

Сингулярное разложение матрицы

Существование для симметричной (эрмитовой) матрицы канонического разложения с ортогональной (унитарной) трансформирующей матрицей позволяет получить специальное разложение для произвольной $(m \times n)$ -матрицы. С этой целью прежде всего заметим, что матрицы A^*A и AA^* являются симметричными (эрмитовыми) неотрицательными матрицами, поскольку выполняются соотношения

$$(A^*A)^* = A^*A, \quad (AA^*)^* = AA^*$$

и

$$x^* \cdot A^*A \cdot x = (Ax)^*Ax = |Ax|^2 \geq 0,$$

$$x^* \cdot AA^* \cdot x = (A^*x)^* \cdot A^*x = |A^*x|^2 \geq 0$$

при любом векторе x .

Напомним, что симметричная (эрмитова) матрица B называется **неотрицательной**, если она удовлетворяет условию $x^*Bx \geq 0$ при любом векторе x ; звездочка справа над матрицей означает последовательное выполнение транспонирования матрицы и замены в ней всех элементов на комплексносопряженные. Для действительной матрицы $A^* = A^T$.

*Характеристические числа матриц A^*A и AA^* действительны и неотрицательны.*

На самом деле, если λ и μ — характеристические числа соответственно матриц A^*A и AA^* , а u и v — собственные векторы этих матриц по λ и μ , то в силу соотношений $x^*A^*Ax \geq 0$, $x^*AA^*x \geq 0$, выполняемых при любом векторе x , в частности, при векторах u и v , получаем

$$u^*A^*Au = u^*\lambda u = \lambda u^*u = \lambda(u, u) = \lambda|u|^2 \geq 0,$$

$$v^*AA^*v = v^*\mu v = \mu v^*v = \mu(v, v) = \mu|v|^2 \geq 0.$$

Поскольку $|u|^2 > 0$, $|v|^2 > 0$, то из полученных соотношений следует, что λ и μ являются действительными неотрицательными числами.

Обозначим характеристические числа матрицы A^*A через $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ и будем считать, что $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2$, $\sigma_i \neq 0$ при $i = 1, 2, \dots, r$.

Оператор с симметричной (эрмитовой) матрицей A^*A в евклидовом (унитарном) пространстве X_n имеет ортонормированную систему собственных векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$, принадлежащих собственным значениям $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$.

Векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ удовлетворяют соотношениям

$$A^*Av_i = \sigma_i^2v_i, \quad (v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

Система векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ переводится оператором с матрицей A в некоторую ортогональную систему векторов $Av_1, Av_2, \dots, Av_n$, так как

$$(Av_i, Av_j) = (A^*Av_i, v_j) = \sigma_i^2(v_i, v_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Кроме того, модуль вектора Av_i равен σ_i , так как

$$|Av_i| = \sqrt{(Av_i, Av_i)} = \sqrt{(A^*Av_i, v_i)} = \sqrt{\sigma_i^2(v_i, v_i)} = \sigma_i.$$

Поэтому вектор Av_i отличен от нулевого вектора тогда и только тогда, когда $\sigma_i \neq 0$, т. е. при $i = 1, 2, \dots, r$. Ненулевой вектор Av_i является собственным вектором оператора AA^* по собственному значению σ_i^2 , так как

$$AA^*(Av_i) = A(A^*Av_i) = A(\sigma_i^2v_i) = \sigma_i^2Av_i.$$

Верно и обратное. Следовательно, ненулевые характеристические числа матриц A^*A и AA^* совпадают с учетом их кратностей и их число равно r , а кратности нулевого характеристического числа этих матриц равны соответственно $n - r$ и $m - r$. Общих характеристических чисел у матриц A^*A и AA^* будет $s = \min\{m, n\}$.

Арифметические значения $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ квадратных корней из общих характеристических чисел матриц A^*A и AA^* называют **сингулярными** (или **главными**) **числами матрицы A** .

