

УДК 539.3

М.И. Шмурак, А.Г. Кучумов, Н.О. Воронова
M.I. Shmurak, A.G. Kuchumov, N.O. Voronova

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет

Perm National Research Polytechnic University

**АНАЛИЗ ГИПЕРУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ
ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ МЯГКИХ ТКАНЕЙ
ОРГАНИЗМА ЧЕЛОВЕКА**

**HYPERELASTIC MODELS ANALYSIS
FOR DESCRIPTION OF SOFT HUMAN
TISSUES BEHAVIOR**

Представлен обзор гиперупругих моделей. Рассмотрены функции энергии деформации для моделей неогука, Муни – Ривлина, Йо, Арруда – Бойса, Гента, Огдена, Блатца – Ко, а также полиномиальной и гиперпенной моделей.

Ключевые слова: гиперупругая модель, каучук, деформация, напряжение, инвариант, относительное удлинение, объемный модуль, модуль сдвига, потенциал энергии деформации.

Review of hyperelastic models is represented. Strain energy potential for Neo-Hookean, Mooney – Rivlin, Yeoh, Arruda – Boyce, Gent, Ogden, Blatz – Ko, polynomial and hyperfoam models are considered.

Keywords: hyperelastic model, rubber, strain (deformation), stress, stretch ratio, bulk modulus, shear modulus, strain energy potential.

В современном мире в любой отрасли (машиностроении, самолетостроении, строительстве, медицине, биотехнологиях и т.д.) так или иначе присутствуют полимерные материалы. Они являются более технологичными и универсальными в применении. Поведение гиперупругих материалов, называемых еще эластомерами, с точки зрения механики деформируемого тела описывается нелинейными законами связи напряжение – деформация [1]. В этом случае закон Гука не может применяться, а взаимосвязь между напряжениями и деформациями задается с помощью потенциала энергии деформаций [2]. К эластомерам можно отнести каучук, резину, пену. Такие материалы способны деформироваться на 200–300 %, даже на 700 %, а потом возвращаться к исходному состоянию или близкому к нему.

В организме человека большинство мягких тканей (кровеносные сосуды, желчные протоки, ткани сердца, печени, желудка и других органов) [3–5]

также считаются гиперупругими. Разнообразные гиперупругие модели используются для оценки механического поведения мягких тканей, и не всегда этот выбор является обоснованным. В связи с этим выбор моделей, определяющих соотношений для гиперупругих материалов, является актуальной задачей в биомеханике и биомедицинском инжиниринге.

Как известно из литературы, большинство мягких тканей в организме человека (в том числе кровеносные сосуды и желчные протоки) обладают нелинейными эластичными свойствами [3–5]. Целями данной работы являются сравнение и анализ данных моделей в плане их применимости к описанию мягких тканей в организме человека (кровеносных сосудов, желчных протоков).

Основные определения. Для описания напряженно-деформированного состояния гиперупругих материалов необходимо, чтобы зависимость напряжений и соответствующих им деформаций выражалась через одну характеристику материала, не зависящую от деформации. Для этого удобно использовать относительное удлинение образца (для одноосного удлинения) [2]:

$$\lambda = \frac{L}{L_0} = \frac{L_0 + \Delta u}{L_0} = 1 + \varepsilon_E,$$

где L – длина образца после деформации; L_0 – длина образца до деформации; ε_E – упругая деформация.

Существуют три главных относительных удлинения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, которые характеризуют деформацию. Чтобы показать определение главных относительных удлинений на примере, рассмотрим двухосное растяжение тонкого квадратного листа (рис. 1). Главные относительные удлинения λ_1, λ_2 характеризуют деформацию на плоскости, а λ_3 определяется как отношение толщины (t/t_0). Если материал предполагается полностью не сжимаемым, то λ_3 должно быть равно λ^{-2} .

В потенциале плотности энергии деформации используются три инварианта деформации:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, \\ I_3 &= \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2, \end{aligned}$$

для несжимаемых материалов $I_3 = 1$.

