Вариант 1

1.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2; 6)$, где a_1 и a_2 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2; 6) \oplus (b_1; b_2; 6) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; 6),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2; 6) = (\lambda a_1; \lambda a_2; 6);$$

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (|a_1|^{b_1}; |a_2|^{b_2}),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2) = (\lambda a_1; \lambda a_2).$$

1.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 6x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}.$$

1.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (6, 3, -7, 8, -6), \quad \boldsymbol{a}_2 = (4, 3, 6, 2, -2),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (4, 1, 1, -5, 6), \quad \boldsymbol{a}_4 = (18, 12, 11, 14, -12).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

1.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, 4, -3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, 3, -5), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{x} = (2, 1, 1).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;

2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

1.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (-7, 3, -13, 26), \quad \boldsymbol{a}_2 = (2, -4, 12, -9), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 19, -21, 6),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (3, 9, -11, 24), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-1, -9, 11, -19), \quad \boldsymbol{b}_3 = (6, 4, 0, -7).$$

1.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 1).$$

1.7. Оператор $\mathcal{A}$ проецирует векторы плоскости xOy на ось Oy, а оператор $\mathcal{B}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y = -x$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

1.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_1 - x_2, x_3, -x_1).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{A} + \mathcal{BA}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, 4, -3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, 3, -5), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1, 1, 1).$$

1.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

1.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0).$$

1.14. Линейный оператор $\mathcal{A}$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ оставляет вектор $(1, 1, 0)$ неподвижным, а вектор $(2, 1, 2)$ удваивает. Ядро оператора $\mathcal{A}$ задаётся системой уравнений $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y - x + z = 0 \end{cases}$. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$, собственные значения и собственные векторы.

1.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -2 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

1.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

1.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 3+3i & -2-5i \\ 1+2i & -3i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

1.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 2\lambda x_2 x_4$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

1.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 8x_2 x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 2

2.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2) = (\lambda a_1; \lambda a_2) = (|a_1|^\lambda; |a_2|^\lambda);$$

2) множество L состоит из всевозможных квадратных симметрических матриц размерности 2×2, т.е. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_1 & \alpha \\ \alpha & a_2 \end{pmatrix}$, где a_1, a_2 и α – действительные числа, если операции сложения элементов и умножения элемента на действительное число заданы как операции над матрицами.

2.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 11x_3 - 6x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - 15x_4 + 16x_5 = 0 \end{cases}.$$

2.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 8, 3, -4, 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 8, 7, -2, 5),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (3, -1, 7, -3, 6), \quad \boldsymbol{a}_4 = (-4, 18, 0, 2, -2).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

2.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (2, 1, 2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (3, 2, 5), \quad \boldsymbol{f}_3 = (4, 0, 0), \quad \boldsymbol{x} = (10, 1, -3).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

2.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, 5, -6, 8), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-5, -4, 5, -9), \quad \boldsymbol{a}_3 = (3, 5, -5, 1),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (3, 3, -4, 1), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-5, -3, 4, -1), \quad \boldsymbol{b}_3 = (0, 4, -3, 1).$$

2.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0, 0).$$

2.7. Оператор $\mathcal{A}$ поворачивает векторы пространства на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси Oz по часовой стрелке (если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{k}$), а оператор $\mathcal{B}$ растягивает каждый вектор в 3 раза. Найти матрицы операторов $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

2.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (-x_3 - 5x_2, -4x_3 + 5x_1, 4x_2 + x_1), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (-x_1, x_1 + x_3, x_2).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{AB}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (2,1,2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (3,2,5), \quad \boldsymbol{f}_3 = (4,0,0).$$

2.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2' = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -16 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -3,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (2,0,1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1,1,1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2,-1,1).$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

2.14. Ядро линейного оператора $\mathcal{A}$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$ задается уравнением $x-y-2z=0$. Вектор $(2,1,0)$ – собственный для $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению 2. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в том же базисе – естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

2.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\i&2\end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\mathcal{A}^\star\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

2.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1|=1$, $|\boldsymbol{e}_2|=2$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

2.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix}2+3i&-2-5i\\1+2i&-1-3i\end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

2.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+\lambda x_4^2+2\lambda x_1x_3+2x_2x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

2.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2-x_3^2+2\sqrt{3}x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 3

3.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из многочленов не выше второй степени с нулевым свободным членом, т.е. $\boldsymbol{x} = a_1x^2 + a_2x$, где a_1 и a_2 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1x^2 + a_2x) \oplus (b_1x^2 + b_2x) = (a_1 + b_1)x^2 + (a_2 + b_2)x,$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2) = \lambda a_1x^2 + \lambda a_2x;$$

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2) = (|a_1|^\lambda; |a_2|^\lambda).$$

3.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 6x_4 + 9x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 13x_3 - 12x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}.$$

3.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, -4, -5, 5, -3), \quad \boldsymbol{a}_2 = (4, -6, 5, -5, 5),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (7, 6, -5, 4, 3), \quad \boldsymbol{a}_4 = (-10, -18, 15, -13, -1).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

3.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}: \ \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, -2, 1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (-1, 1, -2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (2, 1, -3), \quad \boldsymbol{x} = (11, -6, 5).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

3.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, -5, -12, 7), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-6, 5, 13, -9), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, -1, 1, 1),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (4, -2, -5, 6), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-5, -2, 1, -6), \quad \boldsymbol{b}_3 = (1, 1, 4, 1).$$

3.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 0, 1).$$

3.7. Оператор $\mathcal{A}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно оси Oy, а оператор $\mathcal{B}$ проецирует их на прямую $y = -\sqrt{3}x$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

3.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (-x_3 + 3x_2, -2x_3 - 3x_1, 2x_2 + x_1), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (2x_1, x_1 + x_2, -x_3).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{A} - \mathcal{AB}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, -2, 1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (-1, 1, -2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (2, 1, -3).$$

3.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -25 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

3.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0).$$

3.14. Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный линейный оператор пространства $\mathbb{R}^3$, подпространство $x + y = 0$ состоит из нулевого вектора и собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению 6. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$, если 4 является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

3.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

3.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

3.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2+6i & -2-10i \\ 1+4i & -1-6i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

3.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 6x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + \lambda x_4^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2\lambda x_2x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

3.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 4

4.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из всевозможных диагональных квадратных матриц, размерности 2×2, т.е. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, где a_1 и a_2 – действительные числа, если операции сложения элементов и умножения элемента на действительное число заданы как операции над матрицами;
2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 – действительные положительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2) = (a_1^{\lambda}; a_2^{\lambda})$$

4.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 8x_4 - 12x_5 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 0 \\ -2x_1 + 12x_3 - 18x_4 + 18x_5 = 0 \end{cases}.$$

4.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (6, -2, -3, -4, 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (4, 3, 6, -1, 5),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (3, -1, 8, -1, -2), \quad \boldsymbol{a}_4 = (1, 4, -2, 0, 7).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, -1, 1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (-1, 4, 3), \quad \boldsymbol{f}_3 = (8, 1, -1), \quad \boldsymbol{x} = (8, 4, 1).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

4.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, -3, -1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-1, -3, 7, 4), \quad \boldsymbol{a}_3 = (4, 10, -24, -13),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (1, -1, 1, 2), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-1, 2, -2, 3), \quad \boldsymbol{b}_3 = (3, -5, 5, -4).$$

