

Сегодня: среда, 29 апреля 2020 г.

Физические основы механики

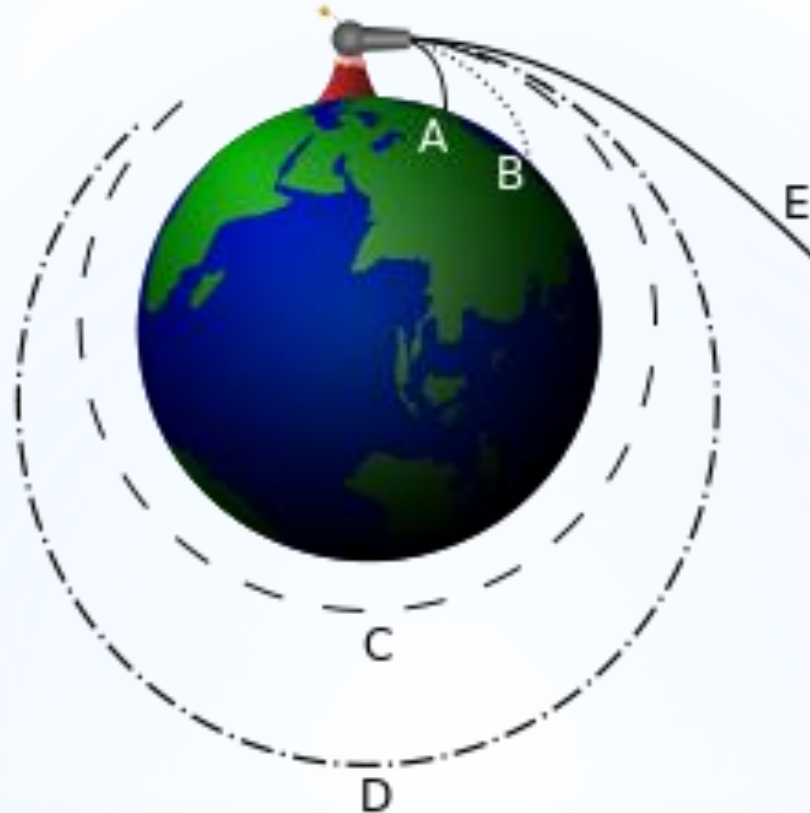


Мельникова Тамара Николаевна
ст. преподаватель кафедры ОФ ФТИ ТПУ

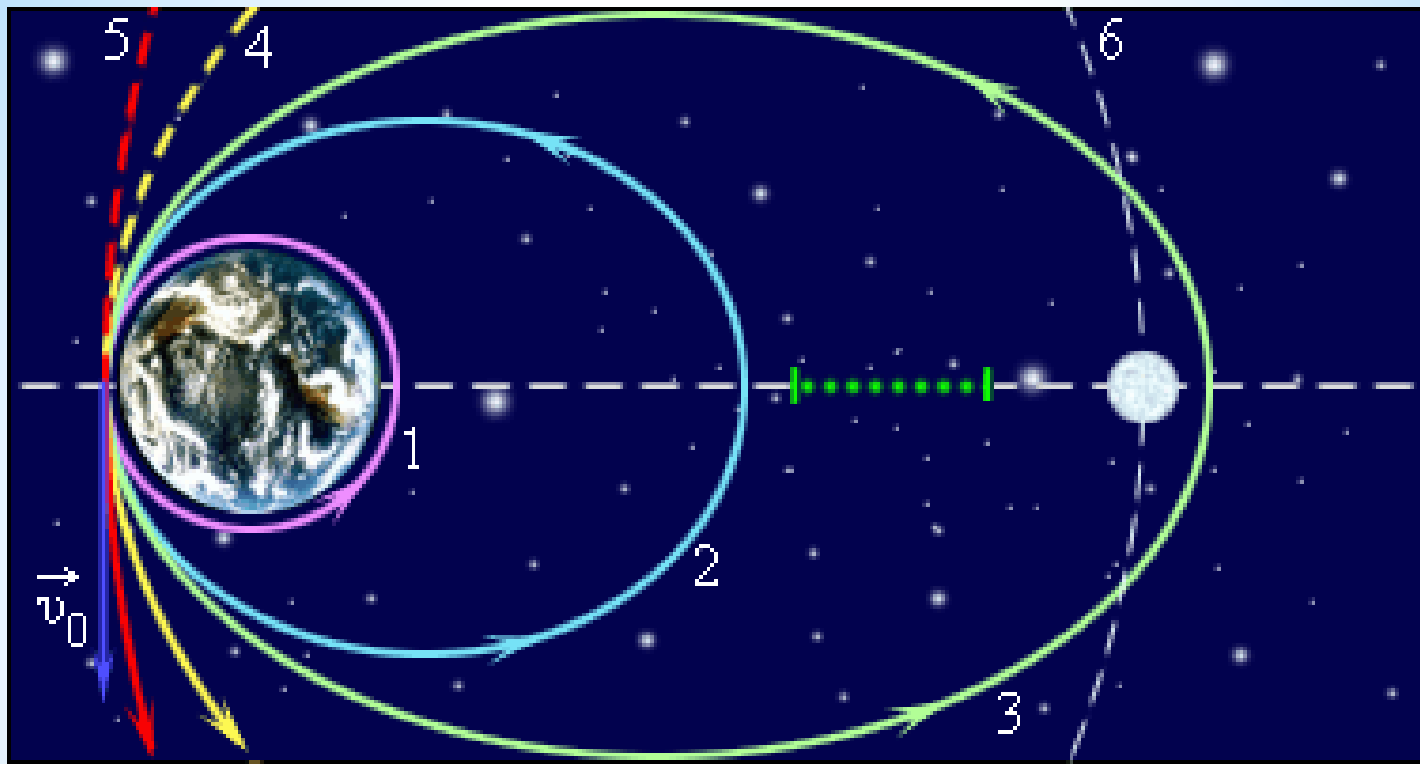
Движение тела в гравитационном поле.