Относительное изменение объема равно

$$J = \frac{V}{V_0} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

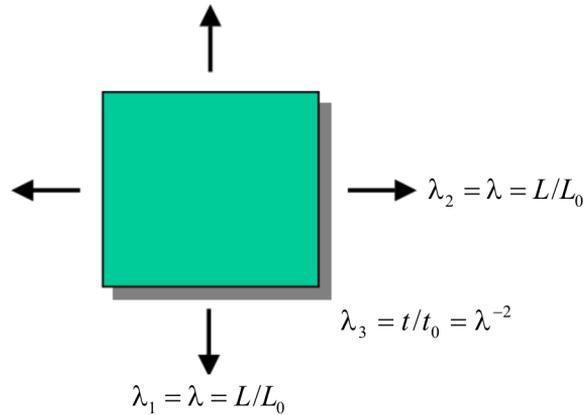


Рис. 1. Схема двухосного растяжения

Для теплового расширения тепловая объемная деформация определяется по формуле

$$J_{\text{th}} = (1 + \varepsilon_{\text{th}})^3.$$

Эластичная объемная деформация связана с полной и тепловой деформацией следующим образом:

$$J_{\text{el}} = J = \frac{J_{\text{total}}}{J_{\text{th}}}.$$

Напряжения Пиола – Киргофа второго рода (E_{ij} – деформации Грина – Лагранжа) определяются по формуле [2]

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}},$$

где W – потенциал энергии деформации.

Функции энергии деформации. Рассмотрим некоторые виды потенциалов энергии деформации. Для потенциала энергии деформаций нужны определенные типы параметров – константы, характеризующие свойства материала. Число констант зависит от выбора функции энергии деформации.

Полиномиальная модель – это феноменологическая модель, в основе которой используются первый и второй инварианты деформаций [6]:

$$W = \sum_{i+j}^N c_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k} (J_{\text{el}} - 1)^{2k},$$

где c_{ij} , d_k , N – константы материала; \bar{I}_1 , \bar{I}_2 – первый и второй инварианты девиаторных деформаций, вычисляются следующим образом ($p = 1, 2, 3$):

$$\bar{I}_p = J^{-2/3} I_p.$$

Начальный объемный модуль определяется по формуле

$$k_0 = \frac{2}{d_1}, \quad (1)$$

а начальный модуль сдвига равен

$$\mu_0 = 2(c_{10} + c_{01}). \quad (2)$$

Полиномиальная модель – это наиболее общий вариант записи потенциала энергии деформации. Она лежит в основе других известных моделей.

Модель Муни – Ривлина – одна из наиболее распространенных видов потенциала энергии деформации [6]. Рассмотрим ее для тех случаев, когда она описывает поведение материала на основе 2, 3, 5 и 9 параметров, являющихся его характеристиками.

Двухпараметрическую модель Муни – Ривлина можно получить из полиномиальной модели при $N = 1$:

$$W = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J_{el} - 1)^2.$$

Трехпараметрическую модель Муни – Ривлина можно получить из полиномиальной модели при $N = 2$ и когда $c_{20} = c_{02} = 0$:

$$W = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3) + c_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J_{el} - 1)^2.$$

Пятипараметрическую модель Муни – Ривлина можно получить из полиномиальной модели при $N = 2$:

$$W = \sum_{i+j}^2 c_{ij}(\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \frac{1}{d}(J_{el} - 1)^2.$$

Девятипараметрическую модель Муни – Ривлина можно получить из полиномиальной модели при $N = 3$:

$$W = \sum_{i+j}^3 c_{ij}(\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \frac{1}{d}(J_{el} - 1)^2.$$

Начальный объемный модуль для всех моделей Муни – Ривлина вычисляется по формуле

$$k = \frac{2}{d}, \quad (3)$$

а начальный модуль сдвига можно найти по формуле (2).

Двухпараметрическая модель Муни – Ривлина хорошо описывает диапазон деформаций растяжения 90–100 %, но достаточно плохо – эффекты жесткости материала и поведение материала при сжатии.

Пяти- и девятипараметрические модели Муни – Ривлина могут быть использованы для случаев с деформацией до 100–200 %. Однако эти модели требуют большего количества констант, описывающих материал.

