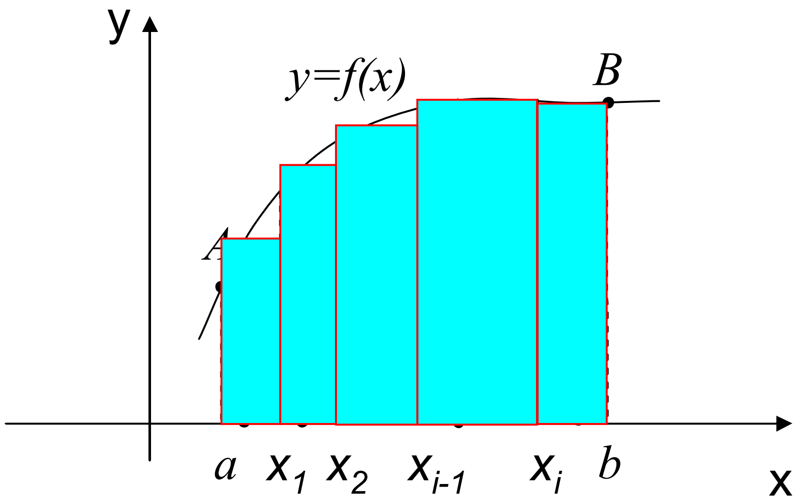
Задача о площади криволинейной трапеции



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Эта сумма выражает площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, и приближенно заменяет криволинейную трапецию.

Площадью криволинейной трапеции является $S = \lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

Определение определенного интеграла

Пусть функция $y=f(x)$ определена на $[a, b]$.

1). Разобьем $[a, b]$ на n частей точками $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n-1}$.

Множество $T=\{a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n=b\}$ называется <u>разбиением</u> на отрезке $[a, b]$, каждый отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ называется <u>элементарным</u>, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – их длина.

2) На каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем точку ξ_k произвольно!!! ($\xi_k \in \Delta x_k$).

3) Вычислим $f(\xi_k) \in \xi_k$.

4) Составим произведение $f(\xi_k)\,\Delta x_k$, $k=\overline{1,n}$

5) Запишем интегральную сумму $\sigma(T,\xi)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ – <u>интегральная сумма Римана</u>

6) Перейдем к пределу так, что $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$

Определенным интегралом или интегралом Римана на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы при $n\to\infty$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sigma(T,\xi) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Теорема 1. Необходимый признак интегрируемости

Если функция $y=f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Следствие: если функция не ограничена на отрезке $[a, b]$, то она не интегрируема на $[a, b]$.

Пример. Доказать, что функция Дирихле не интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Функция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in Q \ (\textit{множеству рациональных чисел}) \\ 0\,, & x \in J \ (\textit{множеству иррациональных чисел}) \end{cases}$

Основные свойства определенного интеграла.

1. $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. $$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

4. $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

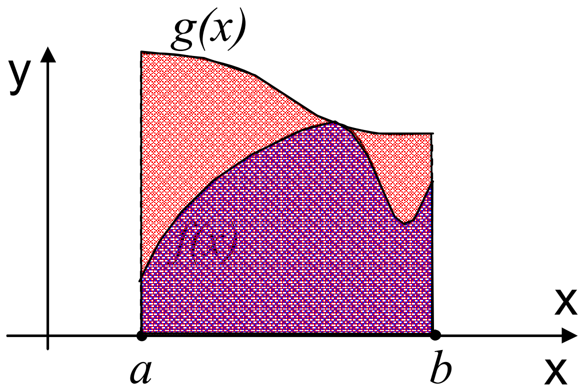
5. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ каково бы ни было расположение точек a,b,c.

6. Если функция $y=f(x)$ интегрируема и неотрицательна на $[a, b]$ и $a<b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

7. Если две функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $a<b$ и $f(x) \leq g(x)$ для любого $x \in [a, b]$, то

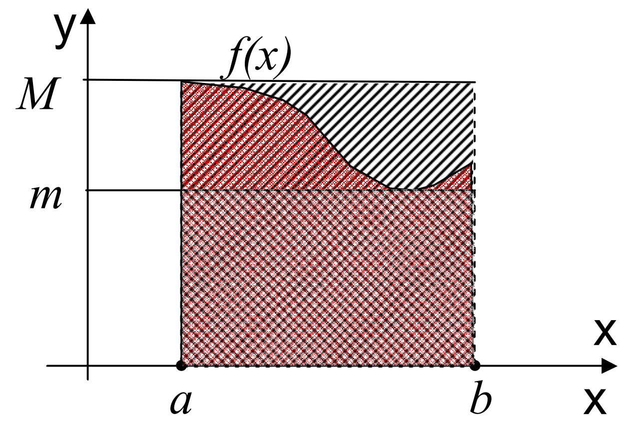
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$



8. $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

9. Если функции $y=f(x)$ непрерывна на $[a,\ b]$, $a<b$ и $\forall\ x\in[a,\ b]$ выполняется $m \le f(x) \le M$, то

