

Вариант № 1

1.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$(x - a)^2 + y^2 = 1.$$

1.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$2(y + y') = x + 2.$$

1.3. Решить уравнение

$$2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0, \quad y(0) = 2.$$

1.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad xy \, dy - y^2 dx &= (x + y)^2 e^{-y/x} dx; & 2) \quad y' &= \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}; \\ 3) \quad (4x^2 + y^4)dy - 2xy dx &= 0. \end{aligned}$$

1.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad y' + 2xy &= xe^{-x^2}; & 2) \quad 2y \, dx + (y^2 - 6x)dy &= 0; \\ 3) \quad 2(xy' + y) &= y^2 \ln x, \quad y(1) = 2. \end{aligned}$$

1.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$2x^2 y' + x^2 y^2 + 4 = 2xy, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

1.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{3x^2 + y}{y^2} dx = \frac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3} dy.$$

1.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2y \, dy = 0.$$

1.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad xy' + y &= y^2; & 2) \quad (y^2 - 3x^2)dy + 2xy dx &= 0; \\ 3) \quad y' &= \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x); & 4) \quad xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y)dy &= 0. \end{aligned}$$

1.10. Решить уравнения

$$1) \quad y = x + y' - \ln y'; \quad 2) \quad x[(y')^2 - 1] = 2y'; \quad 3) \quad y = xy' - (y')^2.$$

1.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0.$$

1.12. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная единице.

Вариант № 2

2.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ae^{x/a}.$$

2.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' = 3y.$$

2.3. Решить уравнение

$$y' = \frac{1}{3x + y}, \quad y(0) = 1.$$

2.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{array}{ll} 1) y' = 2xy/(x^2 - y^2); & 2) (2x - 2)dy = (x + 2y - 3)dx; \\ 3) (3x^2y^2 + 1)y' + 3xy^3 = 0. \end{array}$$

2.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{array}{ll} 1) y' + x^2y = x^2; & 2) y dx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0; \\ 3) 2y' + y \cos x = \cos x(1 + \sin x)y^{-1}, \quad y(0) = 1. \end{array}$$

2.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2y' + x^2y^2 + 2xy = 2, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

2.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0.$$

2.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$$

2.9. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} 1) y' - y = y^3; & 2) (x - y^2)y' = 1; \\ 3) y' = \frac{x}{y}2^{y/x} + \frac{y}{x}; & 4) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0. \end{array}$$

2.10. Решить уравнения

$$1) x = (y')^3 + y'; \quad 2) 2xy' - y = y' \ln(y y'); \quad 3) y + xy' = 4\sqrt{y'}.$$

2.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$(y')^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0.$$

2.12. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 12 км/ч. На полном ходу её мотор был выключен. Через $t = 10$ с скорость лодки уменьшилась до 6 км/ч. Считая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна её скорости, найти скорость лодки через 1 мин после остановки мотора.

Вариант № 3

3.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 + y^2 = ax.$$

3.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$yy' + x = 0.$$

3.3. Решить уравнение

$$y'(y + x) = 1, \quad y(0) = 1.$$

3.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) (x - y)dy &= (x + y)dx; & 2) (x + y - 2)dy &= (2y - 2)dx; \\ 3) y' &= 4x^2 - \frac{y^2}{x^4}. \end{aligned}$$

3.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) y' + y \operatorname{ctg} x &= \sin x; & 2) 2x(x^2 + y)dx &= dy; \\ 3) 3(xy' + y) &= y^2 \ln x, \quad y(1) = 3. \end{aligned}$$

3.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$4y' = y^2 + \frac{4}{x^2}, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

3.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx = (1 - y\sqrt{x^2 + y^2})dy.$$

3.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$y(1 + xy)dx - x dy = 0.$$

3.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) (1 - x^2)y' - xy &= xy^2; & 2) y' &= \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}; \\ 3) e^{x/y}dx - \frac{x}{y} \left(e^{x/y} + \frac{y}{x} \right) dy &= 0; & 4) \left(xy^2 + \frac{x^2}{y^2} \right) dx + \left(x^2y - \frac{2x^3}{3y^3} \right) dy &= 0. \end{aligned}$$

3.10. Решить уравнения

$$1) y'(x - \ln y') = 1; \quad 2) (y')^2 - (y')^3 = y^2; \quad 3) (y')^3 = 3(xy' - y).$$

3.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$x^3(y')^2 + x^2yy' + 1 = 0.$$

3.12. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведённой из произвольной точки кривой, равен двум.

Вариант № 4

4.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax + a^2.$$

4.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y(y' + x) = 1.$$

4.3. Решить уравнение

$$y' = \sqrt{2x + y - 3}, \quad y(0) = 4.$$

4.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{array}{ll} 1) \quad xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}; & 2) \quad (9x - y - 8)dy = (x + 7y - 8)dx; \\ 3) \quad y' = x + \frac{x^3}{y}. \end{array}$$

4.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{array}{ll} 1) \quad (1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2; & 2) \quad (x + y^2)dy = ydx; \\ 3) \quad y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1. \end{array}$$

4.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$xy' = y^2 + 2(x + 1)y + x^2 + x, \quad y_1 = ax + b$$

4.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0.$$

4.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(x^2 + y)dx - x dy = 0.$$

4.9. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} 1) \quad (1 + e^x)yy' = e^x; & 2) \quad y dx + 2(\sqrt{xy} - x)dy = 0; \\ 3) \quad xy' - y = x\left(1 + \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right); & 4) \quad \frac{1 + xy}{x^2y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy = 0. \end{array}$$

4.10. Решить уравнения

$$1) \quad (y' + 1)^3 = (y' - y)^2; \quad 2) \quad x = y'\sqrt{(y')^2 + 1}; \quad 3) \quad y = 2xy' - 4(y')^3.$$

4.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$(y')^3 - 3x^2y' + 4xy = 0.$$

4.12. Скорость обесценивания оборудования вследствие износа пропорциональна в каждый момент времени его фактической стоимости. Если начальная стоимость оборудования S_0 , какова будет его стоимость по истечении t лет?