В пространстве X_n примем за базис ортонормированную систему $v_1, v_2, \dots, v_n$ собственных векторов оператора с матрицей A^*A и построим ортонормированную систему векторов

$$u_1 = \frac{Av_1}{|Av_1|} = \frac{Av_1}{\sigma_1}, \dots, u_r = \frac{Av_r}{|Av_r|} = \frac{Av_r}{\sigma_r}.$$

Дополним эту систему до ортонормированного базиса в пространстве Y_m любыми векторами $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m$. По построению векторы $u_1, u_2, \dots, u_m$ удовлетворяют соотношениям

$$Av_i = \begin{cases} \sigma_i u_i & \text{при } i \leq r, \\ 0 & \text{при } i > r. \end{cases} \quad (2)$$

Умножая эти равенства слева на A^* и учитывая, что $A^*Av_i = \sigma_i^2 v_i$, получим соотношения

$$A^*u_i = \begin{cases} \sigma_i v_i & \text{при } i \leq r, \\ 0 & \text{при } i > r. \end{cases} \quad (3)$$

Ортонормированные базисы $v_1, v_2, \dots, v_n$ и $u_1, u_2, \dots, u_m$ пространств X_n и Y_m , связанные соотношениями (2) и (3), называют **сингулярными базисами**. При этом векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ называют **правыми сингулярными векторами матрицы A** , а векторы $u_1, u_2, \dots, u_m$ — ее **левыми сингулярными векторами**.

Оператор, имеющий в паре исходных базисов пространств X_n и Y_m матрицу A , в сингулярных базисах $v_1, v_2, \dots, v_n$ и $u_1, u_2, \dots, u_m$ этих пространств в силу определения матрицы оператора и соотношений (2) имеет $(m \times n)$ -матрицу

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Из формулы, устанавливающей связь между матрицами одного и того же оператора в разных базисах (см. 1.12), получаем

$$A = U \Sigma V^*, \quad (5)$$

где V — ортогональная (унитарная) матрица порядка n , столбцами которой служат столбцы координат векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ в исходном базисе пространства X_n ; U — ортогональная (унитарная) матрица порядка m , столбцами которой являются столбцы координат векторов $u_1, u_2, \dots, u_m$ в исходном базисе пространства Y_m .

Разложение (5) называют **сингулярным** разложением матрицы A . Любая $(m \times n)$ -матрица обладает многими различными сингулярными разложениями. Это следует из некоторого произвола при построении векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ и $u_1, u_2, \dots, u_m$.

Сингулярному разложению (5) можно придать вид

$$A = U_1 \Sigma_r V_1^*, \quad (6)$$

где

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{pmatrix}$$

— квадратная матрица порядка r , получающаяся из $(m \times n)$ -матрицы Σ вычеркиванием $n-r$ нулевых столбцов справа и $m-r$ нулевых строк снизу; U_1 — $(m \times r)$ -матрица, состоящая из первых r столбцов матрицы U ; V_1^* — $(r \times n)$ -матрица, состоящая из первых r строк матрицы V^* .

Разложение (6) называют **второй формой сингулярного разложения** матрицы A . В него входят матрицы меньших размеров, и, кроме того, в нем матрица Σ_r — квадратная невырожденная. Все это может оказаться существенным, особенно при компьютерных вычислениях.

При $m < n$ сингулярному разложению (5) иногда бывает удобно придать вид

$$A = U \Sigma_m V_1^*, \quad (7)$$

где Σ_m — квадратная матрица m -го порядка, содержащаяся в первых m строках и столбцах матрицы Σ ; матрица U — та же, что и в разложении (5), а V_1^* — $(m \times n)$ -матрица, состоящая из первых m строк матрицы V^* .

При $m > n$ сингулярному разложению (5) иногда также бывает удобно придать вид

$$A = U_1 \Sigma_n V^*, \quad (8)$$

где Σ_n — квадратная матрица, содержащаяся в первых n строках и столбцах матрицы Σ ; матрица U_1 — $(m \times n)$ -матрица, состоящая из первых n столбцов матрицы U , а матрица V^* — та же, что и в разложении (5).