4.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 2, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 1, 0).$$

4.7. Оператор $\mathcal{A}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y = \sqrt{3}x$, а оператор $\mathcal{B}$ поворачивает их вокруг начала координат на угол $-\frac{\pi}{3}$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

4.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (-x_2 - 2x_3, x_1 + x_3, 2x_1 - x_2), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_3, 2x_2 - x_3).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{A} - \mathcal{BA}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, -1, 1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (-1, 4, 3), \quad \boldsymbol{f}_3 = (8, 1, -1).$$

4.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2' = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -25 & 16 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

4.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -6 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2, 0, 1).$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

4.14. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор пространства $\mathbb{R}^3$, причем вектор $(1, 0, 1)$ – собственный, отвечающий собственному значению 2, вектор $(2, 2, 1)$ совпадает со своим образом относительно действия $\mathcal{A}$, и всякий вектор из подпространства $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$ переводится оператором $\mathcal{A}$ в обратный. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

4.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

4.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

4.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} -i & i \\ -1-2i & 1+i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

4.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

4.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1 x_2 + 4x_2 x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 5

5.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2; 3) \oplus (b_1; b_2; 3) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; 3),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2; 3) = (\lambda a_1; |a_2|^\lambda; 3);$$

2) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; 3; a_3)$, где a_1 и a_3 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; 3; a_3) \oplus (b_1; 3; b_3) = (a_1 + b_1; 3; a_3 + b_3),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; 3; a_3) = (\lambda a_1; 3; \lambda a_3).$$

5.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 12x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases} .$$

5.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 6, -7, 4, -9), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, -7, 9, -7, 2),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (5, -4, 8, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_4 = (2, -1, 2, -3, -7), \quad \boldsymbol{a}_5 = (-4, -3, 1, -8, 1).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

5.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, 1, 2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, 0, 3), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1, 0, 2), \quad \boldsymbol{x} = (3, 5, -6).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

5.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (2, 1, 3, -1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-7, -3, -4, 4), \quad \boldsymbol{a}_3 = (23, 10, 15, -13),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (0, 5, -1, 11), \quad \boldsymbol{b}_2 = (1, 2, -1, 3), \quad \boldsymbol{b}_3 = (-2, 1, 1, 5).$$

5.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (0,1,0,1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1,1,0,0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1,1,1,1).$$

5.7. Оператор $\mathcal{A}$ проецирует векторы пространства на прямую $\frac{x}{\sqrt{2}} = y = z$, а оператор $\mathcal{B}$ действует на них следующим образом: $\mathcal{B}\boldsymbol{x} = [-\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{x}]$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

5.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (4x_3 + 2x_2, -x_3 - 2x_1, x_2 - 4x_1), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (2x_3, -x_2, x_1).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{AB} - \mathcal{B}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (3,1,2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2,0,3), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1,0,2).$$

5.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2' = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

5.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

5.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 1,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 5), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 5).$$

5.14. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор пространства $\mathbb{R}^3$ и всякий вектор подпространства $y - z = 0$ переводится этим оператором в обратный, а вектор $(1, 2, 3)$ совпадает со своим образом. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

5.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

5.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = \sqrt{2}$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

5.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} -2i & 2i \\ 1-4i & 1+2i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

5.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 3x_4^2 + 2\lambda x_1 x_3 - 2x_2 x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

5.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1 x_2 + 8x_1 x_3 - 8x_2 x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 6

6.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 b_1; a_2 + b_2;),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2) = (\lambda a_1; a_2);$$

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a^2; a^3)$, где a – действительное положительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a^2; a^3) \oplus (b^2; b^3) = (a^2 b^2; a^3 b^3),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a^2; a^3) = (a^{2\lambda}; a^{3\lambda}).$$

6.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}.$$

6.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (7, 6, -7, -4, -4), \quad \boldsymbol{a}_2 = (2, 1, -7, 4, -8),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (7, -2, -8, -5, 8), \quad \boldsymbol{a}_4 = (-17, 8, 10, 23, -40).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

6.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, 2, 1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, 3, 1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (-1, -3, -1), \quad \boldsymbol{x} = (2, 1, 1).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

6.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (-1, -1, -4, 14), \quad \boldsymbol{a}_2 = (3, 4, 3, -19), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, -2, -1, 5),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (1, 2, -4, 8), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-7, -12, 14, -14), \quad \boldsymbol{b}_3 = (8, 5, -3, -7).$$

6.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 1, 0).$$

6.7. Оператор $\mathcal{A}$ проецирует векторы плоскости xOy на прямую $x = 4y$, а оператор $\mathcal{B}$ зеркально отражает их относительно прямой $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

6.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (-2x_2 - 2x_3, 2x_1 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_3 - x_1, x_2 - x_1, x_1).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{B} - \mathcal{AB}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, 2, 1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, 3, 1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (-1, -3, -1).$$

6.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

6.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

6.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (2,3,0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1,2,1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0,1,1).$$

6.14. Ядром самосопряженного линейного оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$ является плоскость $2x+2y+z=0$ и 2 – собственное значение этого оператора. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

6.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6.16. Линейный оператор $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов задан матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = \sqrt{2}$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите собственные векторы и собственные значения этого оператора, матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

6.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1-i & i \\ -2i & 1+i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

6.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_4$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

6.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 7

7.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2; 8)$, где a_1 и a_2 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2; 8) \oplus (b_1; b_2; 8) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; 8),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2; 8) = (\lambda a_1; |a_2|^\lambda; 8);$$

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a; a^2)$, где a – действительное положительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a; a^2) \oplus (b; b^2) = (ab; a^2b^2),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a; a^2) = (a^\lambda; a^{2\lambda}).$$

7.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 13x_3 - 9x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}.$$

7.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (6, -2, -3, -4, 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (4, 3, 6, -1, 5),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (3, -1, 8, -1, -2), \quad \boldsymbol{a}_4 = (10, 1, 3, -5, 7), \quad \boldsymbol{a}_5 = (1, 4, -2, 0, 7).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

7.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (4, 2, -1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (5, 3, -2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (3, 2, -1), \quad \boldsymbol{x} = (4, 3, -2).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

7.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (7, -5, -6, 8), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-2, 2, 7, -7), \quad \boldsymbol{a}_3 = (6, -2, -1, 5),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (4, -7, -7, 1), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-8, -3, 1, -3), \quad \boldsymbol{b}_3 = (8, 9, 2, 3).$$

7.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 4, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 1).$$

7.7. Оператор $\mathcal{A}$ поворачивает векторы пространства вокруг оси Ox на угол $\frac{\pi}{4}$ (если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{i}$), а оператор $\mathcal{B}$ проецирует векторы пространства на плоскость yOz. Найти матрицы операторов $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

7.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (-3x_3 - 5x_2, -2x_3 + 5x_1, 2x_2 + 3x_1),$$

$$\mathcal{B}\boldsymbol{x} = (4x_1 - 6x_2 + 10x_3, -6x_1 + 9x_2 - 15x_3, 10x_1 - 15x_2 + 25x_3).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{AB}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (4,2,-1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (5,3,-2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (3,2,-1).$$

7.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

7.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (3,1,1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1,1,0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (3,0,1).$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

7.14. Собственные векторы самосопряженного линейного оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$, отвечающие собственному значению 6, образуют плоскость $x + y = 0$. Ядро оператора $\mathcal{A}$ нетривиально. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

7.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

7.16. Линейный оператор $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = \sqrt{2}$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите собственные векторы и собственные значения этого оператора, матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

7.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 4-2i & -1+4i \\ 2-i & -1+2i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

7.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 2\lambda x_2 x_4$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

7.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 8

8.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2; 6)$, где a_1 целое число и a_2 – действительные, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 b_1; a_2 b_2),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2) = (|a_1|^\lambda; |a_2|^\lambda);$$

2) множество L состоит из всевозможных квадратных матриц, размерности 2x2 то есть $x = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4, \end{pmatrix}$ где a_1, a_2, a_3, и a_4–действительные числа, если операции сложения элементов и умножения элемента на действительное число заданы как операции над матрицами.