Вариант № 5

5.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

5.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

5.3. Решить уравнение

$$y' = \frac{2}{x + 2y} - 3, \quad y(0) = 0,5.$$

5.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad y' \operatorname{tg} \frac{y+2}{x+1} &= \frac{y+2}{x+1}; & 2) \quad y' &= \frac{x+y-2}{3x-y-2}; \\ 3) \quad x^3(y'-x) &= y^2. \end{aligned}$$

5.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad 2xy' - y &= x \ln x; & 2) \quad (2e^y - x)y' &= 1; \\ 3) \quad 2y' - 3y \cos x &= -e^{-2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1. \end{aligned}$$

5.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2 y' = x^2 y^2 + 3xy + 3, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

5.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0.$$

5.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0.$$

5.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad y(1+x^2)y' &= 1+y^2; & 2) \quad x dy &= y \left(1 + \ln \frac{x}{y}\right) dx; \\ 3) \quad y^2 - 4xy + 4x^2y' &= 0; & 4) \quad (\sin 2x - 2 \cos(x+y))dx &- 2 \cos(x+y)dy = 0. \end{aligned}$$

5.10. Решить уравнения

$$1) \quad y' = e^{xy'/y}; \quad 2) \quad y = xy' - 2x^2(y')^3; \quad 3) \quad 2xy' - y = \ln y'.$$

5.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$y' = \ln \frac{y}{y' - 1}.$$

5.12. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до пересечения с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:2.

Вариант № 6

6.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^2.$$

6.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = x - e^y.$$

6.3. Решить уравнение

$$y' = \frac{2x + 2y - 1}{x + y}, \quad y(1) = 0.$$

6.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) (x^2 + xy)y' &= x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2; & 2) y' &= \frac{x + 3y + 4}{3x - 6}; \\ 3) 2x^2y' &= y^3 + xy. \end{aligned}$$

6.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) y' + 2xy &= 2xe^{-x^2}; & 2) x(dy - y dx) &= e^x dx; \\ 3) y' + 2y \operatorname{cth} x &= y^2 \operatorname{ch} x, \quad y(1) = 1/\operatorname{sh} 1. \end{aligned}$$

6.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2y' = y^2 + 2xy - 2x^2, \quad y_1 = ax + b$$

6.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{x dy}{x^2 + y^2} - \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx = 0.$$

6.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$xydx - (y^3 + x^2y + x^2)dy = 0.$$

6.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) yy' + x &= 1; & 2) xy' &= y \ln \frac{y}{x}; \\ 3) (x^2 + y^2)dx + 2xy dy &= 0; & 4) 3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy &= 0. \end{aligned}$$

6.10. Решить уравнения

$$1) y = (y')^2 + (y')^3; \quad 2) y = \ln(1 + (y')^2); \quad 3) 2(y')^2(y - xy') = 1.$$

6.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$5x(y')^2 + 1 = yy'(1 + yy').$$

6.12. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой жидкости, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Если при прохождении слоя толщиной 3 м поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого света дойдёт до глубины 15 м?

Вариант № 7

7.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

7.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' + y = 0.$$

7.3. Решить уравнение

$$y' = \cos(y - x), \quad y(\pi) = 0.$$

7.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{array}{ll} 1) y' = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right); & 2) y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}; \\ 3) 2xdy + (x^2y^4 + 1)ydx = 0. & \end{array}$$

7.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{array}{ll} 1) y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x; & 2) \operatorname{ch} x dx = (1 + \operatorname{sh} x) dy; \\ 3) y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}y^4 \sin x, \quad y(0) = 1. & \end{array}$$

7.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$y' = y^2 - 2xy + x^2, \quad y_1 = ax + b$$

7.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(3x^2 + 6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy - 3y^2)dy = 0.$$

7.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$$

7.9. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} 1) x^2y' + y^2 = y; & 2) (2x - y)dx + (x + y)dy = 0; \\ 3) xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y; & 4) \left(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy = 0. \end{array}$$

7.10. Решить уравнения

$$1) (y')^4 - (y')^2 = y^2; \quad 2) 2xy' - y = y' \ln(yy'); \quad 3) y = 2xy' + \frac{1}{(y')^2}.$$

7.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$\frac{1}{4}(y')^2 - y' + y = 2x - 3.$$

7.12. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют с полярным радиусом и полярной осью равные углы.

Вариант № 8

8.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax + b.$$

8.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x + y}.$$

8.3. Решить уравнение

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}, \quad y(1) = 1.$$

8.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) (2xy + y^2)dx &= (x^2 - y^2)dy; & 2) y' &= \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}; \\ 3) ydx + x(2xy + 1)dy &= 0. \end{aligned}$$

8.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) y + y' \ln^2 y &= (x + 2 \ln y)y'; & 2) y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy &= 2dy; \\ 3) xy' + y &= y^2 \ln x, \quad y(1) = 1. \end{aligned}$$

8.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3, \quad y_1 = ax + b$$

8.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + y \right) dx + \left(x + \frac{1}{y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) dy = 0.$$

8.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(xy - x^2)y' + (y^2 - 3xy - 2x^2) = 0.$$

8.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) y' \sin x &= y\sqrt{\ln y}; & 2) (x + y)dx - (x + y)dy &= 0; \\ 3) x^2y' &= y^2 + xy; & 4) \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y \right) dy &= 0. \end{aligned}$$

8.10. Решить уравнения

$$1) (y')^3 + y^2 = xy y'; \quad 2) y' = e^{xy'/y}; \quad 3) xy' - y = \ln y'.$$

8.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$(y')^2 - 8xy' + 8x^2 + 4y = 0.$$

8.12. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, входит в достаточно толстую стену. Сопротивление стены сообщает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату её скорости с коэффициентом пропорциональности $k = 7$ м⁻¹. Найти скорость пули через 0,001 с после вхождения в стену.