Космические скорости



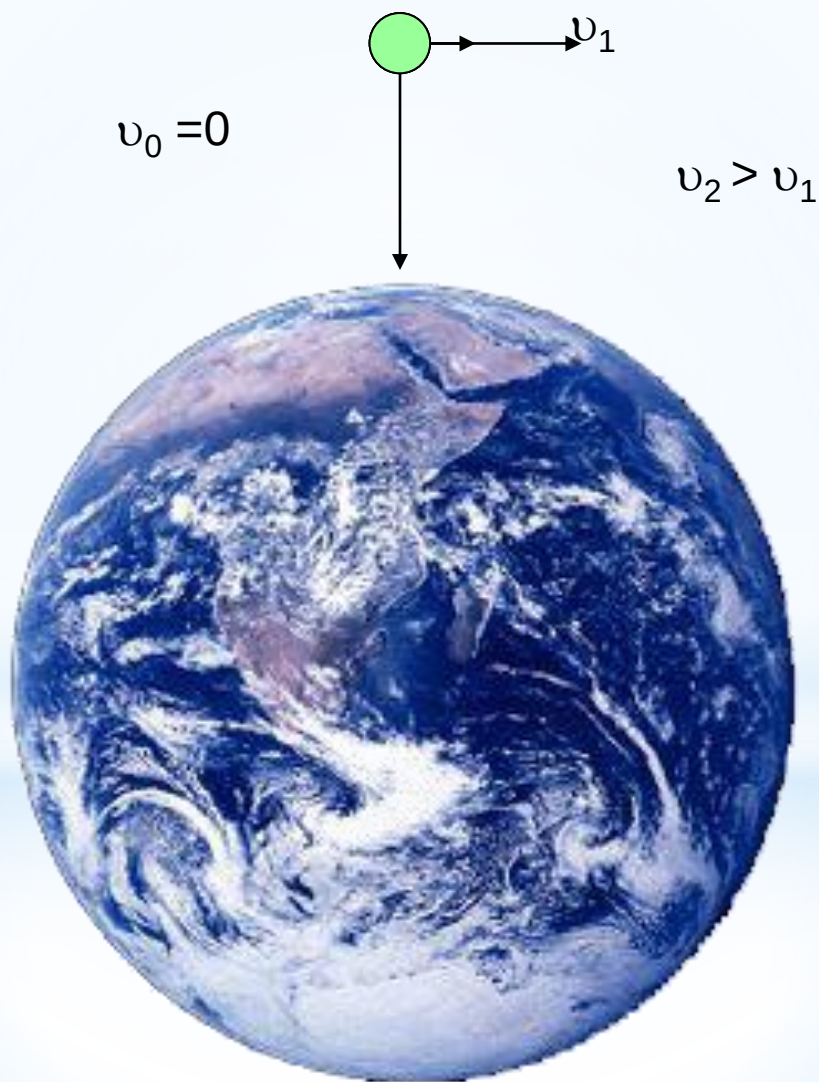
Анализ 1й и 2й космической скорости по И. Ньютону. Снаряды А и В падают на Землю. Снаряд С выходит на круговую орбиту, D — на эллиптическую. Снаряд Е улетает в открытый космос.



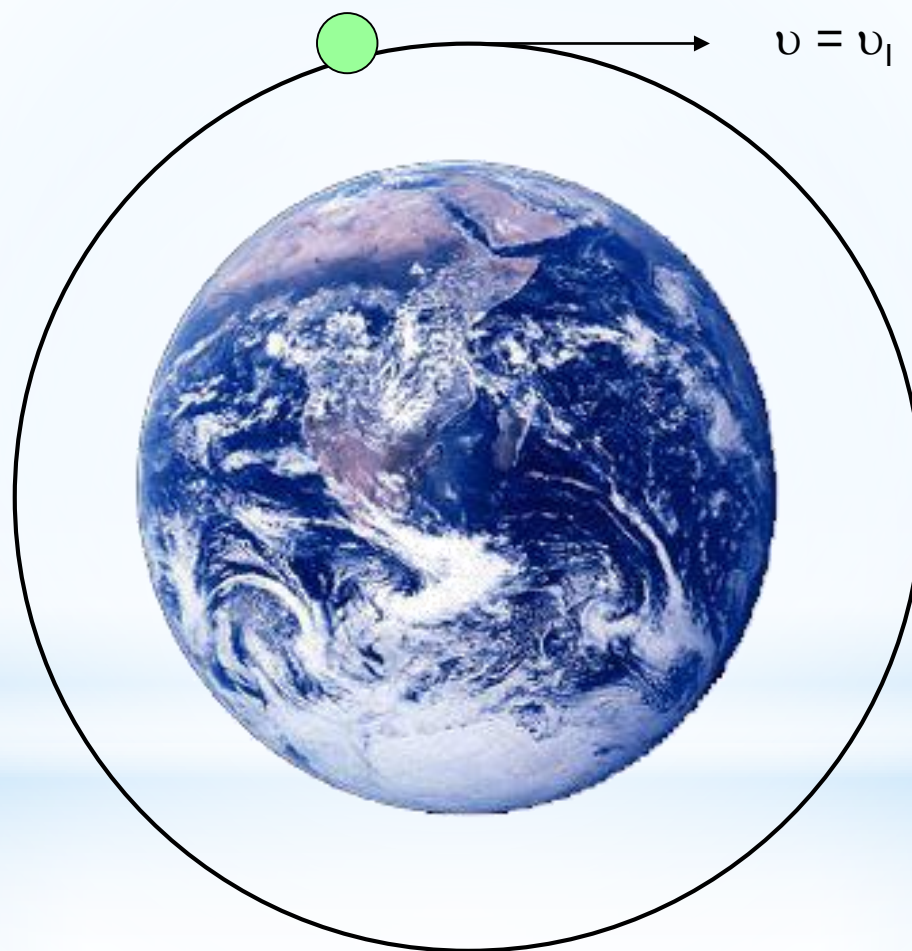
Космические скорости. Указаны скорости вблизи поверхности Земли.