8.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 13x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}.$$

8.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (6, 5, 7, -6, -9), \quad \boldsymbol{a}_2 = (2, 5, -8, 8, -4),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (6, 5, -1, 5, -1), \quad \boldsymbol{a}_4 = (-14, -5, -13, 1, -5).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

8.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, -1, -1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, 1, -1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{x} = (2, 3, 1).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

8.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 4), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, -3, -5, -1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 5, 7, 9),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (3, -1, -3, -7), \quad \boldsymbol{b}_2 = (9, 2, 6, -2), \quad \boldsymbol{b}_3 = (-6, -3, -9, 9).$$

8.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, 0, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0, 0).$$

8.7. Оператор $\mathcal{A}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y = \sqrt{3}x$, а оператор $\mathcal{B}$ проецирует векторы плоскости на прямую $y = 2x$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

8.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (8x_3 - 2x_2, 4x_3 + 2x_1, -4x_2 - 8x_1), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_2, x_1 + x_3, x_1).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;

2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{B} + \mathcal{AB}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;

3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, -1, -1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, 1, -1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1, 1, 1).$$

8.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

8.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе :

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0).$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

8.14. Вектор $(1,0,1)$ лежит в ряде линейного оператора $\mathcal{A}$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$ а вектор $(1,1,0)$ под действие $\mathcal{A}$ удваивается. Собственные векторы оператора $\mathcal{A}$ отвечающие собственному значению (-1) образуют подпространство $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

8.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

8.16. Линейный оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов задан матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = \sqrt{2}$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите собственные векторы и собственные значения этого оператора, матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

8.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1+i & 2+i \\ 3+i & 1-i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

8.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1 x_3 + 2x_2 x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

8.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1 x_2 - x_1 x_3 + \sqrt{3}x_2 x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 9

9.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $\boldsymbol{x} = (4; a_2; a_3)$, где a_2 и a_3 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (4; a_2; a_3) \oplus (4; b_2; b_3) = (4; a_2 + b_2; a_3 + b_3),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (4; a_2; a_3) = (4; \lambda a_2; \lambda a_3);$$

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a; a^2)$, где a – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a; a^2) \oplus (b; b^2) = (ab, a^2 b^2),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a; a^2) = (a^\lambda; a^{2\lambda}).$$

9.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 7x_4 + 5x_5 = 0 \\ -3x_1 + 10x_2 + 24x_3 - 17x_4 - 10x_5 = 0 \end{cases}.$$

9.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, -8, 1, 7, -4), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 2, -3, -8, -4),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (1, -4, 1, -6, 4), \quad \boldsymbol{a}_4 = (-1, 10, -5, 4, 4).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

9.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, -1, 2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, 2, 4), \quad \boldsymbol{f}_3 = (-3, 1, -1), \quad \boldsymbol{x} = (2, 4, 9).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

9.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (2, -1, 3, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (6, -4, 0, 2), \quad \boldsymbol{a}_3 = (11, -6, 12, 5),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (11, 4, 14, -7), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-17, -3, -21, 7), \quad \boldsymbol{b}_3 = (-4, -11, -7, 14).$$

9.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-1, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 0, -1).$$

9.7. Оператор $\mathcal{A}$ поворачивает векторы пространства вокруг оси Оу, на угол $\frac{\pi}{3}$ (если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{j}$), а оператор $\mathcal{B}$ растягивает все векторы в 5 раз. Найти матрицы операторов $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

9.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (7x_2 + 2x_3, -7x_1 + 5x_3, -2x_1 - 5x_2), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_1 - x_3, -x_2, x_3).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{A}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, -1, 2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, 2, 4), \quad \boldsymbol{f}_3 = (-3, 1, -1).$$

9.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

9.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

9.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (4, 1, 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2, 0, 1).$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

9.14. Собственные векторы линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$ отвечающей собственному значению (-2), образуют подпространство $\{(a, a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$. Плоскость $x + 2y - z = 0$ является ядром оператора $\mathcal{A}$. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

9.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

9.16. Линейный оператор $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов задан матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{5\pi}{6}$. Найдите собственные векторы и собственные значения этого оператора, матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

9.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 1+i \\ 3+2i & 1-2i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

9.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 6x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + \lambda x_4^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2\lambda x_2x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

9.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 10

10.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1 a_2)$, где $a_1 a_2$ – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 a_2; \frac{b_1}{b_2}),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2) = (|a_1|^\lambda; |a_2|^\lambda)$$

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a; a^3)$, где a – действительное положительное числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a; a^3) \oplus (b; b^3) = (ab; (ab)^3),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a; a^3) = (a^\lambda; a^{3\lambda}).$$

10.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 - x_3 + x_4 - 13x_5 = 0 \end{cases}.$$

10.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, 6, 7, -7, -7), \quad \boldsymbol{a}_2 = (7, 2, 7, -6, -8),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (5, -5, -7, -2, 8), \quad \boldsymbol{a}_4 = (-3, 12, 21, -2, -24).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

10.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (2, 1, 0), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, -1, 2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (2, 2, 1), \quad \boldsymbol{x} = (3, 7, -7).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

10.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, 5, 4, 0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (5, 0, 7, -5), \quad \boldsymbol{a}_3 = (7, 8, 5, 1),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (2, -6, 4, 6), \quad \boldsymbol{b}_2 = (6, 7, 9, 1), \quad \boldsymbol{b}_3 = (10, -2, 8, -2).$$

10.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 2, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 4, 0).$$

10.7. Оператор $\mathcal{A}$ проецирует векторы пространства на плоскости $z = 3y$, а оператор $\mathcal{B}$ поворачивает их вокруг оси Oy на угол $\frac{\pi}{2}$ (если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{j}$). Найти матрицы операторов $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

10.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (x_1 + 2x_2, x_3, -x_2,), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 4x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2 + x_3).$$

1) Доказать, что $\mathcal{B}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{B} + \mathcal{BA}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (2, 1, 0), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, -1, 2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (2, 2, 1).$$

10.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

10.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

10.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2, 0, 1).$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

10.14. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор арифметического пространства $\mathbb{R}^3$. Вектор $(0, 1, -1)$– собственный для $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению 4. Собственные векторы, отвечающей собственному значению 18, образуют подпространство $x - z = 0$. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли он самосопряженный? Ортогональным?