Вариант № 9

9.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = e^x(ax + b).$$

9.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$x^2 + y^2 y' = 1.$$

9.3. Решить уравнение

$$y' - y = 2x - 3, \quad y(1) = 2.$$

9.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad x dy - y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right) dx &= 0; & 2) \quad y' &= \frac{2x + y - 3}{2x - 2}; \\ 3) \quad 2y' + x &= 4\sqrt{y}. \end{aligned}$$

9.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad xy' &= y + x^2 \cos x; & 2) \quad (xy + \sqrt{y})dy + y^2 dx &= 0; \\ 3) \quad xy' - y &= -y^2(\ln x + 2) \ln x, \quad y(1) = 1. \end{aligned}$$

9.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$y' + e^{-x}y^2 + y = 3e^x, \quad y_1 = e^{ax}$$

9.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

9.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$xy' + (\sin y - 3x^2 \cos y) \cos y = 0.$$

9.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad 1 + \ln \frac{y}{x} + \ln^2 \frac{y}{x} &= \frac{x}{y} y'; & 2) \quad (x + 6\sqrt{x^2 + y^2})y' &= y; \\ 3) \quad \frac{\operatorname{ctg} y}{\cos^2 x} dx + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y} dy &= 0; & 4) \quad (2x - \ln(y + 1))dx - \frac{x + y}{y + 1} dy &= 0. \end{aligned}$$

9.10. Решить уравнения

$$1) \quad x[(y')^2 - e^{2y}] = -2y'; \quad 2) \quad y = (y' - 1)e^{y'}; \quad 3) \quad y = xy' + \cos y'.$$

9.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$2y^2(y')^2 - 2x(y')^2 + 4yy' + 1 = 0.$$

9.12. Нормаль AB к некоторой кривой пересекает ось Ox в точке B . Доказать, что если абсцисса точки B вдвое больше абсциссы точки A , то кривая является равнобочной гиперболой.

Вариант № 10

10.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = a \sin(x + b).$$

10.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = \frac{y - 3x}{x + 3y}.$$

10.3. Решить уравнение

$$(2x + y + 2)dx - (4x + 2y + 9)dy = 0, \quad y(0) = 0.$$

10.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad xy' &= y + \sqrt{x^2 + y^2}; & 2) \quad (2x - y + 1)dx &= (2x + y - 1)dy; \\ 3) \quad y' &= y^2 - \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

10.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad y' - e^x(x^2 + 1) &= \frac{2y}{x + 1}; & 2) \quad (1 + y^2)dx &= (\operatorname{arctg} y - x)dy; \\ 3) \quad 2(xy' + y) &= y^2 \ln x, \quad y(1) = 0,5. \end{aligned}$$

10.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$y' - e^x y^2 + 3y = e^{-x}, \quad y_1 = e^{ax}$$

10.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(2x - \ln(y + 1))dx - \frac{x + y}{y + 1}dy = 0.$$

10.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(x^2 + 1)(2xdx + \cos y dy) = 2x \sin y dx.$$

10.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad \sqrt{1 + \cos 2x} + (1 + \sin y)y' &= 0; & 2) \quad y' - \frac{y}{x} &= \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \\ 3) \quad (x + e^y)dx + (\cos y + xe^y)dy &= 0; & 4) \quad (\sqrt{xy} - x)dy &= -ydx. \end{aligned}$$

10.10. Решить уравнения

$$1) \quad x = 2y' - \ln y'; \quad 2) \quad (y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y; \quad 3) \quad xy'(y' + 2) = y.$$

10.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$(y')^2 - 2yy' + 4e^{2x} = 0.$$

10.12. Материальная точка массой $m = 1$ г движется прямолинейно. На неё действует в направлении движения сила, пропорциональная времени, протекшему с момента, когда скорость точки была равна нулю, с коэффициентом пропорциональности $k_1 = 2$ г·см/с². Кроме того, точка испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости движения, с коэффициентом пропорциональности $k_2 = 3$ г/с. Найти скорость точки через 3 с после начала движения.

Вариант № 11

11.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^2 + bx + c.$$

11.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

11.3. Решить уравнение

$$(x + 2y)y' = 1, \quad y(0) = -1.$$

11.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{array}{ll} 1) (x^2 + y^2)y' = 2xy; & 2) (y + 2)dx - (2x + y - 4)dy = 0, \quad y(1) = 1; \\ 3) 2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}. \end{array}$$

11.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{array}{ll} 1) y' + 2xy = xe^{-x^2}; & 2) (2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0; \\ 3) xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x, \quad y(1) = 1. \end{array}$$

11.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$y' = y^2 - 2y \sin x + \cos x + \sin^2 x, \quad y_1 = a \sin x$$

11.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)dy.$$

11.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(x^2 + 1)(2xdx + \cos y dy) = 2x \sin y dx.$$

11.9. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} 1) y' = 3x^2y - x^2; & 2) y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}; \\ 3) (x^2 + 2xy - y^2)dx = (y^2 + 2xy - x^2)dy; & 4) \left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x^2}{y} \cos \frac{2x}{y} dy = 0. \end{array}$$

11.10. Решить уравнения

$$1) y = (y' - 1)e^{y'}; \quad 2) x = y' \cos y'; \quad 3) y = xy' + y' + \sqrt{y'}.$$

11.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$x^4(y')^2 + xy' + y = 0.$$

11.12. Доказать, что кривая, все нормали которой проходят через одну и ту же фиксированную точку, есть окружность.

Вариант № 12

12.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1.$$

12.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = (y - 1)x.$$

12.3. Решить уравнение

$$y' \ln^2(y - x) = (y - x) + \ln^2(y - x), \quad y(0) = 1.$$

12.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{array}{ll} 1) (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x; & 2) (x + y - 1)^2 dx = 2(y + 2)^2 dy; \\ 3) \frac{2}{3} xy y' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2. \end{array}$$

12.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{array}{ll} 1) (1 + x^2)y' = 2xy + (1 + x^2)^2; & 2) 2(y^3 - y + xy)dy = dx; \\ 3) xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}. \end{array}$$

12.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$y' + y^2 - 2y \cos x + \sin x + \cos^2 x = 0, \quad y_1 = a \cos x$$

12.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{x dy}{x^2 + y^2} + \left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx = 0.$$

12.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$x dy = (1 + xy)dx.$$

12.9. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} 1) xy' + y = y^2; & 2) (y^2 - 3x^2)dy + 2xy dx = 0; \\ 3) (2y^2 - xy)dx = (x^2 - xy + y^2)dy; & 4) (3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0. \end{array}$$

12.10. Решить уравнения

$$1) y' - \sin y' = 0; \quad 2) y = \frac{1}{2}(y')^2 + \ln y'; \quad 3) y = 2xy' - (y')^2.$$

12.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$4(y')^2 + 3x^5 y' = 9x^4 y.$$

12.12. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M , без топлива она равна m . Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха, если скорость истечения продуктов горения из ракеты равна v , а начальная скорость ракеты равна нулю (формула Циолковского).