- 1: $v = v_1$ — круговая траектория;
- 2: $v_1 < v < v_2$ — эллиптическая траектория;
- 3: $v = 11,1 \cdot 10^3$ м/с — сильно вытянутый эллипс;
- 4: $v = v_2$ — параболическая траектория;
- 5: $v > v_2$ — гиперболическая траектория;
- 6: траектория Луны

Траектория движения тел движущихся с малой скоростью



Движение тел с первой космической скоростью



Первая космическая скорость (круговая⁷ скорость) — скорость, которую необходимо придать объекту, который после этого не будет использовать реактивное движение, чтобы вывести его на круговую орбиту (пренебрегая сопротивлением атмосферы и вращением планеты).

Иными словами, **первая космическая скорость** — это минимальная скорость, при которой тело, движущееся горизонтально над поверхностью планеты, не упадёт на неё, а будет двигаться по круговой орбите.

$$\frac{mv_1^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2} . \qquad v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R}} .$$

Здесь m — масса объекта, M — масса планеты, G — гравитационная постоянная ($6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$), v_1 — первая космическая скорость, R — радиус планеты. Подставляя численные значения (для Земли $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$, $R = 6370 \text{ км}$), найдем **$v_1 \approx 7,9 \text{ км/с}$** .

Первую космическую скорость можно определить через ускорение свободного падения. Так как

$$g = G \frac{M}{R^2}, \quad v_1 = \sqrt{G \frac{MR}{R \cdot R}} = \sqrt{gR}.$$

Космические скорости могут быть вычислены и для поверхности других космических тел.

Первый искусственный спутник Земли

*Первый искусственный спутник
Земли запущен 4 октября 1957
года*

Масса 83,60 кг.

Период обращения 96 мин.



Первый полет человека в космос

**12 апреля 1961г.
Ю.А. Гагарин. СССР.**



Восток.

Движение тел со скоростью больше первой космической.

Траектория движения эллиптическая.



Вторая космическая скорость (параболическая скорость, скорость освобождения, скорость убегания) — наименьшая скорость, которую необходимо придать объекту (космическому аппарату), масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой небесного тела (планеты), для преодоления гравитационного притяжения этого небесного тела и покидания круговой орбиты вокруг него. Предполагается, что после приобретения телом этой скорости оно более не получает негравитационного ускорения (двигатель выключен, атмосфера отсутствует).

Вторая космическая скорость определяется радиусом и массой небесного тела, поэтому она своя для каждого небесного тела (для каждой планеты) и является его характеристикой. Тело, имеющее около Земли такую скорость, покидает окрестности Земли и становится спутником Солнца.

Параболической вторая космическая скорость называется потому, что тела, имеющие при старте скорость, в точности равную второй космической, движутся по дуге параболы относительно небесного тела. **Но, если энергии телу придано чуть больше, его траектория перестает быть параболой и становится гиперболой; если чуть меньше, то она превращается в эллипс. В общем случае все они являются коническими сечениями.**

Для получения **формулы второй космической скорости** удобно обратить задачу — спросить, **какую скорость получит тело на поверхности планеты, если будет падать на неё из бесконечности.**

Очевидно, что это именно та скорость, которую надо придать телу на поверхности планеты, чтобы вывести его за пределы её гравитационного влияния.

Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM}{R} = 0.$$

Здесь слева стоят кинетическая и потенциальная энергии на поверхности планеты (потенциальная энергия отрицательна, так как точка отсчета взята на бесконечности),

справа то же, но на бесконечности (покоящееся тело на границе гравитационного влияния — энергия равна нулю). Здесь m — масса пробного тела, M — масса планеты, R — радиус планеты, G — гравитационная постоянная, v_2 — вторая космическая скорость.

Решая это уравнение относительно v_2 , получим

$$v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}}. \quad v_2 = \sqrt{2gR}.$$

Между первой и второй космическими скоростями существует простое соотношение:

$$v_2 = \sqrt{2}v_1.$$

$$v_2 = 11,2 \text{ км/с.}$$

Для того, чтобы покинуть пределы Солнечной системы с орбиты Земли, ракета массой m должна обладать скоростью относительно Солнца v_C , определяемой законом сохранения энергии

$$\frac{mv_C^2}{2} = G \frac{M_C m}{R_{ZC}},$$

где M_C – масса Солнца, R_{ZC} – радиус земной орбиты. Отсюда требуемая скорость ракеты относительно Солнца

$$v_C = \sqrt{\frac{2GM_C}{R_{ZC}}}.$$

Ракета вследствие движения вместе с Землей по орбите вокруг Солнца уже обладает скоростью вращения Земли вокруг Солнца, которую можно найти, применив второй закон Ньютона:

$$G \frac{M_C m}{R_{ZC}^2} = \frac{mv_Z^2}{R_{ZC}},$$

откуда

$$v_Z = \sqrt{\frac{GM_C}{R_{ZC}}}.$$

Следовательно, при разгоне ракеты в направлении вектора скорости движения Земли по её орбите вокруг Солнца скорость космической ракеты v_{RZ} относительно Земли для выхода за пределы Солнечной системы должна быть равна

$$v_{RZ} = v_C - v_Z(\sqrt{2} - 1).$$

Для того, чтобы удалить корабль из поля тяготения Земли, ему надо сообщить вторую космическую скорость

$$v_2 = \sqrt{2G \frac{M_Z}{R_Z}}.$$

Следовательно, кинетическая энергия E_k , которую надо сообщить космическому кораблю для того, чтобы он покинул Солнечную систему, складывается из кинетической энергии E_2 , необходимой для того, чтобы покинуть поле тяготения Земли и кинетической энергии E_{RZ} , необходимой для того, чтобы он с орбиты Земли покинул поле тяготения Солнца

$$\frac{mv_3^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_{RZ}^2}{2},$$

откуда $v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_{RZ}^2}$.

