

Интегрирование тригонометрических выражений

Будем использовать запись интеграла от тригонометрических выражений

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

это означает, что над синусом и косинусом проведены только рациональные операции (+, −, ·, ÷, ^).

I. $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная функция .

1. Универсальная подстановка: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \cdot \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. Подстановки

a) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ Подстановка: $t = \cos x$

b) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ Подстановка: $t = \sin x$

c) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ $R(\operatorname{tg} x)$ Подстановка: $t = \operatorname{tg} x$

d) $R(\operatorname{ctg} x)$ Подстановка: $t = \operatorname{ctg} x$

II. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где n и m – целые.

1. Если n и m – четные, положительные, то применяются формулы

понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

2. Если n или m – нечетное, то непосредственно отделяют от нечетной степени один множитель.

3. Если n и m – дробные или целые отрицательные и $(n + m)$ четное отрицательное, то замена $t = \operatorname{tg} x$, или $t = \operatorname{ctg} x$.

III. Вид интеграла

формула

1. $\int \sin kx \cos lxdx$

$$\sin kx \cos lx = \frac{1}{2}(\sin(k-l)x + \sin(k+l)x)$$

2. $\int \cos kx \cos lxdx$

$$\cos kx \cos lx = \frac{1}{2}(\cos(k-l)x + \cos(k+l)x)$$

3. $\int \sin kx \sin lxdx$

$$\sin kx \sin lx = \frac{1}{2}(\cos(k-l)x - \cos(k+l)x)$$

Интегрирование иррациональных выражений

$$1. \int R(x, \sqrt{x^2 + px + q}) dx$$

Рекомендуемая подстановка:

$$2. \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

$$x = a \cdot \sin t \quad dx = a \cdot \cos t \, dt$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t \quad dx = \frac{a \, dt}{\cos^2 t}$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

$$x = a \cdot \sec t = \frac{a}{\cos t} \quad dx = a \frac{\sin t \, dt}{\cos^2 t}$$

$$3. \int R(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \dots) dx$$

$$x = t^s$$

$\alpha, \beta, \gamma \dots$ — дробные рац. числа, s — наименьшее общее кратное α, β, γ

$$4. \int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\beta, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\gamma, \dots) dx \quad \frac{ax+b}{cx+d} = t^s$$

$\alpha, \beta, \gamma \dots$ — дробные рац. числа, s — наименьшее общее кратное α, β, γ

Дифференциальный бином

ОПР. 6 Выражение вида $x^m (a + bx^n)^p$, где $(m, n, p, a, b) - \text{const}$, называется дифференциальным биномом.

Теорема 5. (Чебышева)

Интегралы $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ ($m, n, p \in \mathbb{Q}$) выражаются в конечном виде через элементарные функции, если оказывается целым одно из чисел:

1) p

подстановка $x = t^s$
(s – наименьшее общее кратное m и n)

2) $\frac{m+1}{n}$

Подстановка $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель p

3) $\frac{m+1}{n} + p$

Подстановка $\frac{a + bx^n}{x^n} = t^s$, где s – знаменатель p