Модель Йо для несжимаемых материалов выглядит следующим образом [7]:

$$W = \sum_{i=1}^N c_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i} (J_{el} - 1)^{2i}.$$

Как правило, для этой модели принимают $N = 3$, начальный объемный модуль для этого случая вычисляется по формуле (1), а начальный модуль сдвига можно найти как

$$\mu_0 = 2c_{10}.$$

Модель неогук можно получить из полиномиальной модели при $N = 1$, $c_{01} = 0$ и $c_{10} = \mu/2$ [8]:

$$W = \frac{\mu}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d} (J_{el} - 1)^2,$$

где начальный объемный модуль определяется по формуле (3).

Это самая простая гиперэластичная модель, в которой используется постоянный модуль сдвига. Ее достаточно удобно использовать на начальном этапе, поскольку она требует минимального количества констант. Существует ограничение по применению модели неогук: она может применяться только для деформаций в диапазоне до 30–40 % и до 80–90 % чистого сдвига.

Модель Арруда – Бойса – это модель, основанная на статистической механике [9, 10]. Она предполагает, что элементарный объем материала кубической формы содержит 8 негауссовых цепочек, проходящих из центра элемента к его углам. Модель может применяться для деформаций в диапазоне до 300 %. Модель Арруда – Бойса в упрощенном виде для пяти слагаемых функции Ланжевена имеет вид

$$W = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_L^{2i-2}} (\bar{I}_1 - 3)^i + \frac{1}{d} \left(\frac{J_{el}^2 - 1}{2} - \ln J_{el} \right),$$

где $C_1 = \frac{1}{2}$; $C_2 = \frac{1}{20}$; $C_3 = \frac{11}{1050}$; $C_4 = \frac{19}{7050}$; $C_5 = \frac{519}{673\,750}$; λ_L – предельное растяжение сети (это удлинение, при котором напряжения начи-

нают увеличиваться без ограничения). Начальный модуль сдвига определяется следующим образом:

$$\mu = nk\Theta,$$

где n – функция плотности цепи; k – постоянная Больцмана; Θ – температура. При λ_L , стремящейся к бесконечности, модель Арруда – Бойса становится моделью неогукса.

Модель Гента – это микромеханическая модель, подобная модели Арруда – Бойса, основанная на предельном растяжении сети [8]:

$$W = -\frac{EI_m}{6} \ln \left(1 - \frac{\bar{I}_1 - 3}{I_m} \right) + \frac{1}{d} \left(\frac{J_{el}^2 - 1}{2} - \ln J_{el} \right),$$

где E – начальный эластичный модуль для несжимаемых материалов, $E = 3\mu_0$; I_m – предельное значение для $(I_1 - 3)$, аналогично λ_L для модели Арруда – Бойса. При увеличении натурального логарифма модель Гента будет подобна модели Йо. Коэффициенты зависят от функций I_m . Модель Гента подходит для деформаций в диапазоне до 300 %.

Модель Огдена – феноменологическая модель, основывающаяся на главных относительных удлинениях [12] в большей степени, чем на инвариантах деформаций:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left(\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3 \right) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i} (J_{el} - 1)^{2i},$$

где начальный объемный модуль определяется по формуле (1), начальный модуль сдвига – следующим образом:

$$\mu_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i}{2},$$

а девиаторные главные относительные удлинения определяются как

$$\bar{\lambda}_p = J^{-\frac{1}{3}\lambda_p}.$$

При $N=1$, $\mu_1 = \mu$, $\alpha_1 = 2$ модель Огдена приводится к неогуковской модели, при $N=2$, $\mu_1 = 2c_{10}$, $\alpha_1 = 2$, $\mu_2 = -2c_{01}$, $\alpha_2 = -2$ переходит в модель Муни – Ривлина с двумя параметрами. Модель Огдена является наиболее точной, но требует больших вычислительных ресурсов. В основном она применяется для деформаций свыше 700 %.