Отсюда приходим к формуле:

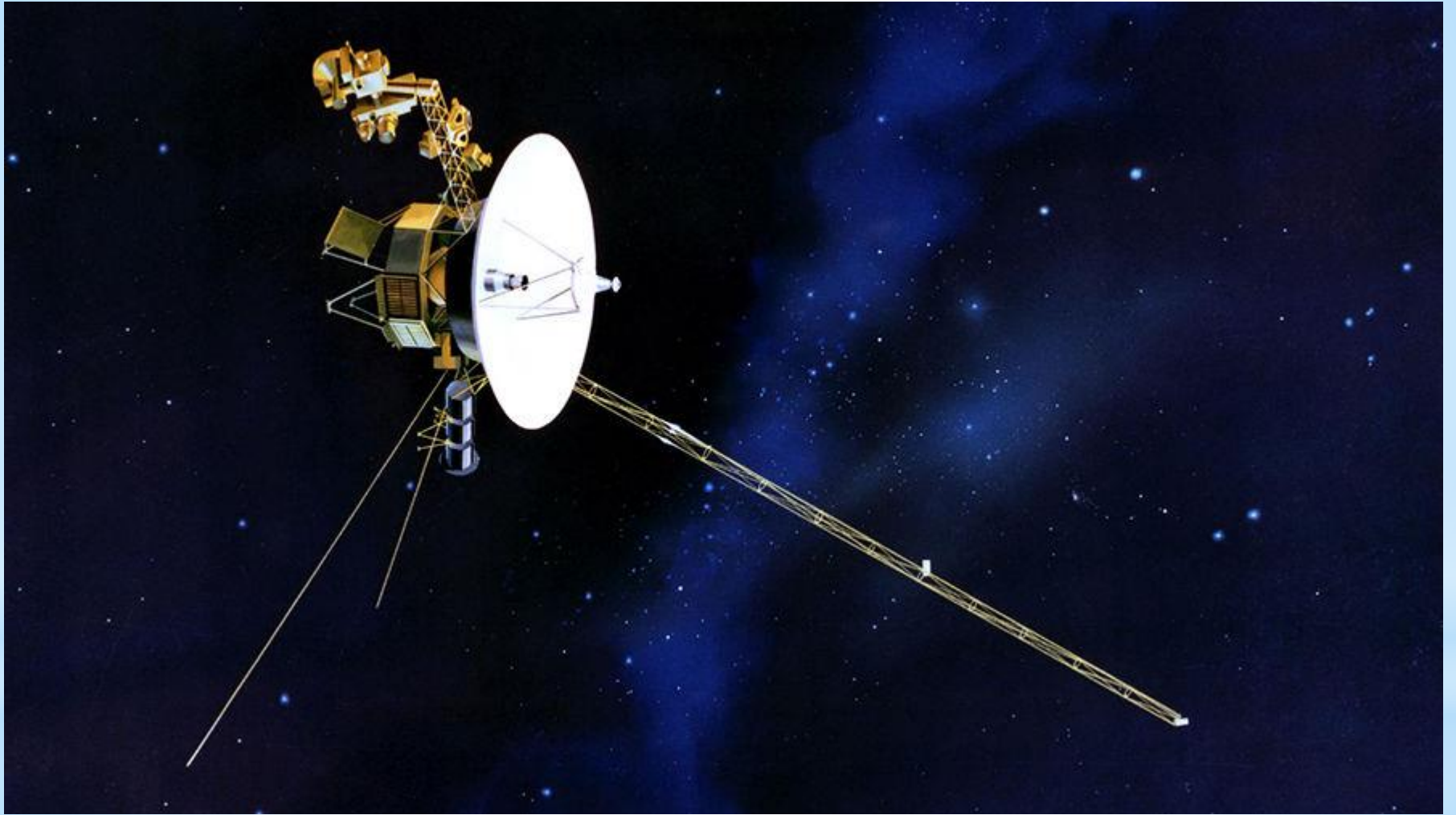
$$v_3 = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)v_Z^2 + v_2^2},$$

где v_Z — орбитальная скорость планеты, v_2 — вторая космическая скорость для планеты.

