Ряды Фурье

Опр. 33. Пусть система функций $\varphi_1(x)\ \ \varphi_2(x)\ \ \ldots\ \ \varphi_n(x)$ ортогональна на $[a,\ b]$: $C[a,\ b]$

Ряд вида $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ (32)

где a_i – числа, называется рядом Фурье по ортогональной на $[a,\ b]$ системе функций $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$

Тригонометрические ряды Фурье

Основная тригонометрическая система функций на $[-l\,;\,l\,]$

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots \qquad (32^*)$$

Опр. 34. Ряд Фурье по основной тригонометрической системе функций называется тригонометрическим рядом Фурье.

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\ldots+a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}+\ldots=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (33)$$

Если ряд Фурье (33) сходится к некоторой функции $f(x)$ в каждой ее точке непрерывности, то говорят, что $f(x)$ разлагается в ряд по тригонометрической системе функций.

Очевидно, это разложение единственно.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\ldots+a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}+\ldots$$

Коэффициенты ряда Фурье

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (34)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

Теорема Дирихле.

(*достаточные условия сходимости ряда* (33) *к функции f(x) на отрезке* [*-l;l*])

Пусть на отрезке [*-l;l*] функция *f(x)* удовлетворяет условиям*:*

1) f(x) непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода;

2) f(x) монотонна или имеет конечное число точек экстремумов.

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции *f(x)* сходится во всех точках отрезка *[-l; l*] и его суммой будет функция *S(x)*, определенная на этом отрезке следующим образом:

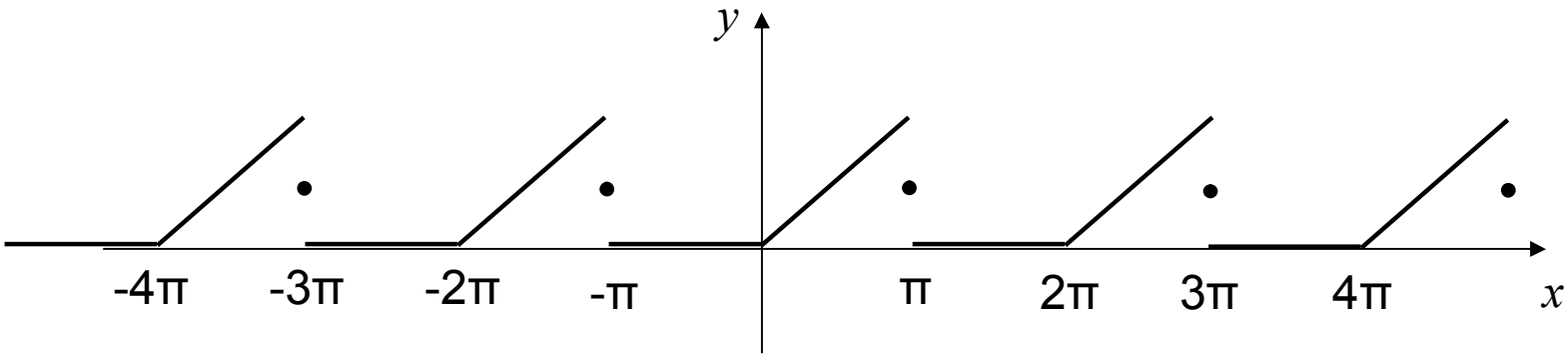
а) *S(x)=f(x)*, если $x \in (-l;\ l)$, и x – точка непрерывности функции *f(x)*;

б) $S(x) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, если $x \in (-l;\ l)$, и x – точка разрыва функции *f(x)*;

в) $S(-l) = S(l) = \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$ на границе.

Причем на любом отрезке не содержащем точек разрыва функции сходимость тригонометрического ряда Фурье будет равномерной.

пример $$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } -\pi \le x \le 0,\\ x, & \text{если } 0 < x \le \pi,\end{cases}$$



Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций
(неполные ряды Фурье)

$f(x)$ – четная => $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad b_n = 0$

Ряд по косинусам: $$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (35)$$

$f(x)$ – нечетная => $a_0 = 0 \quad a_n = 0 \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

Ряд по синусам: $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (36)$$

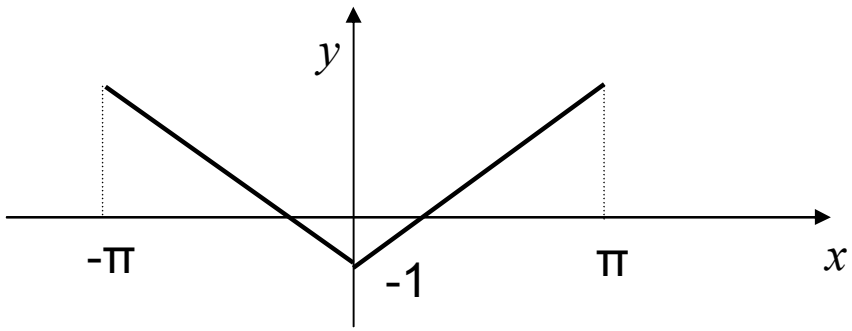
Функция, заданная на полуинтервале $[\,0\,;\,l\,]$

