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + 2xt = 2te^{-t^2}, \\ tdy = \frac{xye^{t^2}}{t^2}dt + ydy, \\ x(0) = 0; \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

22.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y - e^{-2t}, \\ \dot{y} = x + y - \cos 2t. \end{cases}$$

22.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + y'' + y' + y = t + t^2$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

22.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{10}.$$

22.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} y' = \frac{z^2}{z+y}, \\ z' = \frac{y^2}{z+y}, \\ y(0) = 2, \quad z(0) = 1. \end{cases}$$

22.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 4t-1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

22.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

22.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + (2 + 6t)e^t, \\ \dot{y} = x - y + e^t. \end{cases}$$

22.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; 1)^T. \end{cases}$$

22.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 23

23.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. (y'')^2 - 2y'y''' + 1 = 0; \quad 2. xy'' - y' = x^2yy';$$

$$3. xyy'' + xy'^2 + yy' = 0, x \neq 0.$$

23.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 2e$$

23.3. Найти общее решение

$$1. y''' - 7y'' + 15y' - 9y = xe^x + e^{2x};$$
$$2. (3x + 2)^2 y'' + 7(3x + 2)y' = -63x + 18.$$

23.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2 y'' - (4 + x)xy' + (6 + 2x)y = x^4 e^{2x}.$$

23.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + 2xt = 2te^{-t^2}, \\ tdy = \frac{xye^{t^2}}{t^2}dt + ydy, \\ x(0) = 0; \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

23.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y - e^{-2t}, \\ \dot{y} = x + y - \cos 2t. \end{cases}$$

23.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + y'' + y' + y = t + t^2$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

23.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{10}.$$

23.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} y' = \frac{z^2}{z+y}, \\ z' = \frac{y^2}{z+y}, \\ y(0) = 2, \quad z(0) = 1. \end{cases}$$

23.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \vec{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 4t - 1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

23.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\vec{x}' = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

23.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + (2 + 6t)e^t, \\ \dot{y} = x - y + e^t. \end{cases}$$

23.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\vec{x}' = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; 1)^T. \end{cases}$$

23.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\vec{x}' = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 24

24.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. \quad xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}; \quad 2. \quad y'y''' = 2(y'')^2;$$

$$3. \quad x^2y'' + 2x^2yy' + 2xy^2 - 2y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0,$$

24.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

24.3. Найти общее решение

$$1. \quad y''' - 64y' = 128 \cos x - 64e^{8x};$$

$$2. \quad (2x + 1)^2y'' - 2(2x + 1)y' + 4y = 0.$$

24.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$x^2y'' - (x - 6)xy' + (6 - 3x)y = \frac{e^{-3x}}{x}.$$

24.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2\dot{x} + 3x^2 = 4tx\dot{x}, \\ t\dot{y} - y = xt^2e^t, \\ x(1) = 1; \quad y(1) = -44e. \end{cases}$$

24.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y + e^t, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

24.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + 2y'' + 2y' = 1 + e^{-t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

24.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x + y} = \frac{dz}{z}.$$

24.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{x+y}, \\ \dot{y} = \frac{y}{x+y}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

24.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (-1, -1)^T. \end{cases}$$

24.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

24.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

24.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; 0)^T. \end{cases}$$

24.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & -12 \\ 3 & 0 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 25

25.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y^{(4)} \operatorname{cth} 2x = 2y''$; 2. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$;

3. $y^2 y'' - yy'(y' + \frac{y}{x}) + \frac{4}{x} y^3 = 0$.

25.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

25.3. Найти общее решение

1. $y''' + y'' + y' + y = \cos 2x + (8x + 4)e^x$;

3. $x^2 y'' + xy' - y = -\ln(x+1)$.