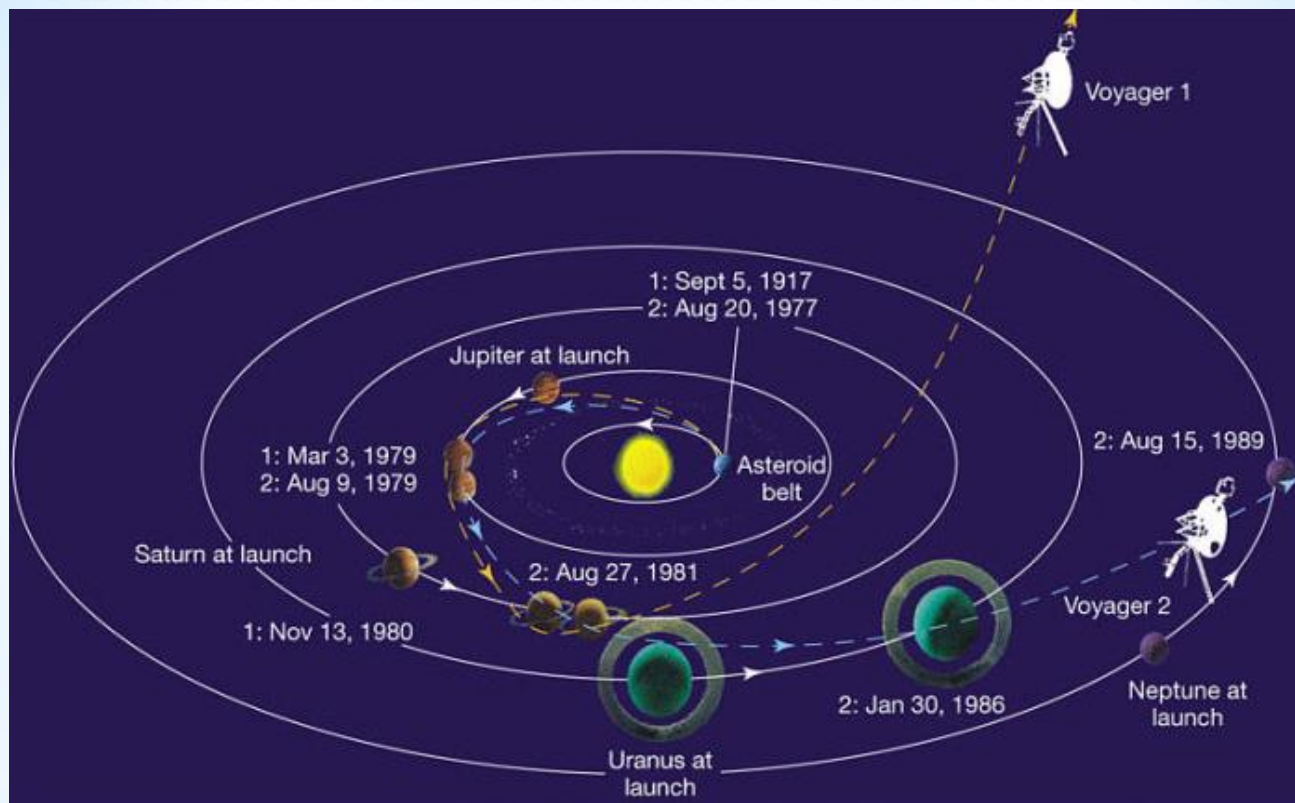
Подставляя численные значения (для Земли $v_Z = 29,783$ км/с, $v_2 = 11,182$ км/с), найдём $v_2 \approx 16,650$ км/с.

То есть, **третья космическая скорость** — минимальная скорость, которую необходимо придать находящемуся вблизи поверхности Земли телу, чтобы оно могло преодолеть гравитационное притяжение Земли и Солнца и покинуть пределы Солнечной системы.

$$v_3 = 16,650 \text{ км/с.}$$



Траектория движения Вояджер-1 и 2



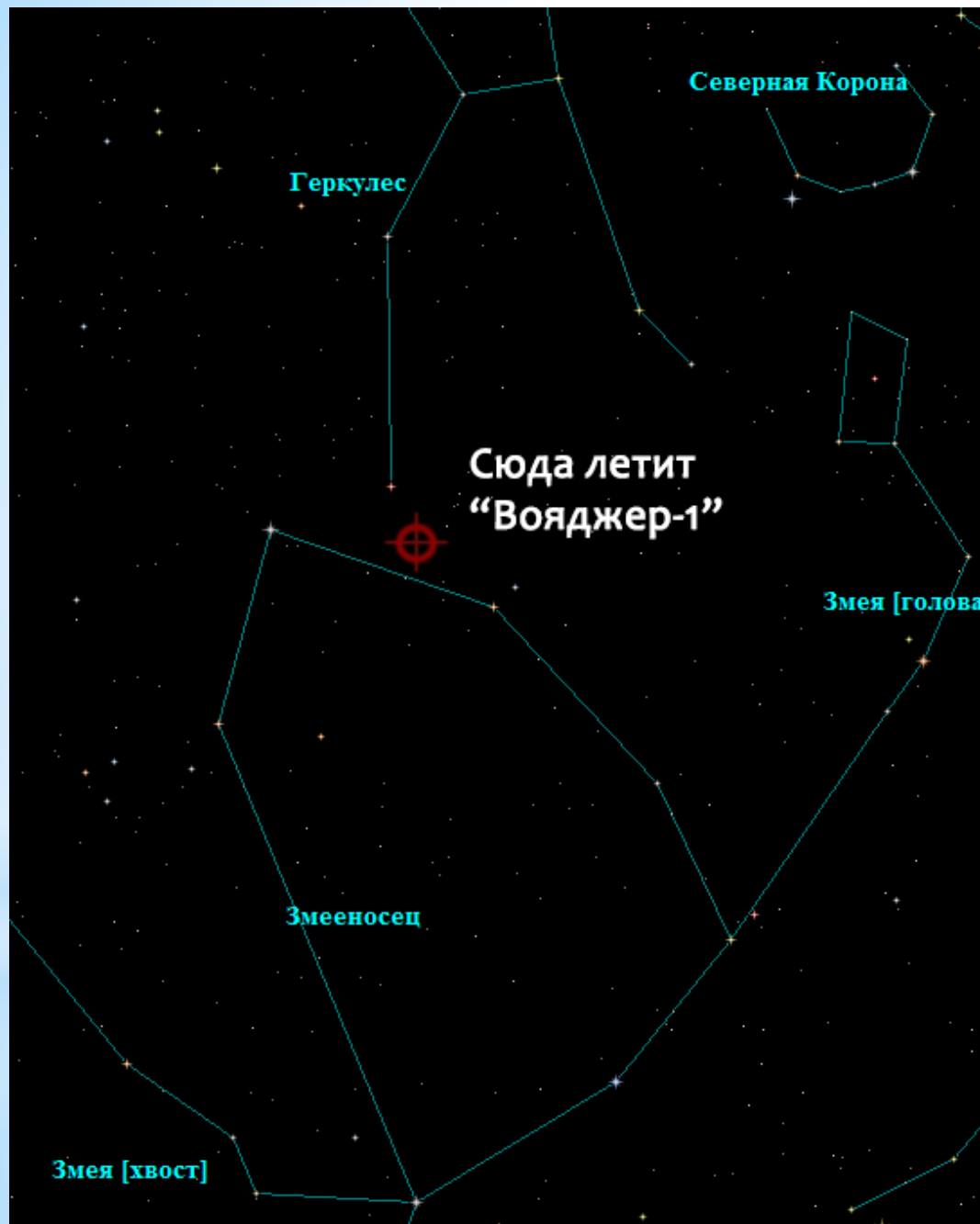
Запущен в 1977 году.

