Функциональные ряды

Пусть задана последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ на D

Опр. Выражение

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (*)$$

называется функциональным рядом

Функции $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots f_n(x)$ - члены ряда. $f_n(x)$ – общий член ряда

Если $x = x_0$ - число, то ряд (*) – числовой ряд

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \qquad (**)$$

Опр. Множество значений $x_0 \in X$, для которых числовой ряд (**) сходится называется областью сходимости ряда

Равномерная сходимость

Если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то говорят, что $\{ f_n(x) \}$ сходится к функции $f(x)$.
$f(x)$ – предельная функция.

Введем частичные суммы

$S_1(x) = f_1(x)$

$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$

- - - - - - - - - - -

$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$

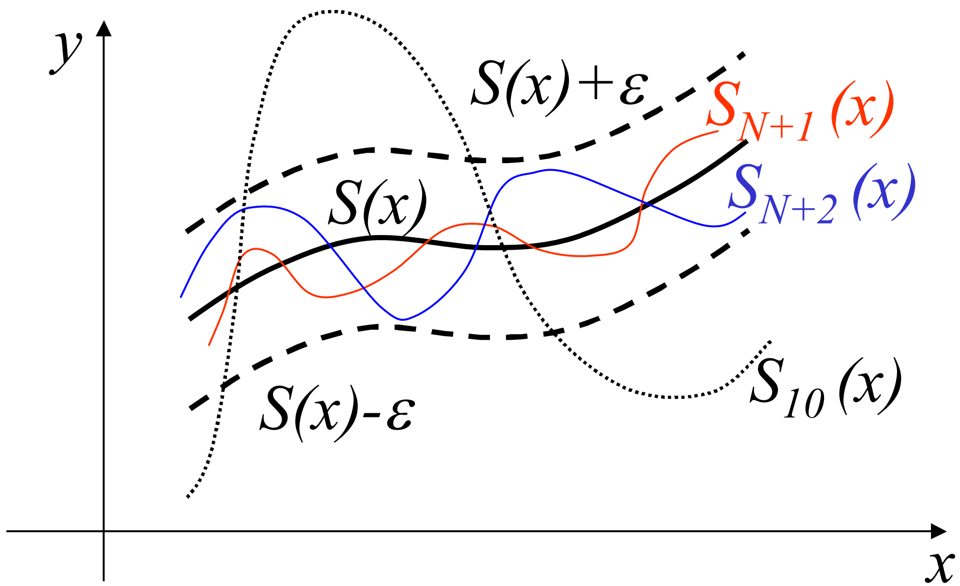
Опр. Суммой ряда $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ называется функция $f(x)$ – предел частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

Опр. (равномерной сходимости)

Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall n > N$ и $\forall x \in D$ выполняется $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ $(|r_n(x)| < \varepsilon)$,

то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится в D равномерно



Опр. 28 Говорят: «ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ мажорируется числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ »

если $|f_n(x)| \leq C_n \,, \ \forall n \in N$ (28)

или: «$\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ служит мажорантным рядом для $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ »

Теорема 22. (Признак Вейерштрасса о равномерной сходимости)

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ мажорируется на D сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$

то он сходится на D равномерно

Свойства равномерно сходящихся рядов

Пусть функции $f_n(x)$ определены и непрерывны на $[a,b]$

1. Если $\sum f_n(x)$ сходится на промежутке $D \subset \mathbb{R}$ равномерно и $\varphi(x)$ – ограничена на D, то ряд $\sum \varphi(x) f_n(x)$ тоже сходится на D равномерно.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то и его сумма $f(x)$ непрерывна на этом отрезке.

3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то интеграл в пределах от α до β $(\alpha, \beta \in [a,b])$ от суммы ряда $f(x)$ равен сумме интегралов от членов данного ряда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx$$

Замечание: Говорят «ряд можно почленно интегрировать»

Пусть функции $f_{\mathrm{n}}(x)$ имеют на $[a,b]$ непрерывные производные

3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то и сумма ряда $f(x)$ имеет на $[a,b]$ производную, причем $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

Замечание: Говорят «ряд можно почленно дифференцировать»

Степенные ряды

Опр. 29. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_n x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad (29)$$

a_0, a_1, a_2, ... a_n – постоянные, называются коэффициенты ряда.

Теорема 23. (Абеля об области сходимости)

1) Если степенной ряд сходится при некотором значении $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всяком x, для которого $|x| < |x_0|$.
2) Если степенной ряд расходится при некотором значении x'_0, то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x'_0|$.

Следствие. Областью сходимости степенного ряда является интервал с центром в начале координат

Опр. 30. Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал $(-R,R)$ такой, что $\forall x \in (-R,R)$ ряд сходится и притом абсолютно, а для точек вне этого интервала ряд расходится.

Число R называется <u>радиусом сходимости</u>.

Свойства степенных рядов

1. Степенной ряд равномерно сходится на любом отрезке $[a,b]$, лежащем внутри его интервала сходимости

2. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости.

Замечание. Сумма остается непрерывной в конце интервала, если он входит в область сходимости.

3. Степенные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(x-x_0)^n\right)'$ имеют один и тот же радиус сходимости.

Замечание. Ряды имеют один и тот же радиус сходимости, но область сходимости может не совпадать.

Следствие. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(x-x_0)^n\right)';\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(x-x_0)^n\right)'';\ldots;\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(x-x_0)^n\right)^{(n)}$$

будут иметь один и тот же радиус сходимости

4. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости любое число раз.

5. Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому промежутку, принадлежащему интервалу сходимости любое число раз.

Разложение функции в степенной ряд

Опр. 31. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (30)$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$ или рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0

В частности, если $x_0 = 0$, то ряд называется рядом Маклорена

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n = f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\ldots \quad (31)$$

Теорема 24. (необходимый признак сходимости функции к ряду Тейлора)
Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x = x_0$ является суммой степенного ряда по степеням $(x - x_0)$, то этот ряд является ее рядом Тейлора.

Следствие. Не может быть двух различных рядов по степеням $(x - x_0)$, сходящихся к одной и той же функции $f(x)$.

n-ая частичная сумма ряда Тейлора

$$S_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Опр. 32. Разность $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ называют остаточным членом ряда

Тогда ряд Тейлора: $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$

Остаточный член $R_n(x)$ в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

точка ξ находится между x и x_0

Очевидно $f(x) = S_n(x)$, если $R_n(x) \to 0$:

Теорема 25 (*признак сходимости ряда Тейлора к порождающей его функции.* достаточный)

Пусть функция $f(x)$ и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0 - h;\ x_0 + h)$, т.е. $\exists\ M > 0$, $\forall x \in (x_0 - h;\ x_0 + h)$ и всех $n = 0, 1, \ldots$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| \le M$. Тогда на интервале $(x_0 - h;\ x_0 + h)$ функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n \qquad |x - x_0| < h$$

Стандартные разложения Маклорена

Область сходимости

уметь получать

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (-\infty, \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n} + \ldots \qquad (-1, 1]$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (-\infty, \infty)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots \qquad (-1, 1)$$

$$sh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \qquad (-\infty, \infty)$$

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad (-\infty, \infty)$$