25.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$y'' x^2 \sin x - x(2 \sin x + x \cos x)y' + (2 \sin x + x \cos x)y = -x^4 \sin^2 x, \quad 0 < x < \pi.$$

25.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2 \dot{x} + (1-2t)x = ty \exp\left(\frac{2}{t} + t - 1\right), \\ t\dot{y} = y \ln \frac{y}{t}, \\ x(1) = -e^2; \quad y(1) = 1. \end{cases}$$

25.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 2t, \\ \dot{y} = 4x - 2y. \end{cases}$$

25.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + 3y'' - y' - 3y = 1 - t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

25.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{2x - z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z - x}.$$

25.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{y}, \\ \dot{y} = \frac{1}{x}, \\ x(0) = 1; \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

25.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; -1)^T. \end{cases}$$

25.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

25.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

25.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

25.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 26

26.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. (1+x^2)y'' = 2xy'; \quad 2. 2y(y'' - 2y) = 3(y')^2;$$

$$3. x^2y'' + 2x^2yy' + 2xy^2 - 2y = 0, \quad y(1) = -1, y'(1) = 1.$$

26.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$$

26.3. Найти общее решение

$$1. y^{(5)} + y^{(4)} = x + e^{-2x};$$

$$2. x^2y'' + xy' + 4y = x + 1.$$

26.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$y'' \sin x - (\cos x + \sin x)y' + y \cos x = -2e^x \sin^2 x, \quad 0 < x < \pi.$$

26.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2 \dot{x} + 2x^2 = 3tx\dot{x}, \\ t\dot{y} = y + te^t x, \\ x(1) = 1; \quad y(1) = -2e. \end{cases}$$

26.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 8y + \cos 2t, \\ \dot{y} = x + 5y. \end{cases}$$

26.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' + y' - y = 3+t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

26.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{(x-z)^2} = \frac{dz}{x}.$$

26.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x}e^t = \frac{1}{y}, \\ \dot{y}e^t = \frac{1}{x}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

26.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1, 1)^T. \end{cases}$$

26.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

26.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + 2, 5e^{3t}, \\ \dot{y} = 2x - y + e^{-3t}. \end{cases}$$

26.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (-1; 0)^T. \end{cases}$$

26.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 27

27.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^2$; 2. $xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$;

3. $yy'y'' - \frac{yy'^2}{x} - y'^3 = x^3y^3$.

27.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}, \quad y(1) = 0,5, \quad y'(1) = 2$$

27.3. Найти общее решение

1. $y''' - 4y'' + 4y' = \sin x + (x-1)e^x$;

2. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 5x^2y'' - xy' = x^2$.

27.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$y''x^2 \cos x - x(2 \cos x - x \sin x)y' + (2 \cos x - x \sin x)y = x^4 \cos^2 x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

27.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{4xy}{t^4} + \operatorname{tg} \frac{y}{t}, \\ tdx = (t^3 - x)dt, \\ x(1) = 0,25; \quad y(1) = \pi/2. \end{cases}$$

27.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, \\ \dot{y} = 3x - y + 3 \sin 2t. \end{cases}$$

27.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' - y' + y = e^t + e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

27.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{2z - y} = \frac{dy}{x - 4z} = \frac{dz}{4y - 2x}.$$

27.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = 5(3 - x - y), \\ \dot{y} = 7(3 - x - y), \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

27.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (2; 0)^T. \end{cases}$$

27.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

27.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3(1 + t)e^t, \\ \dot{y} = x + y - e^t. \end{cases}$$

27.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

27.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 28

28.1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $xy''' + y'' = 1 + x$; 2. $yy'' + (y')^2 = 1$;

3. $x^4y'' - xyy' + 2(y - x^2)y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -\frac{1}{2}$.

28.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad y(\pi/4) = 1, \quad y'(\pi/4) = 2$$

28.3. Найти общее решение

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 16e^{-x} + \sin 3x$;

2. $(x + 1)^3y''' + 2(x + 1)^2y'' - (x + 1)y' + y = 0$.