Прошел мимо больших планет. В 1989 г аппарат Вояджер вышел за пределы Солнечной системы.

«Вояджер-1» преодолел границу гелиосферы около 25 августа 2012 года.



Положение аппаратов программы «Вояджер» в 2009 году.



В какой точке искать
«Вояджер-1»

Траектории движения тел



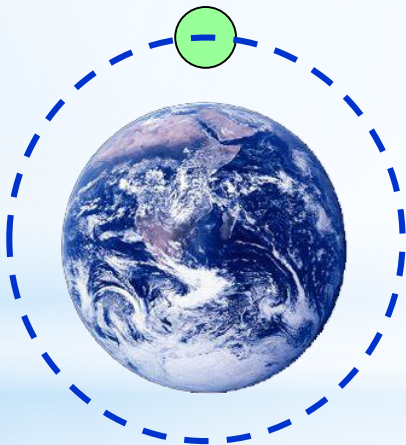
$$v_0 = 0$$



прямая
линия



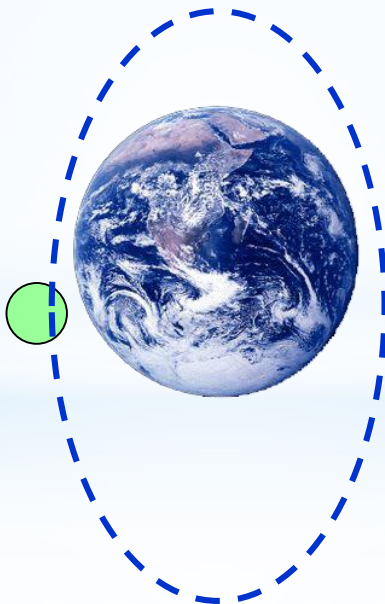
$$v = v_I$$



окружность



$$v_I < v < v_{II}$$



эллипс



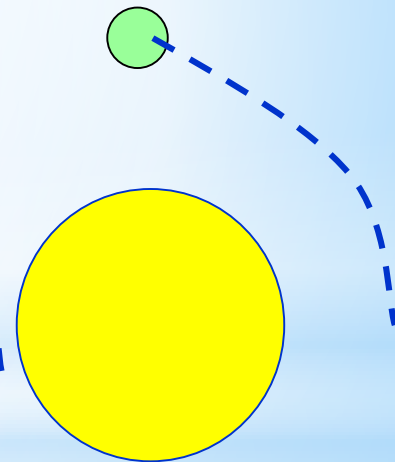
$$v = v_{II}$$



парабола



$$v = v_{III}$$

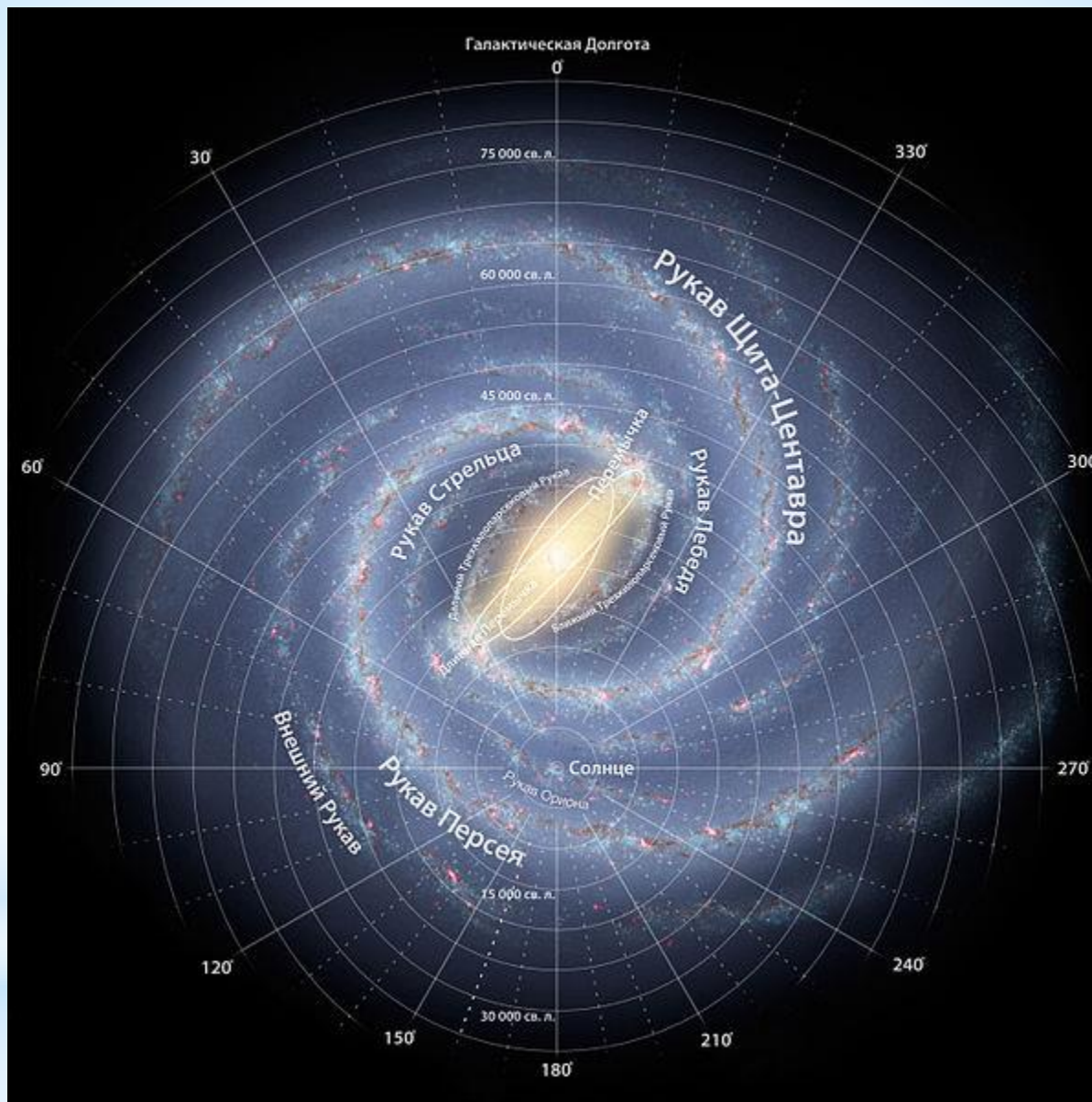


гипербола

Четвёртая космическая скорость — минимально необходимая скорость тела, позволяющая преодолеть притяжение галактики в данной точке.

Численно равна квадратному корню из гравитационного потенциала в данной точке галактики (если выбрать гравитационный потенциал равным нулю на бесконечности).

Четвёртая космическая скорость не постоянна для всех точек галактики, а зависит от координаты. По оценкам, в **районе нашего Солнца четвёртая космическая скорость составляет около 550 км/с.**



Млечный путь

ГАЛАКТИЧЕСКАЯ КОРОНА
Горячий газ, окружающий Галактику

ВЫСОКОСКОРОСТНОЕ ОБЛАКО
Влетающий сгусток
сравнительно свежего газа

ДИСК ГАЛАКТИКИ
Сплюснутая система
звезд, газа
и пыли

ПУЗЫРЬ
Газ, нагретый
сверхновыми;
источник
«фонтана»

ОБЛАКО С
ПРОМЕЖУТОЧНОЙ
СКОРОСТЬЮ
Остывший газ;
возвратный поток
«фонтана»

БОЛЬШОЕ МАГЕЛЛАНОВО
ОБЛАКО
Галактика – спутник
Млечного Пути

МАЛОЕ МАГЕЛЛАНОВО ОБЛАКО
Галактика – спутник Млечного Пути

Мы здесь!

СОЛНЦЕ
И ПЛАНЕТЫ

КАРЛИКОВАЯ СФЕРОИДАЛЬНАЯ
ГАЛАКТИКА В СТРЕЛЬЦЕ
Галактика – спутник Млечного Пути

ТУМАННОСТЬ
АНДРОМЕДЫ
Ближайшая
крупная
спиральная
галактика

ГАЛАКТИКА
В ТРЕУГОЛЬНИКЕ
Соседняя галактика
средней величины

МАГЕЛЛАНОВ ПОТОК
Рукав газа, оторванного
от Магеллановых Облаков

ПОТОК СТРЕЛЬЦА
«Хвост» из звезд, оторванный
от карликовой галактики в Стрельце

Значение **четвертой космической скорости** сильно зависит не только (и не столько) от расстояния до центра Галактики, но и **от распределения масс вещества по Галактике**, о которых пока нет точных данных, ввиду того что видимая материя составляет лишь малую часть общей гравитирующей массы, а все остальное — скрытая масса.