В силу изложенного при конструировании сингулярного разложения произвольной $(m \times n)$ -матрицы A ранга r целесообразно придерживаться следующего порядка действий:

1. составить матрицу A^*A ;
2. найти характеристические числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A^*A .

Не нарушая общности, их можно занумеровать так, чтобы выполнялись условия $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, $\lambda_i \neq 0$ при $i = 1, \dots, r$;

3. подсчитать ненулевые сингулярные числа $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \dots, r$, матрицы A ;
4. составить $(m \times n)$ -матрицу Σ по формуле (4);
5. построить ортонормированную систему собственных векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ оператора с матрицей A^*A , принадлежащих соответственно собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;
6. составить матрицу $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ из столбцов координат векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$. Матрица V является матрицей перехода от исходного базиса евклидова (унитарного) пространства X_n к базису $v_1, v_2, \dots, v_n$;

7. построить ортонормированную систему векторов

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1}, u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2}, \dots, u_r = \frac{Av_r}{\sigma_r};$$

8. дополнить систему векторов $u_1, u_2, \dots, u_r$ любыми векторами $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m$ до ортонормированного базиса евклидова (унитарного) пространства Y_m ;
9. составить матрицу $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ из столбцов координат векторов $u_1, u_2, \dots, u_m$. Матрица U является матрицей перехода от исходного базиса евклидова (унитарного) пространства Y_m к базису $u_1, u_2, \dots, u_m$;
10. записать сингулярное разложение $A = U\Sigma V^*$ матрицы A .

Пример 1. Построить сингулярное разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица

$$A^* A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 48 & 24 \\ 48 & 84 & 24 \\ 24 & 24 & 48 \end{pmatrix}$$

имеет характеристический многочлен

$$\left| A^* A - \lambda \cdot E \right| = \begin{vmatrix} 84 - \lambda & 48 & 24 \\ 48 & 84 - \lambda & 24 \\ 24 & 24 & 48 - \lambda \end{vmatrix} = (144 + \lambda)(\lambda - 36)^2,$$

корнями которого являются $\lambda_1 = 144$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 36$. Поэтому сингулярными числами матрицы A являются числа $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 12$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sqrt{36} = 6$.

Следовательно, матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь перейдем к построению ортонормированной системы собственных векторов линейного оператора с матрицей $A^* A$.

При $\lambda = 144$ система $(A^* A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} -60x_1 + 48x_2 + 24x_3 = 0, \\ 48x_1 - 60x_2 + 24x_3 = 0, \\ 24x_1 + 24x_2 - 96x_3 = 0 \end{cases}$$

При $\lambda = 144$ система $(A^*A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} -60x_1 + 48x_2 + 24x_3 = 0, \\ 48x_1 - 60x_2 + 24x_3 = 0, \\ 24x_1 + 24x_2 - 96x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из одного решения, например $(2, 2, 1)^T$. Нормируя это решение, получим вектор

$$v_1 = \frac{1}{3} \cdot (2, 2, 1)^T.$$

При $\lambda = 36$ система $(A^*A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} 48x_1 + 48x_2 + 24x_3 = 0, \\ 48x_1 + 48x_2 + 24x_3 = 0, \\ 24x_1 + 24x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из двух решений, например, $(2, -1, -2)^T$ и $(1, -2, 2)^T$. Эти решения уже ортогональны. В противном случае их следовало бы ортогонализировать. Нормируя эти решения, получим ортонормированную систему векторов

$$v_2 = \frac{1}{3} \cdot (2, -1, -2)^T, \quad v_3 = \frac{1}{3} \cdot (1, -2, 2)^T.$$