28.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$y'' \cos x + (\cos x + \sin x)y' + y \sin x = 2e^{-x} \cos^2 x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

28.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t\dot{x} = x(1 + \ln \frac{x}{t}), \\ \frac{t+y\dot{y}}{\sqrt{t^2+y^2}} = \frac{xy}{t^3}e^{t/2} - \frac{y}{t^2}, \\ x(1) = 1/\sqrt{e}; \quad y(1) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

28.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 9y + e^t, \\ \dot{y} = x + 4y + 4e^t. \end{cases}$$

28.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \cos t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

28.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z-1} = \frac{dy}{(z-x)^2} = \frac{dz}{x-1}.$$

28.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x-y}{z-t}, \\ \dot{y} = \frac{x-y}{z-t}, \\ \dot{z} = x - y + 1, \\ x(1) = y(1) = 1; \quad z(1) = 2. \end{cases}$$

28.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1, 1)^T. \end{cases}$$

28.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

28.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + \frac{e^t}{1+e^t}, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

28.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

28.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -7 & 8 \\ 0 & 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 29

29.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. \quad y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0; \quad 2. \quad xy'' = 2yy' - y';$$

$$3. \quad (x+1)yy'' + yy' = xy'^2, \quad x \neq -1.$$

29.2. Найти решение задачи Коши

$$x^3(y'' - y) = x^2 - 2, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1$$

29.3. Найти общее решение

$$1. \quad y''' - 36y' = \sin x + 2e^{6x};$$

$$2. \quad (x+1)^3y'' + 3(x+1)^2y' + (x+1)y = 6 \ln(x+1).$$

29.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$(x+1)y'' - 3(2x+1)y' + 9xy = 2e^{4x}.$$

29.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t^2 - 6x + 2t\dot{x} = 0, \\ t^3\dot{y} = \frac{t^4}{y} + 2yx, \\ x(-1) = 0, 5; \quad y(-1) = 0. \end{cases}$$

29.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 5y + 3e^t, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

29.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' + y'' + y' - 3y = 1+t$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

29.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2z}.$$

29.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{2x+3y}, \\ \dot{y} = \frac{y}{2x+3y}, \\ x(1) = y(1) = 1. \end{cases}$$

29.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)^T. \end{cases}$$

29.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

29.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y - \operatorname{ctg} t, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

29.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (1; 0)^T. \end{cases}$$

29.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -15 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 30

30.1. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1. \quad y''' = (y'')^2; \quad 2. \quad (y'')^2 - 2y'y''' + 1 = 0;$$

$$3. \quad x^4 y'' - x^2 y y'^2 + 2x y' y^2 = y^3, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1.$$

30.2. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

30.3. Найти общее решение

$$1. \quad y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39;$$

$$2. \quad x^2 y'' - 4xy' + 6y = -\frac{x^2 + 1}{x}.$$

30.4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде $y = e^{\alpha x}$ или $y = x^\alpha$ или многочлена $y = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n$

$$xy'' - (x+3)y' + \left(1 + \frac{3}{x}\right)y = \frac{x^3 e^x}{x-1} \quad (x > 1).$$

30.5. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t(\dot{y} - y) = (1 + t^2)e^t, \\ x^2 + (1 - x)\dot{x} = 0, \\ x(1) = 1; \quad y(1) = e. \end{cases}$$

30.6. Решить систему дифференциальных уравнений сведением к одному дифференциальному уравнению.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - \sin 2t, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

30.7. Преобразовать дифференциальное уравнение $y''' - y'' - 9y' + 9y = 1 - e^{2t}$ в систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Решить. Записать общее решение системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме. Выделить фундаментальную матрицу решений.

30.8. Найти линейно независимые первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Записать общий интеграл или общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}.$$

30.9. Решить нелинейную систему дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций (с помощью первых интегралов системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = z(x + z), \\ \dot{y} = -y(y + z), \\ \dot{z} = 0, \\ x(0) = y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$$

30.10. Найти частное решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений. При этом для решения соответствующей однородной системы использовать метод Эйлера. Решение неоднородной системы подобрать по виду вектор-функции в правой части неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (2, 2)^T. \end{cases}$$

30.11. Методом Эйлера решить систему однородных линейных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

30.12. Решить систему неоднородных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$$

30.13. Решить систему неоднородных дифференциальных линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B$ по формуле Коши

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, $\vec{C}$ – вектор констант подбираемый по начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

30.14. Решить систему дифференциальных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ с данной матрицей A , имеющей кратные собственные значения.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$