Вариант № 13

13.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = a \cos(x + b).$$

13.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

13.3. Решить уравнение

$$(4 - x - 2y)dx - 2(1 + x + 2y)dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

13.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad xy' - y &= \frac{x}{\operatorname{arctg}(y/x)}; & 2) \quad y' &= \frac{3y + 3}{2x + y - 1}; \\ 3) \quad 2y + (x^2y + 1)xy' &= 0. \end{aligned}$$

13.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad (xy' - 1) \ln x &= 2y; & 2) \quad (\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' &= 1; \\ 3) \quad 2y' + 3y \cos x &= e^{2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1. \end{aligned}$$

13.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2y' - 5xy + x^2y^2 + 8 = 0, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

13.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0.$$

13.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(y \cos y + x \sin y)dx = (y \sin y - x \cos y)dy.$$

13.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad (1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} &= xy; & 2) \quad \left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx - x \cos \frac{y}{x}dy &= 0; \\ 3) \quad xy + y^2 &= 2(x^2 + xy)y'; & 4) \quad (3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy &= 0. \end{aligned}$$

13.10. Решить уравнения

$$1) \quad y' = \operatorname{arctg} \left[\frac{y}{(y')^2} \right]; \quad 2) \quad x = 2(\ln y' - y'); \quad 3) \quad y = \frac{1}{2}(xy' + y' \ln y').$$

13.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$(1 - x^2)(y')^2 + 2xyy' + x^2 = 0.$$

13.12. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и начала координат.

Вариант № 14

14.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^3.$$

14.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$yy' = -\frac{x}{2}.$$

14.3. Решить уравнение

$$y' = \frac{x + y + 1}{\sqrt{x + y - 1}}, \quad y(0) = 1.$$

14.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad y' &= \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg} \frac{y+2}{x+1}; & 2) \quad (2x-2)dy &= (x+y-2)dx; \\ 3) \quad 2xy'(x-y^2) + y^3 &= 0. \end{aligned}$$

14.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad y' \sin x - y \cos x &= 1; & 2) \quad \operatorname{ch} y \, dx &= (1 + x \operatorname{sh} y)dy; \\ 3) \quad 2(y' + yx) &= (x-1)e^x y^2, \quad y(0) = 2. \end{aligned}$$

14.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$(3x^2 + 2y)(1 + y)dx + (2x - x^3)dy = 0, \quad y_1 = ax + b$$

14.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + 1 + \operatorname{arctg} y)dy = 0.$$

14.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(x^2 \cos x - y)dx + x \, dy = 0.$$

14.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad x \sin \frac{y}{x} y' + x &= y \sin \frac{y}{x}; & 2) \quad \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx + \left(y - \frac{2y}{x} \right) dy &= 0; \\ 3) \quad y^2 y' &= 1 - 2x; & 4) \quad (3x^2 y - 4xy^2) dx + (x^3 + 12y^3) dy &= 0. \end{aligned}$$

14.10. Решить уравнения

$$1) \quad x = e^{2y'} [2(y')^2 - 2y' + 1]; \quad 2) \quad y = y' \ln y'; \quad 3) \quad y = xy' + \sqrt{4 + (y')^2}.$$

14.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$y = y' + \frac{1}{2}(x - \ln y').$$

14.12. Найти форму зеркала, отражающего все лучи, которые выходят из одной точки, параллельно данному направлению.

Вариант № 15

15.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = (x - a)^3.$$

15.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = 2 + y^2.$$

15.3. Решить уравнение

$$xy' = \cos(x - y) + x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

15.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{array}{ll} 1) \quad xy' = y \sin(\ln y - \ln x); & 2) \quad (2x - 4y + 6) + (x + y - 3)y' = 0; \\ 3) \quad 4y^6 + x^3 = 6xy^5y'. \end{array}$$

15.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{array}{ll} 1) \quad y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1; & 2) \quad 2y^2 dx + (x + e^{1/y}) dy = 0; \\ 3) \quad x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right) dy, \quad y(1/2) = 2. \end{array}$$

15.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2 y' = x^2 y^2 + 3xy + 4, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

15.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)y dy = 0.$$

15.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$y dx - x dy + \ln x dx = 0.$$

15.9. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} 1) \quad xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}; & 2) \quad y' + xy = xy^3; \\ 3) \quad 2x - 1 - \frac{y}{x^2} = \left(2y - \frac{1}{x}\right)y'; & 4) \quad (x^2 + y^2)dx + xy dy = 0. \end{array}$$

15.10. Решить уравнения

$$1) \quad (y')^3 - xy^4 y' - y^5 = 0; \quad 2) \quad x^3(y')^2 + x^2 y y' + 2 = 0; \quad 3) \quad y = 2xy' + y^2(y')^3.$$

15.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$4(xy' - 2y) = 4x^2 - (y')^2.$$

15.12. Найти кривую, зная, что треугольник, образованный нормалью к ней и осями координат, равновелик треугольнику, образованному осью Ox , касательной и нормалью к этой же кривой.