Составим матрицу

$$V = (v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь построим векторы

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \frac{Av_3}{\sigma_3} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Дополним систему векторов u_1, u_2, u_3 до ортонормированного базиса евклидова пространства Y_4 , например, вектором

$$u_4 = \frac{1}{2} \cdot (1, -1, -1, 1)^T.$$

Составим матрицу

$$U = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем искомое сингулярное разложение

$$A = U \Sigma V^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Построить сингулярное разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица

$$A^*A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & 12 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

имеет характеристический многочлен

$$|A^*A - \lambda \cdot E| = \lambda(\lambda - 16)^3,$$

корнями которого являются $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 16$, $\lambda_4 = 0$. Поэтому сингулярными числами матрицы A являются числа $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sqrt{16} = 4$, $\sigma_4 = 0$.

Следовательно, матрица

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь перейдем к построению ортонормированной системы собственных векторов линейного оператора с матрицей A^*A .

При $\lambda = 16$ система уравнений $(A^*A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из трех решений, например, $(1, 1, 1, -1)^T$, $(1, 1, -1, 1)^T$, $(1, -1, 1, 1)^T$. Эти решения уже попарно ортогональны. В противном случае их следовало бы ортогонализировать. Нормируя эти решения, получим ортонормированную систему векторов

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1, 1, -1)^T, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1, -1, 1)^T, \\ v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, -1, 1, 1)^T.$$

При $\lambda = 0$ система $(A^*A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$, т. е. система

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 12x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 12x_4 = 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из одного решения, например $(-1, 1, 1, 1)^T$. Нормируя это решение, получим вектор

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 1, 1, 1)^T.$$

Составим матрицу

$$V = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь построим векторы

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \frac{Av_3}{\sigma_3} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Дополним систему векторов u_1, u_2, u_3 до ортонормированного базиса евклидова пространства Y_4 , например, вектором $u_4 = \frac{1}{2} \cdot (-1, 1, 1, 1)^T$.

Составим матрицу

$$U = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем искомое сингулярное разложение

$$A = U \Sigma V^* =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сжатие информации

Предположим, что некоторая информация представлена матрицей $X := (x_{ij})$. Это может быть, например, таблица значений какого-либо параметра плоского изображения или матрица, составленная из определенного фиксированного числа «отрезков» дискретного временного ряда. Для простоты будем считать, что эта матрица — квадратная ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Выполнив сингулярное разложение матрицы X , имеем:

$$X = U \Sigma V^T = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n u_{1k} \sigma_k v_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n u_{1k} \sigma_k v_{kn} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \sum_{k=1}^n u_{nk} \sigma_k v_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n u_{nk} \sigma_k v_{kn} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, каждый элемент x_{ij} матрицы X характеризуется своим разложением по сингулярным значениям, имеющем вид

$$x_{ij} = \sigma_1 u_{i1} v_{1j} + \sigma_2 u_{i2} v_{2j} + \dots + \sigma_n u_{in} v_{nj},$$

где сингулярные числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, напомним, считаются упорядоченными по убыванию. Обычно значимость слагаемых в подобном разложении убывает достаточно быстро с увеличением их номеров. Поэтому отбрасывание нескольких последних слагаемых должно мало изменить информацию, содержащуюся в x_{ij} , т.е. без большого ущерба можно положить

$$x_{ij} \approx \hat{x}_{ij} := \sigma_1 u_{i1} v_{1j} + \sigma_2 u_{i2} v_{2j} + \dots + \sigma_k u_{ik} v_{kj},$$

где $k < n$.

Таким образом, *неполное сингулярное разложение*, требуя для своего хранения меньше памяти, может быть использовано в качестве способа сжатия информации (с некоторой потерей). Имеющиеся данные по экспериментальному тестированию такого метода показывают сорокакратное сжатие при пятипроцентной потере информации и десятикратное — при двухпроцентной.

Похожие на проведенные рассуждения используют также при построении методов реставрации пространственных изображений, алгоритмов кодирования, при анализе временных рядов.