Гиперпенная модель очень похожа на модель Огдена для несжимающихся материалов [13]:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left(J_{\text{el}}^{\alpha_i/3} \left(\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} \right) - 3 \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i \beta_i} \left(J_{\text{el}}^{-\alpha_i \beta_i} - 1 \right),$$

где начальный объемный модуль и начальный модуль сдвига определяются соответственно:

$$k_0 = \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i \left(\frac{1}{3} + \beta_i \right),$$

$$\mu_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i}{2}.$$

Эта модель предназначена для моделирования поведения сильносжимающегося каучука.

Модель Блатца – Ко наиболее применима для сжимаемых полиуретановых форм каучуков [13]:

$$W = \frac{\mu}{2} \left(\frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right),$$

где μ – модуль сдвига.

Модель Блатца – Ко можно считать подвидом гиперпенной модели при $N = 1$, $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = 0,5$, $\mu_1 = -\mu$.

Из приведенного обзора потенциалов энергии деформаций видно, что одними из наиболее важных факторов при выборе модели, описывающей поведение эластомера под нагрузкой, являются уровень деформаций материала и диапазон их изменений.

Определение параметров гиперупругих моделей на основе экспериментальных данных. Эластомеры активно используются во всех сферах нашей жизни. К таким материалам также можно отнести биоматериалы, например кровеносные сосуды (как правило, они проявляют вязкоупругие свойства). В качестве примера рассмотрено поведение правой позвоночной артерии при одноосном растяжении, результаты эксперимента взяты из работы [14]. По известной экспериментальной кривой нагружения были определены константы в потенциалах энергии деформации в программе ANSYS с помощью процедуры Curve Fitting. Результаты представлены в таблице и на рис. 2. На диаграммах (см. рис. 2) видно, что наиболее точно описывают экспериментальную кривую полиномиальные модели 2 и 3-го порядка, а также пяти- и девятипараметрические модели Муни – Ривлина. Как уже упоминалось, указанные модели Муни – Ривлина получаются из полиномиальной модели при $N = 2$

и при $N = 3$ соответственно, поэтому вполне закономерно совпадение кривых нагружения. Модель Йо 3-го порядка также хорошо характеризует поведение материала при растяжении для достаточно больших деформаций, но при малых деформациях (до 50 %) имеет существенные отклонения. Модели неогуга, Арруда – Бойса, Гента, Огдена, а также модели Йо 1 и 2-го порядка для этого материала не подходят. Полиномиальная модель 1-го порядка, двух- и трехпараметрические модели Муни – Ривлина в данном случае неправильно характеризуют поведение материала для малых деформаций (до 50 %). Можно сделать вывод о том, что для описания поведения артерий при растяжении лучше всего подходят потенциалы энергии деформации на основе полиномиальной модели и модели Муни – Ривлина более высокого порядка.

Константы для потенциалов энергии деформации
при одноосном растяжении правой позвоночной артерии

Потенциал энергии деформации	Константы, характеризующие свойства материала	Комментарии
Двухпараметрическая модель Муни – Ривлина	$C_{10} = 6,8 \cdot 10^4$ Па, $C_{01} = -9,6 \cdot 10^5$ Па	Модель не подходит для описания малых деформации материала (в пределах деформации до 50 %); кроме того, отсутствует точка перегиба кривой нагружения
Трехпараметрическая модель Муни – Ривлина	$C_{10} = 8,1 \cdot 10^5$ Па, $C_{01} = -1,2 \cdot 10^6$ Па, $C_{11} = -1,5 \cdot 10^4$ Па	Модель не подходит для описания малых деформации материала (в пределах деформации до 50 %); кроме того, отсутствует точка перегиба кривой нагружения
Пятипараметрическая модель Муни – Ривлина	$C_{10} = -7,7 \cdot 10^5$ Па, $C_{01} = 9,1 \cdot 10^5$ Па, $C_{20} = -2,7 \cdot 10^5$ Па, $C_{11} = 1,03 \cdot 10^6$ Па, $C_{02} = -5,9 \cdot 10^5$ Па	Модель хорошо описывает экспериментальную кривую нагружения
Девятипараметрическая модель Муни – Ривлина	$C_{10} = -4,8 \cdot 10^6$ Па, $C_{11} = 1,4 \cdot 10^9$ Па, $C_{01} = 5,04 \cdot 10^6$ Па, $C_{12} = 1,5 \cdot 10^7$ Па, $C_{20} = -7,1 \cdot 10^8$ Па, $C_{21} = 9,9 \cdot 10^6$ Па, $C_{02} = -6,9 \cdot 10^8$ Па, $C_{30} = -1,2 \cdot 10^6$ Па, $C_{03} = -4,8 \cdot 10^7$ Па	Модель хорошо описывает экспериментальную кривую нагружения