10.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

10.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{5\pi}{6}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

10.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1-i & 2+i \\ 1-2i & i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

10.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

10.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 x_2 - 2x_1 x_3 - 4x_2 x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 11

11.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $\boldsymbol{x}(a; a)$, где a – действительное положительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a; \sqrt{a}) \oplus (b; \sqrt{b}) = (ab; \sqrt{ab}),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a; \sqrt{a}) = (a^\lambda; (\sqrt{a})^\lambda a_2);$$

2) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $x = (7; a_2; a_3)$, где a_2 и a_3 –действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ задание следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (7; a_2; a_3) \oplus (7; b_2; b_3) = (7; a_2 + b_2; a_3 + b_3),$$

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (7; a_2; a_3) = (7; a_1^\lambda; a_2^\lambda),$$

11.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 10x_4 - 15x_5 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

11.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (6, -5, -7, -6, -1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (6, -7, 0, 0, -8),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (4, -3, 2, -8, 3), \quad \boldsymbol{a}_4 = (2, -4, -2, 8, -11).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

11.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (2, -1, 2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (-6, 7, 7), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1, 1, -1), \quad \boldsymbol{x} = (4, 0, 1).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

11.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, 13, -5, 11), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-2, -15, 7, -8), \quad \boldsymbol{a}_3 = (-1, 14, 6, -3),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (10, 8, 0, 24), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-2, -8, 0, -8), \quad \boldsymbol{b}_3 = (5, -2, 2, 11).$$

11.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 5x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 0, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 3, 4).$$

11.7. Оператор $\mathcal{A}$, действует на каждый вектор пространства $\boldsymbol{x}$ следующим образом; $A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}]]$, где $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{j}$. Оператор $\mathcal{B}$ поворачивает векторы пространства на угол $-\frac{\pi}{2}$ вокруг оси Oy (если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{j}$). Найти матрицы операторов $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

11.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (x_2 - 3x_3, -x_1 + 4x_3, 3x_1 - 4x_2), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (2x_1, -x_3, x_2).$$

1) Доказать, что $\mathcal{B}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{BA} + \mathcal{B}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (2, -1, 2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (-6, 7, 7), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1, 1, -1).$$

11.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

11.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

11.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

11.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (4, 1, 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2, 0, 1).$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

11.14. Пространство $\{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} | x - y + z = 0\}$ является ядром самосопряженного линейного оператора $\mathcal{A}$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$.Число 6 является собственным значением для оператора $\mathcal{A}$. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли он ортогональным?

11.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2i & 1 \\ -i & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

11.16. Линейный оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{3\pi}{4}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

11.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} -i & 2+i \\ 1-i & 1-i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – образуют ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

11.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 3x_4^2 + 2\lambda x_1 x_3 - 2x_2 x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

11.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1 x_2 - 8x_1 x_3 - 8x_2 x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 12

12.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2; 2)$, где a_1 и a_2 – действительное положительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2; 2) \oplus (b_1; b_2; 2) = (a_1 b_2; a_2 b_1; 2),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2; 2) = (\lambda a_1; \lambda a_2; 2);$$

2) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $x = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 –действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ задание следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2),$$

$$\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a_1; a_2) = (a_1; a_2).$$

12.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 10x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 2x_4 + 20x_5 = 0 \end{cases}.$$

12.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (8, 0, -5, 3, -6), \quad \boldsymbol{a}_2 = (5, 6, 3, -1, 1),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, -3, 4, -1), \quad \boldsymbol{a}_4 = (7, 6, 15, -14, 5).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

12.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (-7, 3, 7), \quad \boldsymbol{f}_2 = (-1, 2, 2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (0, 2, 1), \quad \boldsymbol{x} = (-6, -1, 4).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

12.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (-7, 3, -11, 5), \quad \boldsymbol{a}_2 = (9, -5, 9, -5), \quad \boldsymbol{a}_3 = (16, -4, 4, 2),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (10, 6, -3, 20), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-28, -6, -19, -6), \quad \boldsymbol{b}_3 = (33, 12, 11, 29).$$

12.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 4x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, -1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 1, 0).$$

12.7. Оператор $\mathcal{A}$ растягивает векторы пространства вдоль осей Ox и Oz в 3 раза, а оператор $\mathcal{B}$ поворачивает их вокруг оси Oy в угол $\frac{\pi}{4}$ (если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{j}$). Найти матрицы операторов $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

12.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (4x_2 - 3x_3, -4x_1 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_3, -x_2, x_1 + x_2).$$

1) Доказать, что $\mathcal{B}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{AB}+\mathcal{A}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (-7, 3, 7), \quad \boldsymbol{f}_2 = (-1, 2, 2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (0, 2, 1).$$

12.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

12.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

12.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 1).$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

12.14. Пространство $\{\alpha(1,2,2)+\beta(4,-1,1)|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ состоит из собственных векторов самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$ отвечающих собственному значению 18. Ядро оператора $\mathcal{A}$ нетривиально. Найдите матрицу этого оператора в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли он ортогональным?

12.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix}-i & 1\\ -1 & 2\end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\mathcal{A}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

12.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов задан матрицей $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -2\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1|=1$, $|\boldsymbol{e}_2|=2$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{5\pi}{6}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

12.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix}1+i & 2i\\ 1-i & 1+2i\end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,-2\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ – образуют ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

12.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=-2x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+2\lambda x_1x_3+2x_2x_4$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

12.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+5\sqrt{2}x_1x_3+\sqrt{2}x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 13

13.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $\boldsymbol{x} = (\frac{a}{2}; a)$, где a – действительное положительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (\frac{a}{2}; a) \oplus (\frac{b}{2}; b) = (\frac{1}{2}(a+b); a+b),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (\frac{a}{2}; a) = (\frac{\lambda}{2}a; \lambda a);$$

2) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $x = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 –действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ задание следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 a_2; b_1 b_2),$$

$$\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a_1; a_2) = (a_1^2; \sqrt[3]{a_2}).$$

13.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 15x_5 = 0 \end{cases} .$$

13.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, 5, 5, -4, -9), \quad \boldsymbol{a}_2 = (4, 0, 8, -5, -5),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (8, 2, -8, 9, 8), \quad \boldsymbol{a}_4 = (11, 5, 21, -14, -19).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

13.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (4, 1, -2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (5, 2, -3), \quad \boldsymbol{f}_3 = (2, 3, -4), \quad \boldsymbol{x} = (-2, 2, -2).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

13.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (2, -3, 4, -5), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-6, 5, -6, 6), \quad \boldsymbol{a}_3 = (-20, 14, -16, 14),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (24, 10, 0, 0), \quad \boldsymbol{b}_2 = (50, 21, -2, 4), \quad \boldsymbol{b}_3 = (5, 2, 1, -2).$$

13.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 2, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 0, -1, 1).$$

13.7. Оператор $\mathcal{A}$ проецирует все векторы плоскости xOy на ось Oy, а оператор $\mathcal{B}$ зеркально отражает все векторы плоскости xOy относительно прямой $y = -\sqrt{3}x$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$.

