

**Вопросы к экзамену по курсу
Математика 2.1.5 (2021/2022)**

1. Линейное пространство над числовым полем K . Примеры. Свойства линейного пространства. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
2. Базис и размерность линейного пространства. Разложение по базису. Координаты вектора.
3. Переход от одного базиса линейного пространства к другому. Матрица перехода и ее свойства.
4. Отображение множеств. Сюръективное, инъективное и биективное отображение. Изоморфизм линейных пространств. Свойства изоморфных пространств.
5. Линейное подпространство и его свойства. Теорема о пополнении базиса.
6. Линейное многообразие и его свойства. Размерность линейного многообразия. Геометрические свойства решений СЛАУ. Теорема об определении подпространства арифметического пространства \mathbb{R}^n системой линейных однородных уравнений.
7. Сумма и пересечение линейных подпространств. Свойства суммы и пересечения подпространств. Теорема о связи размерностей подпространств и размерностей их суммы и пересечения (формулировка).
8. Линейная оболочка системы векторов и ее свойства.
9. Прямая сумма линейных подпространств. Теорема о необходимом и достаточном условии существования прямой суммы линейных подпространств. Теорема о представлении линейного пространства в виде прямой суммы своих подпространств.
10. Скалярное произведение и его свойства. Вещественное евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Основные метрические понятия: длина вектора, угол между векторами.
11. Ортогональность векторов евклидова пространства. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Линейная независимость ортогональной системы векторов. Теорема о вычислении координат вектора в ортонормированном базисе. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.
12. Метод ортогонализации Грама-Шмидта.
13. Матрица Грама системы векторов евклидова пространства. Определитель Грама и его геометрический смысл. Свойства определителя Грама.
14. Ортогональное дополнение к подпространству евклидова пространства и его свойства. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора.
15. Скалярное произведение в комплексном линейном пространстве и его свойства. Комплексное евклидово (унитарное) пространство.
16. Линейное отображение/оператор. Свойства линейных отображений. Теорема о построении линейного отображения.
17. Образ и ядро линейного отображения. Ранг и дефект линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте линейного отображения.
18. Операции над линейными отображениями и их свойства.
19. Обратный оператор. Теорема о линейности обратного оператора. Теорема об обратимости линейного оператора.

20. Матрица линейного оператора. Координаты вектора и его образа. Действия над матрицами линейных операторов при операциях сложения, умножения на число и произведения операторов. Преобразование матрицы оператора при переходе от одного базиса к другому. Определитель оператора. Ранг оператора.
21. Характеристический многочлен оператора. Характеристическое уравнение. Независимость характеристического многочлена от выбора базиса.
22. Инвариантное подпространство относительно линейного оператора.
23. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Спектр оператора. Свойства собственных векторов. Геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения. Схема нахождения собственных значений и векторов линейного оператора.
24. Собственное подпространство оператора и его свойства.
25. Оператор простой структуры.
26. Жорданова клетка. Присоединенные векторы линейного оператора. Жорданова цепочка. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический (или жорданов) базис.
27. Сопряженный оператор. Существование и единственность. Линейность. Свойства операции сопряжения. Матрица сопряженного оператора.
28. Самосопряженный (эрмитовый/симметрический) оператор. Матрица самосопряженного оператора. Свойства самосопряженного оператора.
29. Унитарные и ортогональные операторы и их свойства.
30. Билинейная форма. Матрица билинейной формы и ее преобразование при переходе к новому базису. Симметричная/кососимметричная билинейная форма.
31. Квадратичная форма. Свойства квадратичной формы. Канонический вид квадратичной формы.
32. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
33. Положительно/отрицательно определенная квадратичная форма. Критерий Сильвестра знакопостоянства квадратичной формы (формулировка). Закон инерции (формулировка).
34. Квадратичные формы в вещественном евклидовом пространстве. Ортогональные преобразования квадратичных форм.

Литература

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука. Физматлит, 1999.
3. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: Изд-во МГУ, 1998.
4. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Высшая математика для технических университетов. Линейная алгебра. – Томск: Изд-во ТПУ, 2014.
5. Беклемешева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том I, II(1). – М.: ИКД "Зерцало-М 2003.