Продолжение таблицы

Потенциал энергии деформации	Константы, характеризующие свойства материала	Комментарии
Модель неогукса	$\mu = 4,9 \cdot 10^5$ Па	Не подходит для описания данного материала
Полиномиальная модель 1-го порядка	$C_{10} = 6,8 \cdot 10^5$ Па, $C_{01} = -9,6 \cdot 10^5$ Па	Модель не подходит для описания малых деформации материала (в пределах деформации до 50 %); кроме того, отсутствует точка перегиба кривой нагружения
Полиномиальная модель 2-го порядка	$C_{10} = -7,7 \cdot 10^5$ Па, $C_{01} = 9,1 \cdot 10^5$ Па, $C_{20} = -2,7 \cdot 10^5$ Па, $C_{02} = -5,9 \cdot 10^5$ Па, $C_{11} = 1,03 \cdot 10^6$ Па	Модель хорошо описывает экспериментальную кривую нагружения
Полиномиальная модель 3-го порядка	$C_{10} = -3,9 \cdot 10^6$ Па, $C_{01} = 4,1 \cdot 10^6$ Па, $C_{20} = -8,7 \cdot 10^8$ Па, $C_{02} = -8,6 \cdot 10^8$ Па, $C_{30} = 1,3 \cdot 10^6$ Па, $C_{03} = -6,5 \cdot 10^7$ Па, $C_{21} = 1,1 \cdot 10^7$ Па, $C_{12} = 1,9 \cdot 10^8$ Па, $C_{11} = 1,7 \cdot 10^9$ Па	Модель хорошо описывает экспериментальную кривую нагружения
Модель Йо 1-го порядка	$C_{10} = 2,4 \cdot 10^5$ Па	Не подходит для описания данного материала
Модель Йо 2-го порядка	$C_{10} = 8,8 \cdot 10^4$ Па, $C_{20} = 2,4 \cdot 10^4$ Па	Не подходит для описания данного материала
Модель Йо 3-го порядка	$C_{10} = -5,8 \cdot 10^4$ Па, $C_{20} = 8,1 \cdot 10^4$ Па, $C_{30} = -5,9 \cdot 10^3$ Па	Модель достаточно хорошо характеризует поведение материала при больших деформациях, но не подходит для малых деформаций материала (в пределах деформации до 50 %)
Модель Огдена 1-го порядка	$\mu_1 = 8,2 \cdot 10^4$ Па, $\alpha_1 = 4,04$	Не подходит для описания данного материала

Окончание таблицы

Потенциал энергии деформации	Константы, характеризующие свойства материала	Комментарии
Модель Огдена 2-го порядка	$\mu_1 = 66,6$ Па, $\alpha_1 = 10,6$, $\mu_2 = 61,2$ Па, $\alpha_2 = 10,6$	Не подходит для описания данного материала
Модель Огдена 3-го порядка	$\mu_1 = 98,5$ Па, $\alpha_1 = 9,8$, $\mu_2 = 98,5$ Па, $\alpha_2 = 9,8$, $\mu_3 = 98,5$ Па, $\alpha_3 = 9,8$	Не подходит для описания данного материала
Модель Арруда – Бойса	$\mu = 2,3 \cdot 10^5$ Па, $\lambda_L = 1,7$	Не подходит для описания данного материала
Модель Гента	$\mu = 4,9 \cdot 10^5$ Па, $J_m = 6,9 \cdot 10^{25}$	Не подходит для описания данного материала