13.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (9x_1 - 12x_2 + 3x_3, -12x_1 + 16x_2 - 4x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (-x_2, x_3 - x_1, 2x_1).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{AB} - \mathcal{A}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (4, 1, -2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (5, 2, -3), \quad \boldsymbol{f}_3 = (2, 3, -4).$$

13.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

13.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе :

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

13.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

13.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, -2, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2, 1, 1).$$

13.14. Пространство, заданное системой уравнений $\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases}$ состоит из собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$, отвечающих собственному значению 3. На векторы, образующие равные острые углы со всеми базисными ортами естественного ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^3$, оператор $\mathcal{A}$ действует тождественно. Этот оператор инвертирует вектор $(1, 1, 0)$, т.е. переводит его в обратный. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли этот оператор самосопряженным? Ортогональным?

13.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

13.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = \sqrt{2}$ и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{3\pi}{4}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

13.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 3+4i & -2+5i \\ 1+i & -3i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 - e_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – образуют ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

13.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -5x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 2\lambda x_2 x_4$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

13.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1 x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2 x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 14

14.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 – действительные число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 a_2; b_1 b_2),$$

$$\lambda \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes (a_1; a_2) = (\lambda^{a_1}; \lambda^{a_2});$$

2) множество L состоит из всевозможных квадратных матриц, размерности 2x2, у которых на второстепенной диагонали стоя действительные числа, а остальные элементы матрицы равны нулю, т.е. $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$, если операции сложения элементов и умножение элемента на действительное число заданы как операции над матрицами.

14.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 6x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 - 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

14.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (6, 3, -7, 8, -6), \quad \boldsymbol{a}_2 = (4, 3, 6, 2, -2),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (4, 1, 1, -5, 6), \quad \boldsymbol{a}_4 = (18, 12, 11, 14, -12).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

14.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}: \ \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, 2, 3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, 1, -2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (3, 5, 3), \quad \boldsymbol{x} = (-8, -12, -2).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

14.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (6, -5, -2, -7), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-12, 12, 7, 17), \quad \boldsymbol{a}_3 = (-6, 5, 2, 7),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (-6, 3, 2, 7), \quad \boldsymbol{b}_2 = (6, -5, -5, -10), \quad \boldsymbol{b}_3 = (-6, 7, 8, 13).$$

14.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (2, 0, 3, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0, 0).$$

14.7. Оператор $\mathcal{A}$ проецирует все векторы пространства на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг оси Oz по часовой стрелке (если смотреть с концы вектора $\boldsymbol{k}$), а оператор $\mathcal{B}$ растягивает каждый вектор в 2 раза. Найти матрицы операторов $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

14.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_1), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_4x_3).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{AB} - \mathcal{A}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (1,2,3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1,1,-2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (3,5,3).$$

14.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}' = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

14.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -16 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

14.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

14.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (4,1,2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1,1,0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2,0,1).$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

14.14. Собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$, отвечающие собственному значению 2 образуют подпространство $\{(x,y,z)|x-y-z=0\}$. На подпространство $\left\{(x,y,z)|\begin{cases}2x+y-2z=0\\ x-3z-z=0\end{cases}\right\}$ оператор $\mathcal{A}$ действует тождественно. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли этот оператор самосопряженным? Ортогональным?

14.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\ i&2\end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\mathcal{A}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$.

14.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1|=1$, $|\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{2}$ и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{3\pi}{4}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

14.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix}2+i&2-5i\\ 1+i&-1-3i\end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+2e_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ – образуют ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

14.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=-x_1^2+x_2^2+2x_3^2+\lambda x_4^2+2\lambda x_1x_3+2x_2x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

14.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=-x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 15

15.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a; a^2)$, где a – действительное положительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом: $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a; a^2) \oplus (b; b^2) = (a+b; (a+b)^2)$, $\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a; a^2) = (\lambda a; (\lambda a)^2)$;
2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 –четные целые числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом: $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 a_2; b_1 b_2)$, $\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a_1; a_2) = (\lambda_1^a; \lambda_2^a)$.

15.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + 10x_4 - 14x_5 = 0 \end{cases} .$$

15.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 8, 3-4, 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 8, 7, -2, 5),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (3, -1, 7, -3, 6), \quad \boldsymbol{a}_4 = (-4, 18, 0, 2, -2).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

15.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}:\ \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, 2, -4), \quad \boldsymbol{f}_2 = (4, -1, -2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (5, 2, -3), \quad \boldsymbol{x} = (9, 5, -8).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

15.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (-16, 6, 12, 10), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-4, 7, 6, 17), \quad \boldsymbol{a}_3 = (12, 7, -3, 22),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (10, 0, -7, 1), \quad \boldsymbol{b}_2 = (6, 8, -1, 3), \quad \boldsymbol{b}_3 = (-8, 1, 5, 0).$$

15.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 0, 1).$$

15.7. Оператор $\mathcal{A}$ зеркально отражает векторы плоскости Oy относительно оси Oy, а оператор $\mathcal{B}$ проецирует их на прямую $y = -\frac{x}{2}$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A}+2\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

15.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (2x_3 + x_2, -x_3 - x_1, x_2 - 2x_1), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (2x_3, x_1, x_2, +x_3).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, 2, -4), \quad \boldsymbol{f}_2 = (4, -1, -2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (5, 2, -3).$$

15.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

15.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

15.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2,$$
$$\boldsymbol{a}_1 = (2, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 2).$$

15.14. Вектор (2,2,1) содержится в ядре линейного оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$. На инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство $\{(\alpha, 0, \alpha) | \alpha, \in \mathbb{R}\}$ оператор $\mathcal{A}$ действует тождественно, а инвариантное подпространство $\left\{ (x, y, z) \,\middle|\, \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\}$ оператор $\mathcal{A}$ инвертирует (то есть каждый вектор переводит в обратный). Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли этот оператор самосопряженным? Ортогональным?

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

15.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$.

15.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

15.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2+7i & -2-4i \\ 1+3i & -1-6i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

15.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -6x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + \lambda x_4^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2\lambda x_2x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

15.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 16

16.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a; 2)$, где a – действительное положительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a; 2a) \oplus (b; 2b) = (a+b; 2(a+b)), \lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a; 2a) = (\lambda a; 2\lambda a);$$

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 –действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 a_2; b_1 b_2), \lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a_1; a_2) = (a_1^3; a_2^3).$$

16.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 8x_4 + 8x_5 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 + 7x_3 - 13x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}.$$

16.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, -4, -5, 5, -3), \quad \boldsymbol{a}_2 = (4, -6, 5, -5, 5),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (7, 6, -5, 4, 3), \quad \boldsymbol{a}_4 = (-10, -18, 15, -13, -1).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

16.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, 5, 3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, 0, 3), \quad \boldsymbol{f}_3 = (0, 1, -1), \quad \boldsymbol{x} = (-14, -7, -13).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

16.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (-1, 4, 6, -3), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-8, 9, 6, 2), \quad \boldsymbol{a}_3 = (9, -7, 2, -7),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (-1, 3, 8, -4), \quad \boldsymbol{b}_2 = -2, 3, 1, 1), \quad \boldsymbol{b}_3 = (-1, 4, 13, -7).$$

16.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 2, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 1, 0).$$

16.7. Оператор $\mathcal{A}$ на каждый вектор пространства $\boldsymbol{x}$ действует следующим образом: $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]]$, где $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$, а оператор $\mathcal{B}$ поворачивает их вокруг оси Ох на угол $-\frac{\pi}{6}$(если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{i}$). Найти матрицы операторов $3\mathcal{A} - \mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

16.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (-3x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_3, -2x_1 - 4x_2), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_3, 2x_1, x_1 + x_3).$$

1) Доказать, что $\mathcal{B}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{BA}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (3, 5, 3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, 0, 3), \quad \boldsymbol{f}_3 = (0, 1, -1).$$

16.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

16.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

16.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

16.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к Жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

16.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -3,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (2, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2, -1, 1).$$

[1] *Примечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

16.14. Подпространство решений уравнения $x - z = 0$ является ядром линейного оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$. Вектор (1,1,0) совпадает со своим образом. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли этот оператор самосопряженным? Ортогональным?