Вариант № 16

16.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 - a^2y - 2y = 0.$$

16.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y'(x^2 + 2) = y.$$

16.3. Решить уравнение

$$(2y - x + 1)dx + (4y - 2x + 6)dy = 0, \quad y(0) = 0.$$

16.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad x^2y' - y^2 &= 2x^2; & 2) \quad (9x - y - 8)dy &= (x + 7y - 8)dx; \\ 3) \quad y(1 + \sqrt{x^2y^4 + 1})dx &+ 2xdy = 0. \end{aligned}$$

16.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad y' - x &= \frac{2xy}{x^2 - 1}; & 2) \quad y' &= \frac{y^2}{x + y}; \\ 3) \quad 2(xy' + y) &= y^2 \ln x, \quad y(1) = 2. \end{aligned}$$

16.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$3x^2y' = x^2y^2 + 2, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

16.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\left(y + \frac{2}{x^2}\right)dx + \left(x + \frac{3}{y^2}\right)dy = 0.$$

16.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2y dy = 0.$$

16.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad y(1 + x^2)y' &= 1 + y^2; & 2) \quad x dy &= y\left(1 + \ln \frac{x}{y}\right)dx; \\ 3) \quad y^2 - 4xy + 4x^2y' &= 0; & 4) \quad [\sin 2x - 2 \cos(x + y)]dx &- 2 \cos(x + y)dy = 0. \end{aligned}$$

16.10. Решить уравнения

$$1) \quad y = (y' - 1)e^{y'}; \quad 2) \quad x = y' \cos y'; \quad 3) \quad y = xy' + y' + \sqrt{y'}.$$

16.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$y' = y^2 e^{-\frac{x}{y}y'}.$$

16.12. Две жидкости массами x и y подвергаются дистилляции. Известно, что в любой момент времени отношение масс испарённых жидкостей пропорционально отношению масс, находящихся ещё в жидком состоянии. Определить зависимость между x и y .

Вариант № 17

17.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$ay - \sin ax = 0.$$

17.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y'(x + y) = y.$$

17.3. Решить уравнение

$$y' = \sqrt{2x + y - 3}, \quad y(0) = 4.$$

17.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{array}{ll} 1) \quad xy' = y(\ln y - \ln x); & 2) \quad y' = \frac{4y - 8}{3x + 2y - 7}; \\ 3) \quad (x + y^3)dx + 3(y^3 - x)y^2dy = 0. \end{array}$$

17.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{array}{ll} 1) \quad y \, dx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0; & 2) \quad (2x + y)dy = ydx + 4 \ln y \, dy; \\ 3) \quad 2y' + y \cos x = y^{-1}(1 + \sin x) \cos x, \quad y(0) = 1. \end{array}$$

17.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2 y' + x^2 y^2 + xy - 4 = 0, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

17.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\left(x - \frac{y}{(x + 2y)^2} \right) dx + \frac{x \, dy}{(x + 2y)^2} = 0.$$

17.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$y(1 + xy)dx - x \, dy = 0.$$

17.9. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} 1) \quad y' - y = y^3; & 2) \quad (x + y)^2 y' = 1; \\ 3) \quad y' = \frac{x}{y} 2^{y/x} + \frac{y}{x}; & 4) \quad \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0. \end{array}$$

17.10. Решить уравнения

$$1) \quad y' - \sin y' = 0; \quad 2) \quad y = \frac{1}{2}(y')^2 + \ln y'; \quad 3) \quad y = 2xy' - (y')^2.$$

17.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$(y - xy')^2 = y' + 1.$$

17.12. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина, равная трем.

Вариант № 18

18.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x - ay^2 - by - c = 0.$$

18.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

18.3. Решить уравнение

$$y' = \sqrt{2x + y - 3}, \quad y(0) = 4.$$

18.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad xy \, dy - y^2 dx &= (x + y)^2 e^{-y/x} dx; & 2) \quad (x + y - 2) dy &= (2y - 2) dx; \\ 3) \quad (y^4 - 3x^2) dy &+ xy dx = 0. \end{aligned}$$

18.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad (1 + y^2) y' &= \operatorname{arctg} y - x; & 2) \quad y' &= \frac{y}{3x - y^2}; \\ 3) \quad 3(xy' + y) &= y^2 \ln x, \quad y(1) = 3. \end{aligned}$$

18.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$y' + y^2 = -\frac{1}{4x^2}, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

18.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{1 + xy}{x^2 y} dx + \frac{1 - xy}{xy^2} dy = 0.$$

18.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0.$$

18.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad xy' + y &= y^2; & 2) \quad (y^2 - 3x^2) dy &+ 2xy \, dx = 0; \\ 3) \quad y' &= \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x); & 4) \quad xe^{y^2} dx &+ (x^2 ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y) dy = 0. \end{aligned}$$

18.10. Решить уравнения

$$1) \quad (y' + 1)^3 = (y' - y)^2; \quad 2) \quad x = y' \sqrt{(y')^2 + 1}; \quad 3) \quad y = 2xy' - 4(y')^3.$$

18.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$x^5 (y')^3 + x^4 y (y')^2 - 1 = 0.$$

18.12. В момент времени $t = 0$ имеется x_0 первичного радиоактивного вещества с постоянной распада λ_1 , в процессе распада которого образуется вторичное радиоактивное вещество с постоянной распада $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Определить количество нераспавшихся к моменту времени t веществ.

Вариант № 19

19.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$(x - a)^2 + by^2 = 1.$$

19.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

19.3. Решить уравнение

$$y' = \frac{1}{3x + y}, \quad y(0) = 1.$$

19.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad x \, dy &= (xe^{y/x} + y)dx; & 2) \quad y' &= \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}; \\ 3) \quad y^3 dx &+ 2(x^2 - xy^2)dy = 0. \end{aligned}$$

19.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad y' + 2xy &= xe^{-x^2}; & 2) \quad 2y \, dx + (y^2 - 6x)dy &= 0; \\ 3) \quad 2y' - 3y \cos x &= -e^{-2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1. \end{aligned}$$

19.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$(x^2 y^2 + xy + 1)dx - x^2 dy = 0, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

19.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(2x - \ln(y + 1))dx - \frac{x + y}{y + 1}dy = 0.$$

19.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(x^2 + y)dx - x \, dy = 0.$$

19.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad (1 - x^2)y' - xy &= xy^2; & 2) \quad y' &= \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}; \\ 3) \quad e^{x/y} dx - \frac{x}{y} \left(e^{x/y} + \frac{y}{x} \right) dy &= 0; & 4) \quad \left(xy^2 + \frac{x^2}{y^2} \right) dx &+ \left(x^2 y - \frac{2x^3}{3y^3} \right) dy = 0. \end{aligned}$$

19.10. Решить уравнения

$$1) \quad (y')^4 - (y')^2 = y^2; \quad 2) \quad 2xy' - y = y' \ln(yy'); \quad 3) \quad y = 2xy' + \frac{1}{(y')^2}.$$

19.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$(y')^3 - xy' + y = 0.$$

19.12. Найти кривую, которая имеет следующее свойство: отрезок оси Ox от начала координат до пересечения с касательной к этой кривой в любой точке пропорционален ординате этой точки.

