

Числовые и функциональные ряды

ОПР 19. Пусть дана последовательность чисел $u_1, u_2 \dots u_n$.

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (25)$$

называется числовым рядом.

Числа $u_1, u_2, \dots u_n$ называются членами ряда.

u_n – общий член ряда

ОПР 20. Составим из (25) новые последовательности

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

(26)

Числа S_1, S_2, S_3 называются частичными суммами ряда (25).

S_n – n -ая частичная сумма

ОПР 21. (сходимость и расходимость ряда)

Ряд (25) называется сходящимся, если сходится последовательность $\{ S_n \}$ частичных сумм, т. е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда.

Если предел последовательности частичных сумм не существует или равен ∞ , то ряд (25) называется расходящимся. Такой ряд суммы не имеет.

Теорема 11. (Необходимый признак сходимости ряда).

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Следствие из Т11. (Достаточный признак расходимости ряда).

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ или $\nexists$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Свойства сходящихся рядов.

Теорема 12.

Умножение членов сходящегося ряда на любое число α не нарушает его сходимости.

Теорема 13.

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и имеют суммы S_1 и S_2 соответственно, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ и его сумма равна $S_1 \pm S_2$.

ОПР 22. Ряд $u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_{m+n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m+n} = r_m$
полученный из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ отбрасыванием первых m членов называется
 m -ым остатком ряда

Теорема 14.

Отбрасывание от ряда или присоединение к ряду любого конечного числа начальных членов не меняет его сходимости или расходимости.

Следствие из Т. 14

При исследовании ряда на сходимость можно игнорировать конечное число его членов

ОПР 23. Ряд, все члены которого не отрицательные числа, называется рядом с неотрицательными членами или знакоположительным рядом

Достаточные признаки сходимости ряда с неотрицательными членами

Теорема 15. (критерий сходимости)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм S_n ограничена сверху $S_n \leq M$.

Теорема 16. (1-ый признак сравнения)

Даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами причем $a_n < b_n$

Тогда

а) из сходимости ряда $\sum b_n$ следует сходимость ряда $\sum a_n$

б) из расходимости ряда $\sum a_n$ следует расходимость ряда $\sum b_n$

Теорема 17 (предельный признак сравнения)

Даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ($a_n \geq 0, b_n \geq 0$)

а) если $\exists$ конечный и неравный нулю предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, то оба ряда ведут себя одинаково в смысле сходимости

б) если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то из сходимости $\sum b_n$ следует сходимость $\sum a_n$

Теорема 18 (признак Даламбера)

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \geq 0$). Если $\exists$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то

- а) при $l < 1$ ряд сходится
- б) при $l > 1$ ряд расходится
- в) при $l = 1$ вопрос о сходимости не решается (использовать признак сравнения)

Теорема 19 (радикальный признак Коши)

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \geq 0$). Если $\exists$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то

- а) при $l < 1$ ряд сходится
- б) при $l > 1$ ряд расходится
- в) при $l = 1$ вопрос о сходимости не решается (использовать признак сравнения)

Теорема 20 (интегральный признак Коши)

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \geq 0$), пусть дана функция $f(x)$ такая, что $f(1)=u_1, f(2)=u_2, \dots, f(n)=u_n$ и пусть $f(x)$ монотонно убывает на $(1, +\infty)$.

Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ и расходится, если этот интеграл расходится

$$f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(n) = S_n - u_1$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n-1) = S_n - u_n$$

