ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. Шипачев В.С. **Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1985. – 368 с.**

2. Пискунов Н.С. **Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1, 2. – М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 1998.**

3. Кудрявцев Л.Д. **Краткий курс математического анализа. Т. 1, 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.**

4. Берман Г.Н. **Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1975.**

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

5. Герасимович А.И., Рысюк Н.А. **Математический анализ. Справочное пособие. Ч.1. – Минск: Вышэйшая школа, 1989.**

6. Герасимович А.И., Кеда Н.П., Сугак М.Б. **Математический анализ. Справочное пособие. Ч.2. – Минск: Вышэйшая школа, 1990.**

7. Марон И.А. **Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. – М.: Наука, 1973.**

8. Запорожец Г.И. **Руководство к решению задач по математическому анализу. – Минск: Высшая школа А, 2008.**

9. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. **Математический анализ в примерах и задачах. Т. 1,2 – Издательское объединение «Вища школа», 1977.**

Неопределенный интеграл

Пусть $X \subset \mathrm{R}$.

Определение. **Функция $F(x)$, $x \in X$ называется первообразной для функции $y = f(x)$ на множестве X если она дифференцируема в каждой точке этого множества и $F'(x)=f(x)$.**

Теорема. **Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y=f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.**

Теорема. **Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$ на множестве X, то они отличаются друг от друга постоянным слагаемым, т.е.**

$$F_2(x) = F_1(x) + C, \text{ где } C \text{ – константа.}$$

Определение. **Совокупность *F*(*x*) + *C* всех первообраных функции *y* = *f*(*x*) на множестве *X* называется *неопределенным интегралом функции y* = *f*(*x*).**

Обозначение.

$$\int f(x)dx$$

- **при этом *f*(*x*) называют *подынтегральная функция*,**
- ***f*(*x*) *dx* – *подынтегральное выражение*,**
- **а – *знак интеграла*.**

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой однопараметрическое семейство кривых *y* = *F*(*x*) + *C* (*C* – параметр), обладающих следующим свойством: все касательные к кривой в точках с абсциссой $x = x_0$ параллельны между собой.

Основные свойства

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$, $\int f'(x)dx = f(x) + C$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. **Интеграл от алгебраической суммы функций равен, алгебраической сумме их интегралов, т. е.**

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

5. **Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е.**

$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$, **где c – const.**

6. **Если** $\int f(x)dx = F(x) + C$ **и $x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция, то** $\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$.

Таблица интегралов

1. $\int 0\cdot dx = C$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$, $\quad \int dx = x + C$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $\quad \int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$

10. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C \end{cases}$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + C \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + C \end{cases}$

13. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

15. $\int \operatorname{tg} x\ dx = -\ln|\cos x| + C$

16. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

17. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$

18. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

19. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

20. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

21. $\int \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$

22. $\int \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$

Таблица дифференциалов

Во всех формулах этой таблицы в качестве *u* можно брать произвольную дифференцируемую функцию $u = \varphi(x)$.

1. $d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n du$, $xdx = \frac{1}{2}dx^2$	**7.** $d(tgu) = \frac{du}{\cos^2 u}$
2. $d(\ln u) = \frac{du}{u}$	**8.** $d(ctgu) = -\frac{du}{\sin^2 u}$
3. $d(e^u) = e^u du$	**9.** $d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
4. $d\left(\frac{a^u}{\ln a}\right) = a^u du$	**10.** $d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
5. $d(\sin u) = \cos u du$	**11.** $d(arctgu) = \frac{du}{1+u^2}$
6. $d(\cos u) = -\sin u du$	**12.** $d(arcctgu) = -\frac{du}{1+u^2}$

Методы интегрирования

I. Непосредственное интегрирование – **интегрирование с помощью свойств, тождественных преобразований подынтегральной функции и таблицы основных интегралов.**

II. Интегрирование по частям. Теорема. **Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке и на этом промежутке существует интеграл $\int vdu$, то на нем существует и интеграл $\int udv$, причем**

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

III. Замена переменной. Теорема. **Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T и $\varphi : T \to X$. Тогда если на множестве X функция $y = f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то на множестве T справедлива формула**

$$\boxed{\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$$

«Неберушиеся интегралы»

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{P_n(x)}\right)dx$ **, где $P_n(x)$ – многочлен степени выше второй, в общем случае не выражается через элементарные функции. При этом если n = 3 или n = 4, то они называются эллиптическими, n > 4, то ультра-эллиптическими.**

Интегралы от трансцендентных функций:

1. $\int e^{-x^2}dx$ **– интеграл Пуассона;**

2. $\int \frac{\sin x}{x}dx$ **,** $\int \frac{\cos x}{x}dx$ **– интегральный синус, косинус;**

3. $\int \frac{1}{\ln x}dx$ **,** $\left(\int \frac{e^x}{x}dx\right)$ **– интегральный логарифм;**

4. $\int \sin x^2 dx$ **,** $\int \cos x^2 dx$ **– интегралы Френеля и др.**