Вариант № 20

20.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

20.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' = 2y.$$

20.3. Решить уравнение

$$2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0, \quad y(0) = 2.$$

20.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad y' &= \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right); & 2) \quad (2x - 2)dy &= (x + 2y - 3)dx; \\ 3) \quad (x^2y^2 - 1)y' &+ 2xy^3 = 0. \end{aligned}$$

20.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad xy' - x^2 \cos x &= y; & 2) \quad 2(y^3 - y + xy)dy &= dx; \\ 3) \quad y' + xy &= (1 + x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1. \end{aligned}$$

20.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$(y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x)dx - xdy = 0, \quad y_1 = ax + b$$

20.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{3x^2 + y}{y^2}dx = \frac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3}dy.$$

20.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(xy - x^2)y' + (y^2 - 3xy - 2x^2) = 0.$$

20.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad (1 + e^x)yy' &= e^x; & 2) \quad y \, dx + 2(\sqrt{xy} - x)dy &= 0; \\ 3) \quad xy' - y &= x\left(1 + \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right); & 4) \quad \frac{1 + xy}{x^2y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy &= 0. \end{aligned}$$

20.10. Решить уравнения

$$1) \quad y = x + y' - \ln y'; \quad 2) \quad x[(y')^2 - 1] = 2y'; \quad 3) \quad y = xy' - (y')^2.$$

20.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$(y')^2 + 4e^{-3x}y' + 6e^{-3x}y = 0.$$

20.12. Электрическая цепь состоит из ключа и последовательно соединённых емкости C и индуктивности L . В момент времени $t = 0$ ключ замыкается. Найти закон изменения напряжения на емкостном элементе, если первоначально он был заряжен до напряжения E .

Вариант № 21

21.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^2.$$

21.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = x - e^y.$$

21.3. Решить уравнение

$$y' = \frac{2x + 2y - 1}{x + y}, \quad y(1) = 2.$$

21.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) (x^2 + xy)y' &= x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2; & 2) y' - \frac{x + 3y + 4}{3x - 6}; \\ 3) (1 + \sqrt{y^2/x - 1})dx - 2ydy &= 0. \end{aligned}$$

21.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) y' + 2xy &= 2xe^{-x^2}; & 2) x(dy - ydx) &= e^x dx; \\ 3) y' + 2y \operatorname{cth} x &= y^2 \operatorname{ch} x, \quad y(1) = 1/\operatorname{sh} 1. \end{aligned}$$

21.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2 y' = x^2 y^2 - 5xy + 4, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

21.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{x dy}{x^2 + y^2} - \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx = 0.$$

21.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$xydx - (y^3 + x^2y + x^2)dy = 0.$$

21.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) yy' + x &= 1; & 2) xy' &= y \ln \frac{y}{x}; \\ 3) (x^2 + y^2)dx + 2xy dy &= 0; & 4) 3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy &= 0. \end{aligned}$$

21.10. Решить уравнения

$$1) y = (y')^2 + (y')^3; \quad 2) y = \ln(1 + (y')^2); \quad 3) 2(y')^2(y - xy') = 1.$$

21.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$3(y')^2 - 4e^{2x}y' + 4ye^{2x} = 0.$$

21.12. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой жидкости, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Если при прохождении слоя толщиной 3 м поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого света дойдёт до глубины 15 м?

Вариант № 22

22.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = a \sin(x + b).$$

22.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = \frac{y - 3x}{x + 3y}.$$

22.3. Решить уравнение

$$(x + 2y)y' = 1, \quad y(0) = 1.$$

22.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} &= x; & 2) (2x - y + 1)dx &= (2x + y - 1)dy; \\ 3) (4x^2 + y^4)dy - 2xydx &= 0. \end{aligned}$$

22.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) (1 + y^2)dx &= (\operatorname{arctg} y - x)dy; & 2) (1 - 2xy)y' &= y(y - 1); \\ 3) 2(xy' + y) &= y^2 \ln x, \quad y(1) = 0,5. \end{aligned}$$

22.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2 y' = x^2 y^2 + 5xy + 9, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

22.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy.$$

22.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(x^2 + 1)(2xdx + \cos y dy) = 2x \sin y dx.$$

22.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{1 + \cos 2x} + (1 + \sin y)y' &= 0; & 2) y' - \frac{y}{x} &= \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \\ 3) (x + e^y)dx + (\cos y + xe^y)dy &= 0; & 4) (\sqrt{xy} - x)dy &= -y dx. \end{aligned}$$

22.10. Решить уравнения

$$1) x = 2y' - \ln y'; \quad 2) (y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y; \quad 3) xy'(y' + 2) = y.$$

22.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$4yy' = x(y')^2 + x^3.$$

22.12. Материальная точка массой $m = 1$ г движется прямолинейно. На неё действует в направлении движения сила, пропорциональная времени, протекшему с момента, когда скорость точки была равна нулю, с коэффициентом пропорциональности $k_1 = 2$ г·см/с². Кроме того, точка испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости движения, с коэффициентом пропорциональности $k_2 = 3$ г/с. Найти скорость точки через 3 с после начала движения.

Вариант № 23

23.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

23.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' + y = 0.$$

23.3. Решить уравнение

$$y' = \cos(y - x), \quad y(\pi) = 0.$$

23.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{array}{ll} 1) y' = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right); & 2) y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}; \\ 3) (3x^2y^2 + 1)y' + 3xy^3 = 0. & \end{array}$$

23.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{array}{ll} 1) y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x; & 2) \operatorname{ch} x dx = (1 + \operatorname{sh} x) dy; \\ 3) y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}y^4 \sin x, \quad y(0) = 1. & \end{array}$$

23.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2y' = x^2y^2 - 7xy + 9, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

23.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(3x^2 + 6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy - 3y^2)dy = 0.$$

23.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$$

23.9. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} 1) x^2y' + y^2 = y; & 2) (2x - y)dx + (x + y)dy = 0; \\ 3) xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y; & 4) \left(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy = 0. \end{array}$$

23.10. Решить уравнения

$$1) (y')^4 - (y')^2 = y^2; \quad 2) 2xy' - y = y' \ln(yy'); \quad 3) y = 2xy' + \frac{1}{(y')^2}.$$

23.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$6y(y')^2 = 2x(y')^3 + 3x^4.$$

23.12. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют с полярным радиусом и полярной осью равные углы.