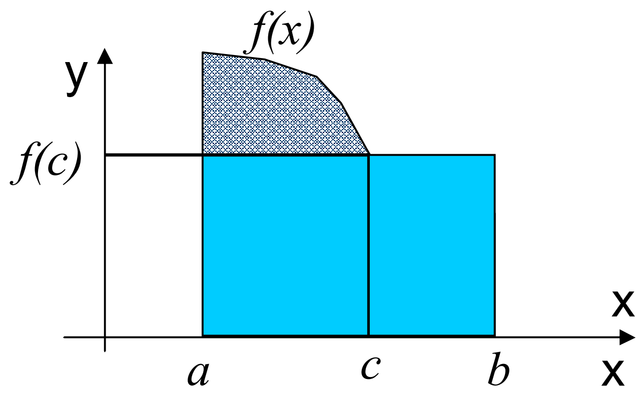
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$



10. Теорема о среднем

Пусть функция $y=f(x)$ интегрируема на $[a,\ b]$ и $\forall x\in[a,\ b]$ выполняется $m \le f(x) \le M$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$



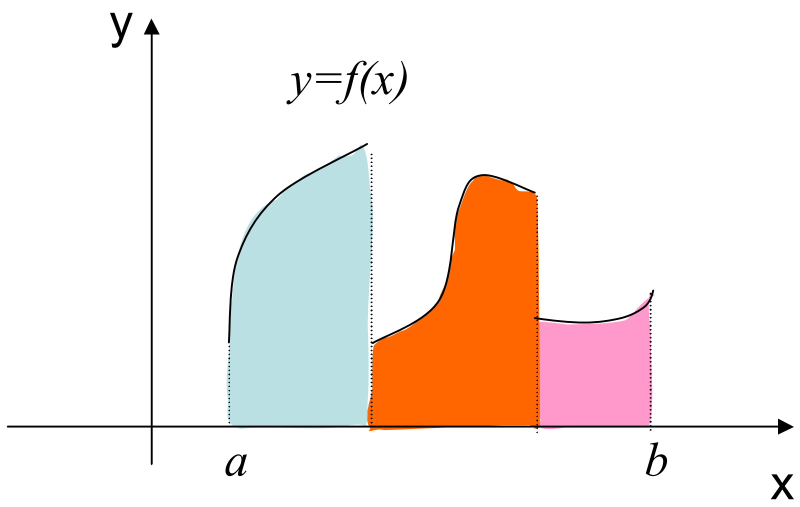
Геометрически: при некотором значении $c \in [a,\ b]$ $f(c) = \mu$. Площадь под кривой $f(x) \ge 0$ – площадь криволинейной трапеции – равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной среднему значению функции на этом отрезке. ***$f(c) = \mu$ – среднее значение функции.***

Достаточные условия интегрируемости (классы интегрируемых функций)

Теорема 2. Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$.

Теорема 3. Если функция $y=f(x)$ монотонна и ограничена на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$.

Теорема 4. Если функция $y=f(x)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$.



Определенный интеграл с переменным верхним пределом.

Опр. 2. **Пусть функция $y=f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ тогда она интегрируема на любом отрезке $[a, x]$, где $a \leq x \leq b$ и имеет смысл интеграл**

$$\int_a^x f(t)dt = J(x) \qquad (2)$$

$J(x)$ определена на $[a, b]$ и называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема 5. **Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Определенный интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной на $[a, b]$ функции $y=f(x)$ является первообразной для подынтегральной функции $f(x)$**

то есть $$J'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b] \qquad (3)$$

(Или функция $J(x) = \int_a^x f(t)dt$ имеет производную $\forall x \in [a,b]$ причем $J'(x) = f(x)$)

Следствие

Теорема 5*.

Всякая непрерывная функция имеет непрерывную первообразную

Теорема 6. **(Ньютона-Лебница)** **Если $F(x)$ - какая-либо первообразная от непрерывной функции $y=f(x)$, то справедлива формула**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (4)$$

$\Big|_a^b$ **- знак подстановки. Читают $F(x)$ от a до b.**

Замечание. **Формула Ньютона-Лейбница справедлива и для кусочно-непрерывных функций.**

Методы вычисления определенного интеграл

- **Табличное**
- **Интегрирование по частям** $\int_a^b U dV = UV\Big|_a^b - \int_a^b V dU$
- **Интегрирование методом подстановки**

Теорема 7. **Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дан интеграл**

$$\int_a^b f(x)dx$$

Введем новую переменную t по формуле $x = \varphi(t)$

Если 1) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ **непрерывны на $[\alpha, \beta]$**

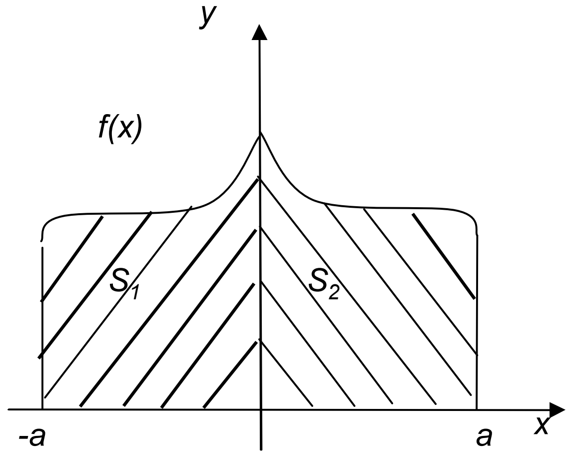
3) $f[\varphi(t)]$ **определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$ то**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)d\,t$$

Интегралы по симметричному промежутку от четной и нечетной функции.

Теорема 7. Пусть $y=f(x)$ непрерывная четная на $[-a, a]$ функция, тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$



Теорема 8. Пусть $y=f(x)$ непрерывная нечетная на $[-a, a]$ функция, тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$