

Интегрирование по частям

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ две дифференцируемые функции

Тогда $\int U dV = UV - \int V dU$

I.

II.

III. (циклический)

$$\int p_n(x) a^x dx$$

$$\int p_n(x) \cos x dx$$

$$\int p_n(x) \sin x dx$$

$$\underbrace{\int p_n(x) e^x dx}_{U \quad dV}$$

$$\int \ln x \cdot P_n(x) dx$$

$$\int \operatorname{arctg} x \cdot P_n(x) dx$$

$$\underbrace{\int \arcsin x \cdot P_n(x) dx}_{U \quad dV}$$

$$\int a^{mx} \cos nx dx$$

$$\underbrace{\int a^{mx} \sin nx dx}_{U=a^{mx}}$$

$$U=a^{mx}$$

$$U=\sin(nx)$$

4. Интегрирование рациональных дробей

ОПР. 3

Рациональной дробью (дробно-рациональной функцией) называется частное от деления двух целых рациональных функций

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$$

Если $n < m$, то дробь правильная

Теорема. Всякий многочлен n -ой степени разлагается на n линейных множителей и множитель – коэффициент при x^n .

Теорема. Многочлен P_n не может иметь более чем n различных корней. Если корни повторяются, то их объединяют и говорят, что $x=x_i$ – корень кратности k .

Теорема. Если среди корней есть мнимые, то они обязательно сопряженные и множитель, за счет которого образуются мнимые корни, можно оставлять в виде квадратного трехчлена x^2+px+q – многочлен 2-ой степени.

Таким образом, для любого $P(x)$ можно записать:

$$P(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}$$

ОПР. 4

Простейшими (элементарными) дробями называются дроби следующего вида

$$\frac{A}{x - x_1}$$

$$\frac{A}{(x - x_1)^m}$$

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$$

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m}$$

ТЕОРЕМА 4.

Всякая правильная рациональная дробь $\frac{Q(x)}{P(x)}$ может быть представлена и притом единственным образом, в виде суммы конечного числа элементарных дробей, вид которых определяется разложением на множители знаменателя $P(x)$.

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} = & \left[\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} \right] + \left[\frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} \right] + \dots + \\ & + \left[\frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{m_1}x + N_{m_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} \right] + \dots + \\ & + \left[\frac{F_1x + G_1}{x^2 + p_sx + q_s} + \frac{F_2x + G_2}{(x^2 + p_sx + q_s)^2} + \dots + \frac{F_{m_s}x + G_{m_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}} \right] \end{aligned}$$

$A_1, A_2, \dots, A_{k_1}, B_1, B_2, \dots, B_{k_2}, M_1, \dots, M_{m_1}, N_1, \dots, G_{m_s}$ - неопределенные коэффициенты

Порядок действий при вычислении интеграла от рационального выражения

1. Выделить целую часть (сделать дробь $Q(x)/P(x)$ правильной)
2. Разложить знаменатель на множители.
3. Записать дробь в виде суммы простейших дробей.
4. Определить коэффициенты
5. Проинтегрировать

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен

$$ax^2 + bx + c$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$\int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Замена:

$$t = x + \frac{b}{2a}$$

$$x = t - \frac{b}{2a}$$

$$dx = dt$$

$$ax^2 + bx + c = a \left(t^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$