Вариант № 24

24.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = a \cos(x + b).$$

24.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

24.3. Решить уравнение

$$(y - 3x + 2)dx + (3x - y - 1)dy = 0, \quad y(0) = 0.$$

24.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad xy' - y &= \frac{x}{\operatorname{arctg}(y/x)}; & 2) \quad y' &= \frac{3y + 3}{2x + y - 1}; \\ 3) \quad y' &= 4x^2 - \frac{y^2}{x^4}. \end{aligned}$$

24.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad (xy' - 1) \ln x &= 2y; & 2) \quad 2x(x^2 + y)dx &= dy; \\ 3) \quad 2y' + 3y \cos x &= \frac{e^{2x}(2 + 3 \cos x)}{y}, \quad y(0) = 1. \end{aligned}$$

24.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

24.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0.$$

24.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(y \cos y + x \sin y)dx = (y \sin y - x \cos y)dy.$$

24.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad (1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} &= xy; & 2) \quad \left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx - x \cos \frac{y}{x}dy &= 0; \\ 3) \quad xy + y^2 &= 2(x^2 + xy)y'; & 4) \quad (3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy &= 0. \end{aligned}$$

24.10. Решить уравнения

$$1) \quad y' = \operatorname{arctg} \left[\frac{y}{(y')^2} \right]; \quad 2) \quad x = 2(\ln y' - y'); \quad 3) \quad y = \frac{1}{2}(xy' + y' \ln y').$$

24.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$1 + yy' + y' \ln y' = xy'.$$

24.12. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и начала координат.

Вариант № 25

25.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$ay - \sin ax = 0.$$

25.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y'(x + y) = y.$$

25.3. Решить уравнение

$$y' = \sqrt{2x + y - 3}, \quad y(0) = 4.$$

25.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) (y^2 - x^2)dy + 2xy dx &= 0; & 2) y' &= \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}; \\ 3) y' &= x + \frac{x^3}{y}. \end{aligned}$$

25.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) y dx - (3x + 1 + \ln y)dy &= 0; & 2) (2e^y - x)y' &= 1; \\ 3) 2y' + y \cos x &= y^{-1}(1 + \sin x) \cos x, & y(0) &= 1. \end{aligned}$$

25.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2 y' = x^2 y^2 - 3xy + 1, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

25.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0.$$

25.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$y(1 + xy)dx - x dy = 0.$$

25.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) y' - y &= y^3; & 2) 2(x - y^2)dy &= ydx; \\ 3) y' &= \frac{x}{y} 2^{y/x} + \frac{y}{x}; & 4) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx &+ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0. \end{aligned}$$

25.10. Решить уравнения

$$1) y' - \sin y' = 0; \quad 2) y = \frac{1}{2}(y')^2 + \ln y'; \quad 3) y = 2xy' - (y')^2.$$

25.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$4y(y')^2 - 2x(y')^3 - x^2 = 0.$$

25.12. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина, равная трем.

Вариант № 26

26.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = (x - a)^3.$$

26.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = 2 + y^2.$$

26.3. Решить уравнение

$$xy' = \cos(x - y) + x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

26.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad xy' &= y \sin(\ln y - \ln x); & 2) \quad (2x - 4y + 6) + (x + y - 3)y' &= 0; \\ 3) \quad x^3(y' - x) &= y^2. \end{aligned}$$

26.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad y' + \frac{y}{x} &= 2 \ln x + 1; & 2) \quad 2y^2 dx + (x + e^{1/y}) dy &= 0; \\ 3) \quad x dx &= \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right) dy, \quad y(1/2) = 2. \end{aligned}$$

26.6. Найти общее решение уравнения Риккати, используя указанную подстановку

$$dy + \left(y^2 - \frac{2}{x^2}\right) dx = 0, \quad y = \frac{1}{u(x)}$$

26.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$e^y + (xe^y - 2y)y' = 0.$$

26.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$y dx - x dy + \ln x dx = 0.$$

26.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad xy' - y &= x \operatorname{tg} \frac{y}{x}; & 2) \quad y' + xy &= xy^3; \\ 3) \quad 2x - 1 - \frac{y}{x^2} &= \left(2y - \frac{1}{x}\right)y'; & 4) \quad (x^2 + y^2)dx + xy dy &= 0. \end{aligned}$$

26.10. Решить уравнения

$$1) \quad (y')^3 - xy^4 y' - y^5 = 0; \quad 2) \quad x^3(y')^2 + x^2 y y' + 2 = 0; \quad 3) \quad y = xy' - x^2(y')^3.$$

26.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$2xy(y')^2 = 4x^3 + (x^2 + 1)(y')^3.$$

26.12. Найти кривую, зная, что треугольник, образованный нормалью к ней и осями координат, равновелик треугольнику, образованному осью Ox , касательной и нормалью к этой же кривой.