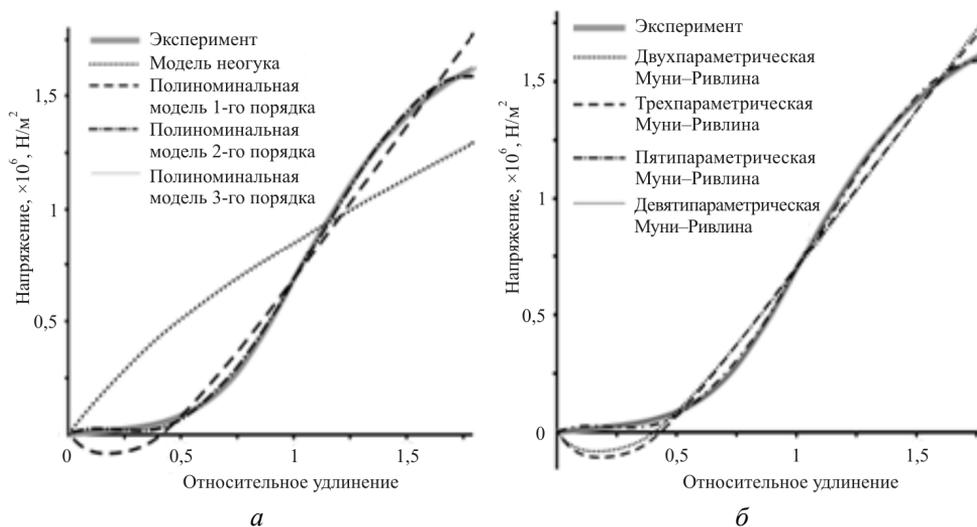


Рис. 2. Сравнение экспериментальной диаграммы растяжения с диаграммами растяжения, полученными при применении модели: а – неогука; б – Муни – Ривлина (см. с. 240)