Вне диска Галактики распределение масс приблизительно сферически симметрично, как следует из измерений скоростей шаровых скоплений и других объектов сферической подсистемы.

Задача 1

Средняя угловая скорость движения Земли вокруг Солнца равна 1° в сутки. Определите массу Солнца.

Ответ представьте в тоннах, поделите на 10^{27} и округлите до целого числа.

Расстояние от Земли до Солнца 150 млн км.
Гравитационная постоянная равна $6,67 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$.

[2]

Запишем среднюю угловую скорость движения Земли вокруг Солнца в рад/с.

$$\varphi = \frac{1 \cdot 3,14}{180} \approx 0,017 \text{ рад.} \quad \omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{0,017}{24 \cdot 3600} \approx 2,02 \cdot 10^{-7} \text{ рад/с.}$$

Земля вращается по круговой орбите вокруг Солнца, следовательно

$$G \frac{M_3 M_C}{r^2} = M_3 \omega^2 r; \quad GM_C = \omega^2 r^3;$$

$$M_C = \frac{\omega^2 r^3}{G};$$

$$M_C = \frac{(2,02 \cdot 10^{-7})^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{11})^3}{6,7 \cdot 10^{-11}} = 2,05 \cdot 10^{30} \text{ кг} \approx 2 \cdot 10^{27} \text{ т.}$$

Задача 2

Определите линейную скорость спутника, движущегося по окружности на высоте 270 км от поверхности Земли. Массу Земли принять равной $6 \cdot 10^{24}$ кг, радиус Земли 6400 км. Гравитационная постоянная равна $6,67 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$.

Ответ представьте в км/с и округлите до сотых.

[7,75]

$$G \frac{M_c M_3}{(r+h)^2} = \frac{M_c v^2}{r+h}; \quad G \frac{M_3}{r+h} = v^2;$$

$$v = \sqrt{G \frac{M_3}{r+h}};$$

$$v = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{(6400 + 270) \cdot 10^3}} \approx 775 \text{ м/с} = 7,75 \text{ км/с}.$$

Задача 4

Во сколько раз период обращения спутника, движущегося на расстоянии 21600 км от поверхности Земли, больше периода обращения спутника, движущегося на расстоянии 600 км от поверхности Земли?

Радиус Земли принять равным 6400 км.