Вариант № 27

27.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

27.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' = 2y.$$

27.3. Решить уравнение

$$2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0, \quad y(0) = 2.$$

27.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) (y^2 - 3x^2)dy + 2xy dx &= 0; & 2) (2x - 2)dy &= (x + 2y - 3)dx; \\ 3) 2x^2y' &= y^3 + xy. \end{aligned}$$

27.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) xy' - x^2 \cos x &= y; & 2) 2(y^3 - y + xy)dy &= dx; \\ 3) y' + xy &= (1 + x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1. \end{aligned}$$

27.6. Найти общее решение уравнения Риккати, используя указанную подстановку

$$y' = y^2 + \frac{1}{2x^2}, \quad y = \frac{1}{u(x)}$$

27.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{3x^2 + y}{y^2}dx = \frac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3}dy$$

27.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(xy - x^2)y' + (y^2 - 3xy - 2x^2) = 0.$$

27.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) (1 + e^x)yy' &= e^x; & 2) y dx + 2(\sqrt{xy} - x)dy &= 0; \\ 3) xy' - y &= x\left(1 + \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right); & 4) \frac{1 + xy}{x^2y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy &= 0. \end{aligned}$$

27.10. Решить уравнения

$$1) y = x + y' - \ln y'; \quad 2) x[(y')^2 - 1] = 2y'; \quad 3) y = xy' - (y')^2.$$

27.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$4x^2y + (y')^2 = 2x(x^2 + 1)y'.$$

27.12. Электрическая цепь состоит из ключа и последовательно соединённых емкости C и индуктивности L . В момент времени $t = 0$ ключ замыкается. Найти закон изменения напряжения на емкостном элементе, если первоначально он был заряжен до напряжения E .

Вариант № 28

28.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 + y^2 = ax.$$

28.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$yy' + x = 0.$$

28.3. Решить уравнение

$$y'(y + x) = 1, \quad y(0) = 1.$$

28.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \frac{y'}{\sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{y}}{x} - \frac{\sqrt{y-x}}{2y-x}; & 2) (x+y-2)dy &= (2y-2)dx; \\ 3) 2xdy &+ (x^2y^4 + 1)ydx &= 0. \end{aligned}$$

28.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) y' + y \operatorname{ctg} x &= \sin x; & 2) (2x+y)dy &= ydx + 4 \ln y dy; \\ 3) 3(xy' + y) &= y^2 \ln x, \quad y(1) = 3. \end{aligned}$$

28.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$2x^2y' + x^2y^2 + 4 = 2xy, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

28.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y dx - x dy}{x^2}$$

28.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$y(1 + xy)dx - x dy = 0.$$

28.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) (1 - x^2)y' - xy &= xy^2; & 2) y' &= \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}; \\ 3) e^{x/y}dx - \frac{x}{y} \left(e^{x/y} + \frac{y}{x} \right) dy &= 0; & 4) \left(xy^2 + \frac{x^2}{y^2} \right) dx &+ \left(x^2y - \frac{2x^3}{3y^3} \right) dy = 0. \end{aligned}$$

28.10. Решить уравнения

$$1) y'(x - \ln y') = 1; \quad 2) (y')^2 - (y')^3 = y^2; \quad 3) (y')^3 = 3(xy' - y).$$

28.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$\frac{y}{xy'} + \ln y' = 1.$$

28.12. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведённой из произвольной точки кривой, равен двум.

Вариант № 29

29.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^2 + bx + c.$$

29.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

29.3. Решить уравнение

$$(x + 2y)y' = 1, \quad y(0) = -1.$$

29.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{aligned} 1) \quad & 3x^4y^2dy = (4x^6 - y^6)dx; & 2) \quad & (y + 2)dx - (2x + y - 4)dy = 0; \\ 3) \quad & ydx + x(2xy + 1)dy = 0. \end{aligned}$$

29.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{aligned} 1) \quad & y' + 2xy = xe^{-x^2}; & 2) \quad & (2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0; \\ 3) \quad & xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x, \quad y(1) = 1. \end{aligned}$$

29.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$x^2y' + x^2y^2 + 2xy = 2, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

29.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)dy$$

29.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$(x^2 + 1)(2xdx + \cos ydy) = 2x \sin ydx.$$

29.9. Решить уравнения

$$\begin{aligned} 1) \quad & y' = 3x^2y - x^2; & 2) \quad & y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}; \\ 3) \quad & (x^2 + 2xy - y^2)dx = (y^2 + 2xy - x^2)dy; & 4) \quad & \left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x^2}{y} \cos \frac{2x}{y}dy = 0. \end{aligned}$$

29.10. Решить уравнения

$$1) \quad y = (y' - 1)e^{y'}; \quad 2) \quad x = y' \cos y'; \quad 3) \quad y = xy' + y' + \sqrt{y'}.$$

29.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$x(y')^2 = y' - \frac{3}{4}e^{-2y}.$$

29.12. Доказать, что кривая, все нормали которой проходят через одну и ту же фиксированную точку, есть окружность.

Вариант № 30

30.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x - ay^2 - by - c = 0.$$

30.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

30.3. Решить уравнение

$$y' = \sqrt{2x + y - 3}, \quad y(0) = 4.$$

30.4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к однородным

$$\begin{array}{ll} 1) y^2 + x^2 y' = xyy'; & 2) (x + y - 2)dy = (2y - 2)dx; \\ 3) 2y' + x = 4\sqrt{y}. \end{array}$$

30.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$\begin{array}{ll} 1) (1 + y^2)y' = \operatorname{arctg} y - x; & 2) (1 - 2xy)y' = y(y - 1); \\ 3) 3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3. \end{array}$$

30.6. Найти общее решение уравнения Риккати, зная одно из его частных решений

$$4y' = y^2 + \frac{4}{x^2}, \quad y_1 = \frac{a}{x}$$

30.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{1 + xy}{x^2 y} dx + \frac{1 - xy}{xy^2} dy = 0.$$

30.8. Решить уравнение, найдя интегрирующий множитель

$$\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0.$$

30.9. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} 1) xy' + y = y^2; & 2) (y^2 - 3x^2)dy + 2xy dx = 0; \\ 3) y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x); & 4) xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y) dy = 0. \end{array}$$

30.10. Решить уравнения

$$1) (y' + 1)^3 = (y' - y)^2; \quad 2) x = y' \sqrt{(y')^2 + 1}; \quad 3) y = 2xy' - 4(y')^3.$$

30.11. Найти особые решения дифференциального уравнения и начертить интегральные кривые

$$4x^6 y - x^7 y' + \frac{1}{8}(y')^2 = 0.$$

30.12. В момент времени $t = 0$ имеется x_0 первичного радиоактивного вещества с постоянной распада λ_1 , в процессе распада которого образуется вторичное радиоактивное вещество с постоянной распада $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Определить количество нераспавшихся к моменту времени t веществ.