16.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$.

16.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = \sqrt{2}$ и и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{3\pi}{4}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

16.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} -3i & 2+i \\ 1-2i & 1+i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_2$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

16.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -3x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

16.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 8x_2 x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 17

17.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a;{}^2)$, где a – действительное положительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a;a^2) \oplus (b;b^2) = (a+b;(a+b)^2), \lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a;a^2) = ((\lambda+a);(\lambda+a)^2);$$

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (0;a_2;a_3)$, где a_2 и a_3 –действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:
$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (0;a_2;a_3) \oplus (0;b_2;b_3) = (0;a_2+b_2;a_3+b_3)$,
$\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (0;a_2;a_3) = (0;\lambda a_2;\lambda a_3)$.

17.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 8x_3 + 13x_4 - 18x_5 = 0 \\ -3x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

17.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (6,-2,-3,-4,2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (4,3,6,-1,5),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (3,-1,8,-1,-2), \quad \boldsymbol{a}_4 = (1,4,-2,0,7).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

17.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (4,-5,-3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1,-1,-1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (-1,1,2), \quad \boldsymbol{x} = (2,-1,-1).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

17.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (5,3,1,-1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-8-7,1,4), \quad \boldsymbol{a}_3 = (-11,-11,3,7),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (5,-1,0,14), \quad \boldsymbol{b}_2 = 1,0,-1,4), \quad \boldsymbol{b}_3 = (3,-1,2,6).$$

17.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (0,1,0,1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1,1,0,0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1,1,1,1).$$

17.7. Оператор $\mathcal{A}$ каждый вектор пространства проецирует на прямую $x = \frac{y}{\sqrt{2}} = z$, а оператор $\mathcal{B}$ действует на них следующим образом: $\mathcal{B}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{x}]$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A} + 4\mathcal{B}$,$\mathcal{A}\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

17.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам
$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (-x_2 - 7x_3, x_1 + 4x_3, 7x_1 - 4x_2)$,
$\mathcal{B}\boldsymbol{x} = (16x_1 + 28x_2 - 4x_3, 28x_1 + 49x_2 - 7x_3, -4x_1 - 7x_2 + x_3)$.

1) Доказать, что $\mathcal{B}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{A} + \mathcal{A}\mathcal{B}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (4, -5, -3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, -1, -1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (-1, 1, 2).$$

17.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

17.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -25 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

17.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

17.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к Жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

17.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2, 0, 1).$$

[1] *Замечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

17.14. Вектор (1,1,2) под действием линейного оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$ удлиняется в 6 раз. Подпространство $\{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} | x + y + 2z = 0\}$ состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению 42. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли этот оператор самосопряженным? Ортогональным?

17.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^{\star}\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

17.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^{\star}$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

17.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} -2-i & 2-i \\ 1+3i & 1+2i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{4\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

17.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (4-\lambda)x_1^2 + (4-\lambda)x_2^2 - (2+\lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

17.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 18

18.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a; \frac{a}{3})$, где a – действительное положительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a; \frac{a}{3}) \oplus (b; \frac{b}{3}) = (a + b; \frac{1}{3}(a + b)), \lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a; \frac{a}{3}) = (\lambda a; \frac{\lambda}{3} a);$$

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 –действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:
$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 + b_1; a_2 b_2)$, $\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a_1; a_2) = (\lambda a_1; a_2^{\lambda})$.

18.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 12x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}.$$

18.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 6, -7, 4, -9), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, -7, 9, -7, 2), \quad \boldsymbol{a}_3 = (5, -4, 8, 1, 1),$$

$$\boldsymbol{a}_4 = (2, -1, 2, -3, -7), \quad \boldsymbol{a}_5 = (-4, -3, 1, -8, 1)$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

18.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, 2, 3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, 3, 1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1, 1 - 3), \quad \boldsymbol{x} = (2, 4, 1).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

18.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, 1, -3, -3), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-5, 0, 7, 7), \quad \boldsymbol{a}_3 = (-7, 1, 11, 11),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (-5, 11, 7, 1), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-2, 3, 2, 0), \quad \boldsymbol{b}_3 = (-1, 5, 3, 1).$$

18.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 4x_3 y_3 - x_1 y_3 - x_3 y_1 + x_4 y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 1, 0).$$

18.7. Оператор $\mathcal{A}$ проецирует векторы плоскости xOy на прямую $x = 2y$, а оператор $\mathcal{B}$ действует следующим образом: $\mathcal{B}\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A} + 3\mathcal{B}$,$\mathcal{A}\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

18.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (x_3 - x_2, -2x_3 + x_1, 2x_1 - x_1), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{B}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, 2, 3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, 3, 1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1, 1, -3).$$

18.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

18.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

18.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

18.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 1).$$

[1] *Замечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

18.14. Вектор (1,1,2) под действием линейного оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$ удлиняется в 6 раз. Подпространство $\{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}|x+y+2z=0\}$ состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению 42. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли этот оператор самосопряженным? Ортогональным?

18.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix} i & 1\\ -1 & 2\end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\mathcal{A}^\star\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

18.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A=\begin{pmatrix} -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1|=1$, $|\boldsymbol{e}_2|=2$ и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

18.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix} 1-i & 2+i\\ -2i & 1-3i\end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2$, причём $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

18.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=-x_1^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2-\lambda x_3^2+2x_2x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

18.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2-8x_1x_3-8x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 19

19.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных троек чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; -2; a_3)$, где a_1 и a_3 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:
$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; -2; a_3) \oplus (b_1; -2; b_3) = (a_1 b_1; -2; a_3 b_3)$,
$\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a_1; -2; a_3) = (\lambda a_1; -2; \lambda a_3)$;
2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a^2; a)$, где a – действительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:
$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a^2; a) \oplus (b^2; b) = ((ab)^2; ab)$, $\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a^2; a) = ((a^\lambda)^2; a^\lambda)$;

19.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 10x_4 - 11x_5 = 0 \end{cases}.$$

19.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (7, 6, -7, -4, -4), \quad \boldsymbol{a}_2 = (2, 1, -7, 4, -8),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (7, -2, -8, -5, 8), \quad \boldsymbol{a}_4 = (-17, 8, 10, 23, -40).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

19.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}: \ \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, -1, -1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, 1, -1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{x} = (2, 3, 1).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

19.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (2, -3, 9, 4), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-3, 7, -1, -3), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2, -4, 7, 4),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (2, -4, 1, 2), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-3, 7, -4, -5), \quad \boldsymbol{b}_3 = (2, 1, 6, 2).$$

19.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1, 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 3).$$

19.7. Оператор $\mathcal{A}$ проецирует векторы плоскости xOy на ось Ox, а оператор $\mathcal{B}$ зеркально отражает их относительно прямой $y = -2x$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A} - \mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

19.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (8x_3 - 2x_2, 4x_3 + 2x_1, -4x_2 - 8x_1), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_2, x_1 + x_3, x_1).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{B} + \mathcal{AB}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, -1, -1), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, 1, -1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (1, 1, 1).$$

19.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

19.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -4 & -14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

19.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

19.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -8 & 16 & 3 \end{pmatrix}.$$

19.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, -1).$$

[1] *Замечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

19.14. Подпространство $\{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} | x + y + 2z = 0\}$ состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$, отвечающих собственному значению 42. Ядро оператора $\mathcal{A}$ нетривиально. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли этот оператор ортогональным?