[8]

Будем считать то что оба спутника движутся по идеально круговой орбите с постоянной по модулю скоростью

Тогда их период обращения выражается следующим образом:

$$T_1 = \frac{2\pi(R_3 + R_1)}{v_1}; \quad T_2 = \frac{2\pi(R_3 + R_2)}{v_2},$$

где v - первая космическая скорость, равная

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_3 + R}}.$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi(R_3 + R_1)}{v_1} \cdot \frac{v_2}{2\pi(R_3 + R_2)} = \frac{v_2(R_3 + R_1)}{v_1(R_3 + R_2)}.$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{GM}{R_3 + R_2}} \cdot \sqrt{\frac{R_3 + R_1}{GM}} \cdot \frac{R_3 + R_1}{R_3 + R_2} = \sqrt{\frac{R_3 + R_1}{R_3 + R_2}} \cdot \frac{R_3 + R_1}{R_3 + R_2}.$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{6400 + 21600}{6400 + 600}} \cdot \frac{6400 + 21600}{6400 + 600} = 8.$$

Задача 6

Какую работу нужно было бы совершить, чтобы вывести спутник массой 500 кг на круговую орбиту, проходящую вблизи поверхности Земли, если бы сопротивление воздуха отсутствовало?

Ответ представьте в единицах СИ.

$[1,6 \cdot 10^{10} \text{ Дж}]$

Задача 7

Вокруг планеты на расстоянии 200 км от её поверхности со скоростью 4 км/с движется спутник.

Определите плотность планеты, если её радиус равен двум радиусам Земли ($R_{\text{пл}} = 2R_{\text{З}}$).

[355 кг/м³]

Планеты имеют форму шара, объём которого можно вычислить по формуле

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

тогда плотность планеты

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3},$$

где M — масса планеты, R — её радиус.

Спутник движется вокруг планеты по круговой орбите. На него действует сила тяготения F , которая определяет центростремительное ускорение.

Согласно второму закону Ньютона

$$ma_{\text{ц}} = G \frac{mM}{(R+h)^2}, \quad \frac{mv^2}{(R+h)} = G \frac{mM}{(R+h)^2}.$$

Из последнего уравнения находим массу планеты:

$$M = \frac{v^2(R+h)}{G}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), имеем

$$\rho = \frac{3v^2(R+h)}{4\pi R^3 G} = \frac{3v^2(2R_3+h)}{32\pi R_3^3 G} \approx 355 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 8

При какой скорости спутника период его обращения вокруг Земли равен двум суткам?

[2,4 км/с]

Скорость спутника

$$v = \frac{2\pi(R_3 + h)}{T},$$

где h — высота спутника над поверхностью Земли.

Для определения скорости необходимо знать высоту h .

Спутник движется по круговой орбите, при этом сила тяготения является центростремительной силой. Согласно второму закону Ньютона для спутника запишем:

$$ma_{\text{ц}} = G \frac{mM_3}{(R_3 + h)^2}, \quad \frac{mv^2}{(R_3 + h)} = G \frac{mM_3}{(R_3 + h)^2}.$$

где m — масса спутника.

Отсюда находим высоту

$$h = \frac{GM_3}{v^2} - R_3.$$

Подставим выражение для h в формулу (1) и из полученного уравнения определим искомую скорость:

$$v = \frac{2\pi(R_3 + \frac{GM_3}{v^2} - R_3)}{T} = \frac{2\pi GM_3}{Tv^2}.$$

Окончательно получим

$$v = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM_3}{T}}.$$

Для упрощения расчётов поместим спутник на полюс, где сила тяжести равна силе тяготения. Тогда

$$mg = G \frac{mM_3}{R_3^2}.$$

отсюда $gR_3^2 = GM_3.$

Теперь определим скорость:

$$v = \sqrt[3]{\frac{2\pi g R_3^2}{T}} \approx 2,4 \text{ км/с.}$$

Задача 9

Определите среднее расстояние от Сатурна до Солнца, если период обращения Сатурна вокруг Солнца равен 29,5 лет. Масса Солнца равна $2 \cdot 10^{30}$ кг.

[$1,43 \cdot 10^{12}$ м]

Считаем, что Сатурн движется вокруг Солнца по круговой орбите. Тогда согласно второму закону Ньютона запишем:

$$ma_{\text{ц}} = G \frac{mM_{\text{с}}}{r^2}, \quad \frac{mv^2}{r} = G \frac{mM_{\text{с}}}{r^2}.$$

где m — масса Сатурна, r — расстояние от Сатурна до Солнца, $M_{\text{с}}$ — масса Солнца.

Период обращения Сатурна: $T = \frac{2\pi r}{v}$,
отсюда

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Тогда

$$\left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 = G \frac{M_{\text{с}}}{r}.$$

Из последнего уравнения определим искомое расстояние от Сатурна до Солнца:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_c T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 29,5^2 \cdot 365^2 \cdot 86400^2}{4\pi^2}} = 1,43 \cdot 10^{12} \text{ м.}$$

Сравнив с табличными данными, убедимся в правильности найденного значения.

Образцы заданий ЕГЭ

С1. Чему равен радиус кольца Сатурна, в котором частицы движутся со скоростью 10 км/с?

Масса Сатурна $5,7 \cdot 10^{26}$ кг.

С2. Среднее расстояние от планеты Земля до Солнца составляет 149,6 млн км, а от планеты Юпитер до Солнца — 778,3 млн км.

Чему равно отношение $v_3/v_{Ю}$ линейных скоростей этих двух планет при их движении вокруг Солнца, если считать их орбиты окружностями?

С3. Среднее расстояние от Солнца до планеты Уран составляет 2875,03 млн км, а до планеты Земля — 149,6 млн км.

Чему приблизительно равна средняя линейная скорость планеты Уран при её движении вокруг Солнца, если известно, что средняя скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца составляет 30 км/с?

С4. Средняя плотность некоторой планеты равна средней плотности планеты Земля, а радиус этой планеты в 2 раза больше радиуса Земли.

Определите отношение первой космической скорости на этой планете к первой космической скорости на Земле $v_{\text{п}}/v_{\text{з}}$.

С5. С какой скоростью движутся частицы, входящие в наиболее плотное кольцо Сатурна, если известно, что период их обращения примерно совпадает с периодом вращения Сатурна вокруг своей оси и составляет 10 ч 40 мин?

Масса Сатурна равна $5,7 \cdot 10^{26}$ кг.