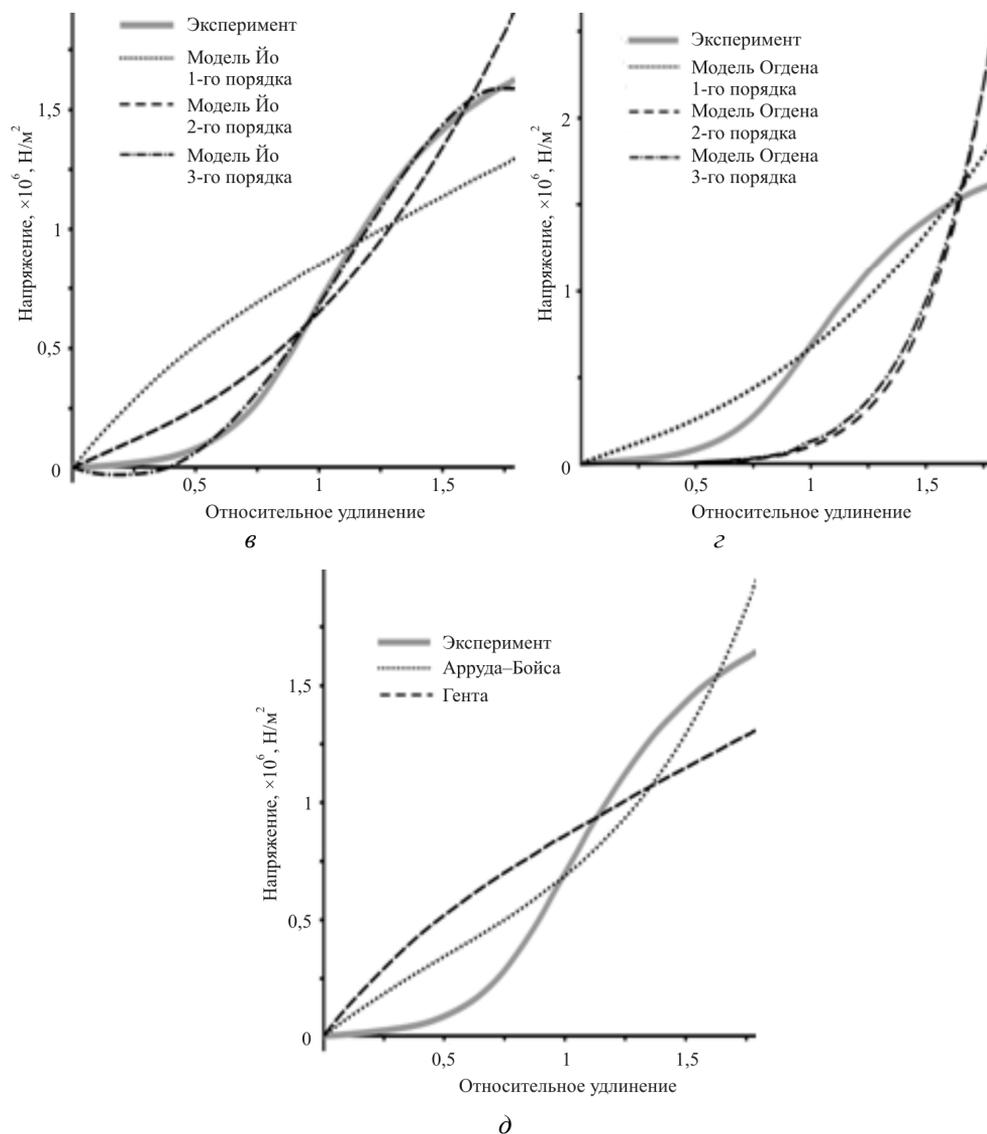


Рис. 2. Окончание: *b* – Йо; *z* – Огдена; *d* – полиномиальной

Выводы. Основная проблема, возникающая при исследовании мягких тканей организма человека, – это выбор гиперупругой модели, которая бы хорошо описывала поведение биоматериала. Для частично или полностью сжимаемых эластомеров можно выбирать между феноменологическими и микромеханическими моделями, основанными на инвариантах деформаций и главных относительных удлинениях (рис. 3).

