НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

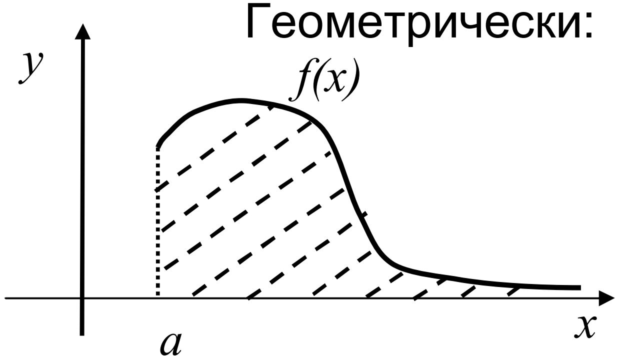
Несобственный интеграл I рода

Опр. 3. Пусть ф. $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$ $(-\infty<a<b\leq\infty)$.

Если при $b\to\infty$ $\exists$ предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то $f(x)$ называется интегрируемой в несобственном смысле.

Предел наз. *несобственным интегралом I рода*.

Геометрически:



$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (13)$$

Опр. 3*. $$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} const & -\text{сходится} \\ \infty \vee \nexists & -\text{расходится} \end{cases} \qquad (13^*)$$

Опр. 3**.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^{\infty} f(x)dx =$$

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} const & -\text{сходится} \\ \infty \vee \nexists & -\text{расходится} \end{cases}$$

Теорема 9. (Признак сравнения)

Пусть функции $f(x)$ **и** $g(x)$ **неотрицательны на** $[a, \infty)$ **и** $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a, \infty)$. **Тогда**

а) если $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ **– сходится, то** $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ **тоже сходится.**

б) если $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ **– расходится, то** $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ **тоже расходится.**

Теорема 10. (Предельный признак сравнения)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на $[a,\infty)$,

$g(x) \neq 0 \ \ \forall x \in [a, \infty)$ **и** $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$ **. Тогда**

а) если $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ **сходится и** $0 \leq k < \infty$, **то** $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ **тоже сходится.**

б) если $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ **расходится и** $0 < k \leq \infty$, **то** $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ **тоже расходится**

в) если $f(x) \sim g(x)$ **при** $x\to\infty$, **то** $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ **и** $\int\limits_a^\infty f(x)dx$

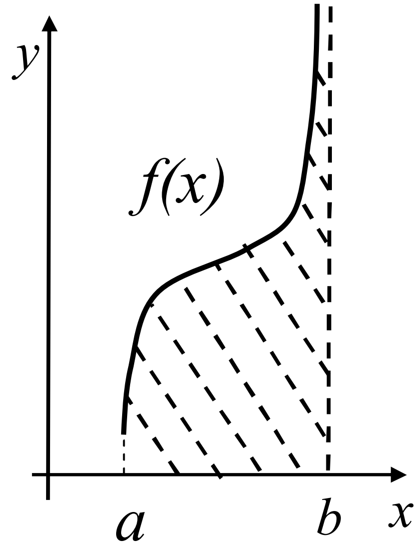
ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Несобственный интеграл II рода

Опр. 4. Пусть ф. $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$ и имеет точку разрыва $x_0=b$. Тогда предел

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (14)$$

Геометрически:



называется *несобственным интегралом II рода.*
Интеграл сходится, если предел $\exists$,
и расходится, если предел бесконечен или $\nexists$

Опр. 4*. $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mu\to 0}\int_{a+\mu}^{b} f(x)dx \qquad (14^*)$$

Опр. 4**. $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mu\to 0}\int_{a+\mu}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

и сходится, если существуют оба предела.

Теорема 11. (Признак сравнения)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на $[a, b]$, терпят разрыв в точке $x_0=b$ и $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Тогда

а) если $\int_a^b g(x)dx$ **– сходится, то** $\int_a^b f(x)dx$ **тоже сходится.**

б) если $\int_a^b f(x)dx$ **– расходится, то** $\int_a^b g(x)dx$ **тоже расходится.**

Теорема 12. (Предельный признак сравнения)

СФОРМУЛИРОВАТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО!

Опр. 5.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ **I или II рода называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл от модуля функции**

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Теорема 13. (признак абсолютной сходимости)

Если интеграл сходится абсолютно, то он и просто сходится.