Пусть $f(x)$ – задана на полуинтервале $[\,0\,;\,l\,]$

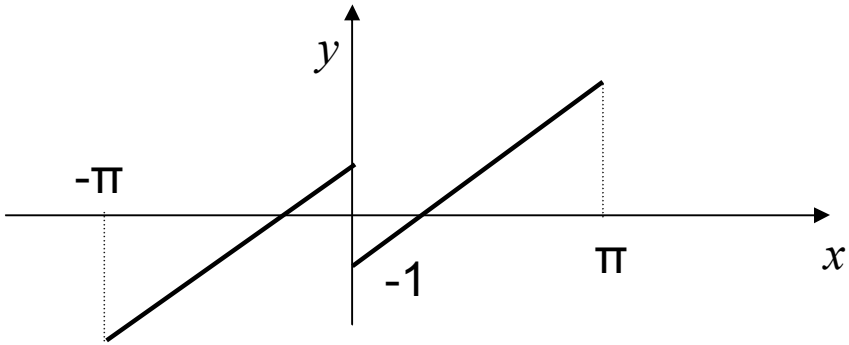
Доопределять $f(x)$ на промежуток $[\,-l\,;\,0]$ можно произвольным образом, но удобнее сделать это четным или нечетным образом.

Так как доопределение произвольно, то ряд Фурье такой функции не единственный

пример: $f(x) = x-1$ задана на $[0, \pi]$



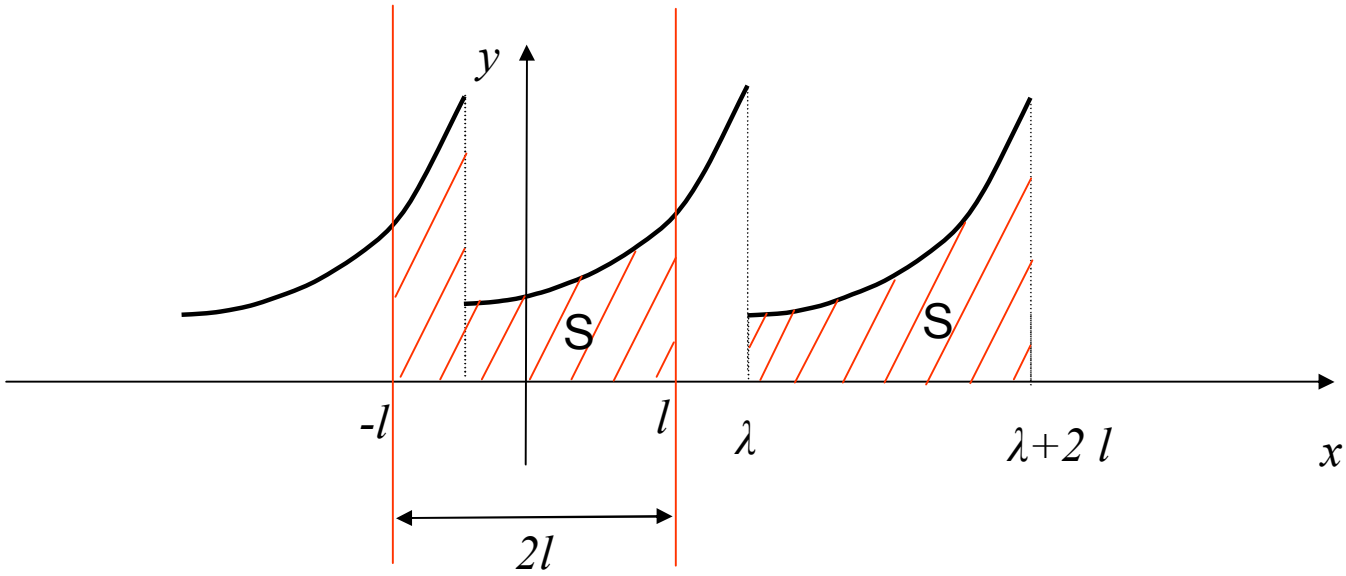
доопределим четным образом



доопределим нечетным образом

Функция, заданная на произвольном промежутке

Пусть задана периодическая функция $f(x)$ с периодом $T = 2l$ на интервале $[\lambda ; \lambda + 2l]$



$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)dx \qquad (37)$$

Вывод. При вычислении коэффициентов Фурье для периодической функции $f(x)$ заданной на интервале $[\lambda; \lambda+2l]$ в силу (37)

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (38)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$