19.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -2 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^{\star}\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

19.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{\pi}{6}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^{\star}$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

19.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 3+i & -2-i \\ 1+2i & 3-3i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

19.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

19.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 20

20.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x}(a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 – действительные положительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:
$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 a_2; b_1 b_2)$, $\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a_1; a_2) = (a_1; a_2)$;

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (\frac{a}{2}; \frac{a}{3})$, где a – действительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:
$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (\frac{a}{2}; \frac{a}{3}) \oplus (\frac{b}{2}; \frac{b}{3}) = (\frac{1}{2}(a+b); \frac{1}{3}(a+b))$, $\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (\frac{a}{2}; \frac{a}{3}) = (\frac{\lambda}{2}a; \frac{\lambda}{3}a)$

20.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 10x_4 - 3x_5 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 + 11x_5 = 0 \end{cases}.$$

20.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (6, -2, -3, -4, 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (4, 3, 6, -1, 5), \quad \boldsymbol{a}_3 = (3, -1, 8, -1, -2),$$

$$\boldsymbol{a}_4 = (10, 1, 3, -5, 7), \quad \boldsymbol{a}_5 = (1, 4, -2, 0, 7).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

20.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (2, 1, 0), \quad \boldsymbol{f}_2 = (2, -1, 2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (2, 2, 1), \quad \boldsymbol{x} = (3, 7, -7).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

20.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (4, -3, 6, -1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (9, -9, 11, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (8, 3, 2, -7),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (4, -3, 5, 0), \quad \boldsymbol{b}_2 = (7, 1, 0, -5), \quad \boldsymbol{b}_3 = (5, -5, 8, 1).$$

20.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (-1, 1, 0, 0).$$

20.7. Оператор $\mathcal{A}$ поворачивает все векторы пространства на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг оси Oz (если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{k}$), а оператор $\mathcal{B}$ растягивает каждый вектор в 2 раза.Найти матрицы операторов $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.

20.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x}=(x_1+2x_2,x_3,-x_2),\quad \mathcal{B}\boldsymbol{x}=(x_1+2x_2-x_3,2x_1+4x_2-2x_3,-x_1-2x_2+x_3).$$

1) Доказать, что $\mathcal{B}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{B}+\mathcal{BA}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1=(2,1,0),\quad \boldsymbol{f}_2=(2,-1,2),\quad \boldsymbol{f}_3=(2,2,1).$$

20.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1'=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_2'=3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_3'=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3\end{cases},\qquad A=\begin{pmatrix}-2&0&2\\1&0&3\\-1&2&1\end{pmatrix}.$$

20.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix}2&7\\-3&5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&1\\-4&6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-5&0&2\\1&-5&2\\0&0&-5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&2\\2&-1\end{pmatrix}.$$

20.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&5\\0&3&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\0&0&7\end{pmatrix}.$$

20.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix}-6&0&0\\-3&-6&1\\0&0&-6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}7&0&0\\2&3&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&9\\-1&-8\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&4&0\\0&2&0\\-2&4&1\end{pmatrix}.$$

20.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=2,$$

$$\boldsymbol{a}_1=(2,0,1),\quad \boldsymbol{a}_2=(1,0,1),\quad \boldsymbol{a}_3=(0,1,2).$$

[1] *Замечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

20.14. На подпространство $\left\{ x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \middle| \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \right\}$ линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$ действует тождественно, а подпространство $\{(\alpha, -\alpha, 2\alpha) | \alpha, \in \mathbb{R}\}$ этот оператор инвертирует (т.е каждый вектор переводит в обратный). Вектор (-1,1,-1) является собственным для $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению (-2). Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли этот оператор ортогональным?

20.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ i & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

20.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

20.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2+3i & -2+2i \\ 1+2i & 1-3i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

20.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -9x_1^2 + 6\lambda x_1 x_2 - x_2^2$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

20.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 21

21.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x}(a_1; a_2; 6)$, где a_1 и a_2 – действительные положительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:
$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2; 6) \oplus (b_1; b_2; 6) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; 6)$, $\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a_1; a_2; 6) = (\lambda a_1; \lambda a_2; 6)$;

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:
$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (|a_1|_1^b; |a_2|_2^b)$, $\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a_1; a_2) = (\lambda a_1; \lambda a_2)$.

21.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 11x_3 - 6x_4 - x_5 = 0 \\ -2x + x_2 + 4x_3 - 15x_4 + 16x_5 = 0 \end{cases}.$$

21.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (6, 5, 7, -6, -9), \quad \boldsymbol{a}_2 = (2, 5, -8, 8, -4),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (6, 5, -1, 5, -1), \quad \boldsymbol{a}_4 = (-14, -5, -13, 1, -5)$$

. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

21.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (4, 1, -2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (5, 2, -3), \quad \boldsymbol{f}_3 = (2, 3, -4), \quad \boldsymbol{x} = (-2, 2, -2).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

21.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (-9, -6, 2, 5), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-5, -2, -16, 12), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, -2, -18, 7),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (2, 0, 6, 7), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-1, 2, 8, -20), \quad \boldsymbol{b}_3 = (6, 4, 18, -1).$$

21.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 5x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (0, -1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 0, 1).$$

21.7. Оператор $\mathcal{A}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно оси Oy, а оператор $\mathcal{B}$ проецирует их на прямую $y = 2\sqrt{3}x$.Найти матрицы операторов $2\mathcal{A}+3\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

21.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (9x_1-12x_2+3x_3, -12x_1+16x_2-4x_3, 3x_1-4x_2+x_3), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (-x_2, x_3-x_1, 2x_1).$$

1) Доказать, что $\mathcal{B}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{BA} - \mathcal{A}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (4, 1, -2), \quad \boldsymbol{f}_2 = (5, 2, -3), \quad \boldsymbol{f}_3 = (2, 3, -4).$$

21.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

21.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

21.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

21.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

21.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (2, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 2).$$

[1] *Замечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

21.14. Векторы пространства $\mathbb{R}^3$, инвертируемые линейным оператором $\mathcal{A}$, образуют подпространство $\{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k} | 3x + y - z = 0\}$. Собственный вектор (1,-1,1) оператора $\mathcal{A}$ отвечает собственному значению (-2). Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли этот оператор ортогональным?

21.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$.

21.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} (-\sqrt{3} & -4 \\ 1 & \sqrt{3}) \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{\pi}{6}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

21.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2+5i & -2-6i \\ 1+4i & 6i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

21.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

21.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 22

22.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a_1; a_2)$, где a_1 и a_2 – действительные положительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом: $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, $\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a_1; a_2) = (|a_1|^{\lambda}; |a_2|^{\lambda})$;

2) множество L состоит из всевозможных квадратных симметрических матриц размерности $2*2$, т.е. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_1 & \alpha \\ \alpha & a_2 \end{pmatrix}$, где a_1 и a_2 и α – действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число заданы как операции над матрицами.