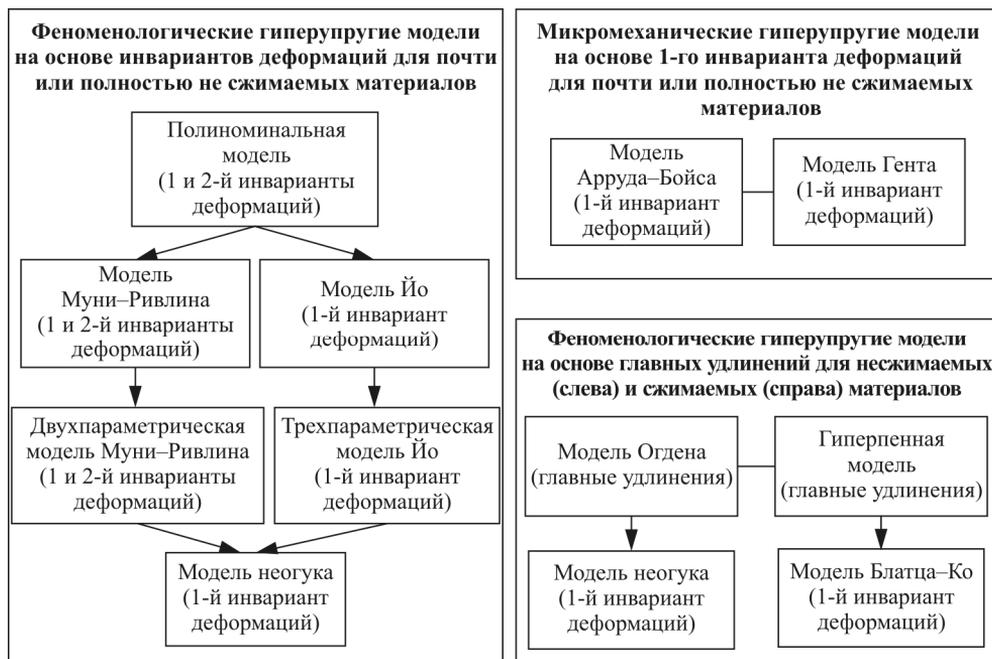


Рис. 3. Классификация моделей

Модель неогук – самая простая модель, ее применяют одной из первых, но она хорошо характеризует поведение материала лишь для малых деформаций (до 30–40 %). Двухкомпонентная модель Муни – Ривлина также широко используется для деформаций до 100 %, хотя не подходит для описания влияния эффектов жесткости. Для деформаций в пределах 200 % удобно использовать пяти- и девятикомпонентные модели Муни – Ривлина. Полиномиальная модель также лучше характеризует случаи больших деформаций. Трехкомпонентная модель Йо хорошо подходит для значений больших удлинений, но не подходит для малых деформаций. Кроме того, необходимые параметры материалов для этой модели довольно сложно получить. Модели Арруда – Бойса и Гента подходят для случаев и малых и больших удлинений, лучше всего использовать их для деформаций в пределах 300 %. Модель Огдена основывается на главных удлинениях и дает очень хорошую аппроксимацию кривой, но требует больших вычислительных ресурсов, применяется для деформаций свыше 700 %. Для сжимаемых вспененных полиуретановых каучуков подходит модель Блатца – Ко. Другие высокосжимаемые эластомерные пены описываются гиперпенной моделью.

Для описания поведения биоматериалов, в частности для артерий, как было рассмотрено для правой позвоночной артерии, лучше всего использовать феноменологическую полиномиальную модель или модель Муни – Ривлина более высокого порядка.

Работа выполнена в рамках гранта «Государственное задание 2017–2019», шифр проекта 19.7286.2017/8.9.

Список литературы

1. Трелоар Л. Физика упругости каучука. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 244 с.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 260 с.
3. Gasser T.C., Ogden R.W., Holzapfel G.A. Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations // *J. R. Soc. Interface.* – 2006. – № 3 (6). – P. 15–35.
4. Gao Z., Lister K., Desai J. P. Constitutive modeling of liver tissue: experiment and theory // *Annals of Biomedical Engineering.* – 2010. – № 38 (2). – P. 505–516.
5. Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models // *Journal of Elasticity and the Physical Science of Solids.* – 2000. – № 61 (1–3). – P. 1–48.
6. Rivlin R.S. Some applications of elasticity theory to rubber engineering // *Collected Papers of R.S. Rivlin.* – 1997. – Vol. 1, 2. – P. 9–16.
7. Yeoh O.H. Some forms of the strain energy function for rubber // *Rubber Chemistry and Technology.* – 1993. – Vol. 66, iss. 5. – P. 754–771.
8. Macosko C.W. *Rheology: principles, measurement and applications* // VCH Publishers, 1994. – 568 p.
9. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1993. – № 41 (2). – P. 389–412.
10. Qi H.J., Boyce M.C. Stress-strain behavior of thermoplastic polyurethane // *Mechanics of Material.* – 2005. – Vol. 37, iss. 8. – P. 817–839.
11. Gent A.N. A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chem. Tech.* – 1996. – № 69. – P. 59–61.
12. Ogden R.W. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids, proceedings of the royal society of london // *Series A. Mathematical and Physical Sciences.* – 1972. – Vol. 326, № 1567. – P. 565–584.
13. Zhi-Qiang Feng, Magnain B., Cros J. Solution of large deformation impact problems with friction between Blatz – Ko hyperelastic bodies // *Int. J. Ing. Sci.* – 2006 – № 44. – P. 113–126.

14. Иванов Д.В. Теоретико-экспериментальное исследование влияния механических факторов на возникновение и патогенез аневризм артерий виллизиевого круга: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.08. – Саратов, 2010. – 24 с.

Получено 15.04.2017

Шмурак Марина Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика и биомеханика», факультет прикладной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, e-mail: shmurak2007@yandex.ru.

Кучумов Алексей Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика и биомеханика», факультет прикладной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, e-mail: kuchymov@inbox.ru.

Воронова Наталья Олеговна – магистрант кафедры «Теоретическая механика и биомеханика», факультет прикладной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, e-mail: voronova.1994@gmail.com.