Линейные неоднородные ДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = f(x)$$

или $\boldsymbol{L[\,y\,] = f(x)}$ **(17)**

где $f(x)$ и $b_i(x)$ **заданные непрерывные на** (a, b) **функции**

Свойства решений ЛНДУ

Теорема 9. (о структуре общего решения)

Общее решение на отрезке (a,b) **уравнения (17) равно сумме общего решения** $y_{oo} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ **соответствующего ЛОДУ** $L[\,y\,] = 0$ **и какого-либо частного решения** $\hat{y}$ **неоднородного уравнения (19)**

Теорема 10. Если y_i **- решение уравнения** $L[\,y\,] = f_i(x)$ $i = \overline{1,k}$ **,**

то $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ **– решение уравнения** $L[y] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)$

свойство называется <u>принцип суперпозиции</u> – наложении решений

Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} y' + b_n y = f(x) \quad \text{или} \quad L[y] = f(x)$$

Метод неопределенных коэффициентов для ЛНДУ со специальной правой частью

Общее решение $y = y_{oo} + \hat{y}$

y_{oo} – по таблице 1

$\hat{y}$ – по таблица 2

Вид $f(x)$	$e^{\alpha x}[P_s(x)\cos\beta x + Q_t(x)\sin\beta x]$
Вид $\hat{y}$	*Если корень характеристического уравнения ЛОДУ* $k \neq \alpha + i\beta$ $\hat{y} = e^{\alpha x}[R_q(x)\cos\beta x + T_q(x)\sin\beta x]$, $q = \max(s,t)$
Вид $\hat{y}$	*Если* k *- корень кратности* γ *и* $k = \alpha + i\beta$ $\hat{y} = x^{\gamma} e^{\alpha x}[R_q(x)\cos\beta x + T_q(x)\sin\beta x]$, $q = \max(s,t)$

Метод вариации произвольной постоянной
(Метод Лагранжа)

Для любого вида правой части ***f(x)*** **ЛНДУ**

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = f(x)$$

$$y_{oo} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$$ **Пусть** $C_i = C_i(x)$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \text{----------} \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_i(x) = \varphi_i(x) + \check{C}_i$$

(22)

Общее решение $$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + \tilde{C}_i\right) y_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) y_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i y_i$$