22.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 6x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}.$$

22.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, -8, 1, 7, -4), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 2, -3, -8, -4), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, -4, 1, -6, -4),$$

$$\boldsymbol{a}_4 = (7, -4, -5, -9, -12) \quad \boldsymbol{a}_5 = (-1, 10, -5, 4, 4).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

22.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}: \ \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, 2, 3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, 1, -2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (3, 5, 3), \quad \boldsymbol{x} = (-8, -12, -2).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

22.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (-1, 0, 4, 3), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-2, -3, 2, -6), \quad \boldsymbol{a}_3 = (-1, -3, 1, -5),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (-1, 5, 2, -2), \quad \boldsymbol{b}_2 = (-4, -8, 3, 5), \quad \boldsymbol{b}_3 = (-2, -4, 3, 3).$$

22.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (-1, 0, 2, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 1, 0).$$

22.7. Оператор $\mathcal{A}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y = 3x$, а оператор $\mathcal{B}$ поворачивает их вокруг начала координат на угол $-\frac{\pi}{4}$.Найти матрицы операторов $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$.

22.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (x_1-x_2+2x_3, x_1+x_3, x_2-x_1), \quad \mathcal{B}\boldsymbol{x} = (x_1+x_2+2x_3, x_1+x_2+2x_3, 2x_1+2x_2+4x_3).$$

1) Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{BA}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, 2, 3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, 1, -2), \quad \boldsymbol{f}_3 = (3, 5, 3).$$

22.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

22.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

22.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

22.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

22.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 - 1,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, -2, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2, 1, 1).$$

[1] *Замечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

22.14. Ядро линейного оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$ совпадает с пространством решений системы уравнений $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2y+2y-z=0 \end{cases}$. Под действием оператора $\mathcal{A}$ вектор (1,1,0) удваивается. Собственный вектор (1,0,1) оператора $\mathcal{A}$ отвечает собственному значению (-2). Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли этот оператор ортогональным?

22.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 3i & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

22.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} -1 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{\pi}{6}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

22.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} -2i & 3+i \\ -1+2i & 1+i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, 3\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ образуют – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

22.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (4-\lambda)x_1^2 + (4-\lambda)x_2^2 - (2+\lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

22.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.

Вариант 23

23.1. Образует ли множество L линейное пространство, если:

1) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (a; ^2)$, где a – действительное положительное число, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (a; a^2) \oplus (b; b^2) = (a+b; (a+b)^2), \lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (a; a^2) = ((\lambda + a); (\lambda + a)^2);$$

2) множество L состоит из упорядоченных пар чисел вида $\boldsymbol{x} = (0; a_2; a_3)$, где a_2 и a_3 –действительные числа, а сложение элементов и умножение элемента на действительное число λ заданы следующим образом:
$\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} = (0; a_2; a_3) \oplus (0; b_2; b_3) = (0; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$,
$\lambda \oplus \boldsymbol{x} = \lambda \oplus (0; a_2; a_3) = (0; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

23.2. Найти размерность и какой-либо базис арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 8x_3 + 13x_4 - 18x_5 = 0 \\ -3x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} .$$

23.3. Дана система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (6, -2, -3, -4, 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (4, 3, 6, -1, 5),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (3, -1, 8, -1, -2), \quad \boldsymbol{a}_4 = (1, 4, -2, 0, 7).$$

Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

23.4. В базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы

$$\boldsymbol{f}_1 = (4, -5, -3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, -1, -1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (-1, 1, 2), \quad \boldsymbol{x} = (2, -1, -1).$$

1) Доказать, что совокупность векторов $\{\boldsymbol{f}_i\}$ образуют базис;
2) Записать матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{f}_i\}$;
3) Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$;

23.5. Найти базис суммы и базис пересечения линейных подпространств, заданных в виде линейных оболочек $M_1 = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $M_2 = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ двух систем векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, 3, 1, -1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-8 - 7, 1, 4), \quad \boldsymbol{a}_3 = (-11, -11, 3, 7),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (5, -1, 0, 14), \quad \boldsymbol{b}_2 = 1, 0, -1, 4), \quad \boldsymbol{b}_3 = (3, -1, 2, 6).$$

23.6. На арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 0, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 1, 1).$$

23.7. Оператор $\mathcal{A}$ каждый вектор пространства проецирует на прямую $x = \frac{y}{\sqrt{2}} = z$, а оператор $\mathcal{B}$ действует на них следующим образом: $\mathcal{B}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{x}]$. Найти матрицы операторов $\mathcal{A} + 4\mathcal{B}$,$\mathcal{A}\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

23.8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в пространстве $\mathbb{R}^3$ по законам
$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = (-x_2 - 7x_3, x_1 + 4x_3, 7x_1 - 4x_2)$,
$\mathcal{B}\boldsymbol{x} = (16x_1 + 28x_2 - 4x_3, 28x_1 + 49x_2 - 7x_3, -4x_1 - 7x_2 + x_3)$.

1) Доказать, что $\mathcal{B}$ – линейный оператор;
2) Указать закон, по которому оператор $\mathcal{A} + \mathcal{A}\mathcal{B}$ действует на вектор $\boldsymbol{x}$;
3) Найти матрицу оператора $\mathcal{B}$ в базисе $\{\boldsymbol{f}_i\}$:

$$\boldsymbol{f}_1 = (4, -5, -3), \quad \boldsymbol{f}_2 = (1, -1, -1), \quad \boldsymbol{f}_3 = (-1, 1, 2).$$

23.9. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, если известна его матрица A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

23.10. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами [1]:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -25 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

23.11. Определить операторы простой структуры среди линейных операторов, заданных в некотором базисе:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

23.12. Привести матрицы линейных операторов к каноническому виду (к диагональному виду или к Жордановой нормальной форме) и найти тот базис, в котором они имеют этот вид:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

23.13. Даны собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейного оператора в некотором базисе. Найти матрицу этого оператора в этом базисе, если

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 4,$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (3, 0, 1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (2, 0, 1).$$

[1] *Замечание.* В задачах 10-12 линейные операторы заданы в линейном пространстве над полем комплексных чисел.

23.14. Вектор (1,1,2) под действием линейного оператора $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^3$ удлиняется в 6 раз. Подпространство $\{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} | x + y + 2z = 0\}$ состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению 42. Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$. Будет ли этот оператор самосопряженным? Ортогональным?

23.15. В ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^\star \boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

23.16. Матрица оператора $\mathcal{A}$ двумерного пространства геометрических векторов равна $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, где $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 2$ и угол между $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star$ в том же базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ самосопряженным?

23.17. Линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} -2-i & 2-i \\ 1+3i & 1+2i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{4\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2$, причём $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ – ортонормированный базис. Будет ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым?

23.18. При каких значениях параметра λ квадратичная форма

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (4 - \lambda)x_1^2 + (4 - \lambda)x_2^2 - (2 + \lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$$

является знакопостоянной (положительно определенной или отрицательно определенной)?

23.19. Привести квадратичную форму

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием. Выписать матрицу перехода к каноническому базису.