Наименьшее и наибольшее значения функции двух переменных

Функция, ограниченная и дифференцируемая в замкнутой области, достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значений

или во внутренних точках этой области, которые являются стационарными точками функции, или на её границе.

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, необходимо:

1) Найти стационарные точки функции

Для этого решаем систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$

2) Найти значения функции в стационарных точках, находящихся в области

3) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на каждой линии, ограничивающей область

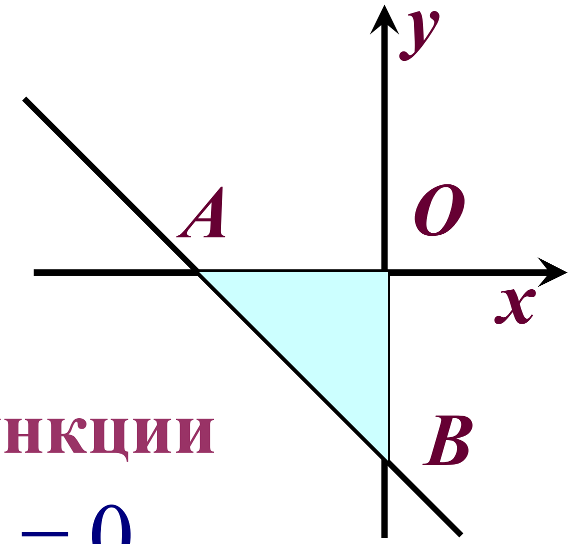
4) Сравнить все полученные значения …

ПРИМЕР 1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$$

в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + y + 5 = 0$



РЕШЕНИЕ

построим область

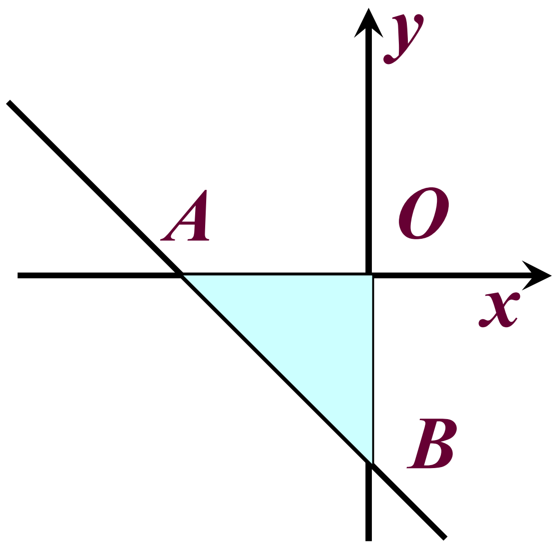
1) Находим стационарные точки функции

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x - y + 3 \\ z'_y &= -x + 4y + 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

ПРИМЕР 1 $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$

РЕШЕНИЕ

область



$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ -x + 4(2x + 3) + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

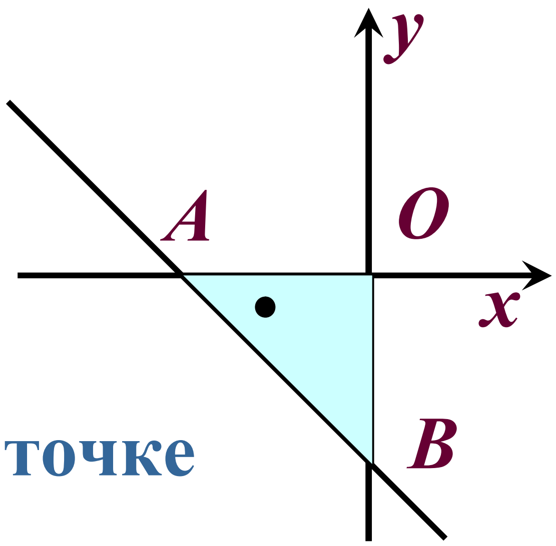
$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ -x + 8x + 12 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 7x + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

ПРИМЕР 1 $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$

РЕШЕНИЕ

область



$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(-2; -1)}$$

стационарная точка

Значение функции в стационарной точке

$$z(-2;-1) = (-2)^2 - (-2)(-1) + 2(-1)^2 + 3(-2) + 2(-1) + 1 =$$

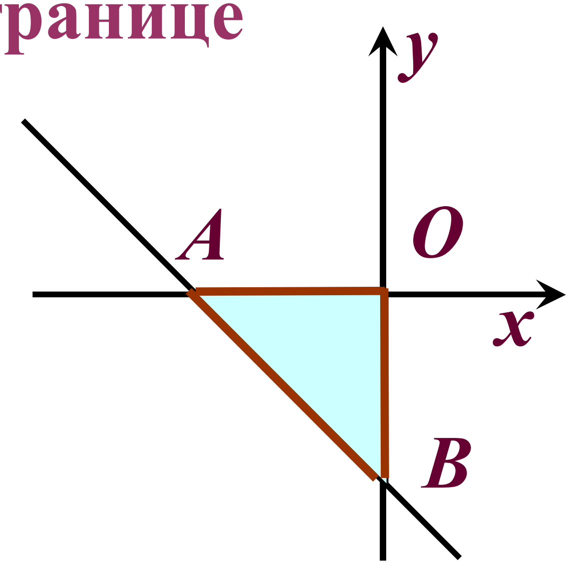
$$= 4 - 2 + 2 - 6 - 2 + 1 = -3$$

ПРИМЕР 1 $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$

РЕШЕНИЕ

область

Исследуем поведение функции на границе



граница состоит из:

отрезка оси *Ox*

отрезка оси *Oy*

отрезка прямой *AB*

на оси *Ox* $y = 0$ **функция принимает вид**

$$z = x^2 + 3x + 1 \qquad -5 \le x \le 0$$

$z' = \left(x^2 + 3x + 1\right)' = 2x + 3$

$2x + 3 = 0 \qquad x = -1,5$

$z(-5;0) = 11$

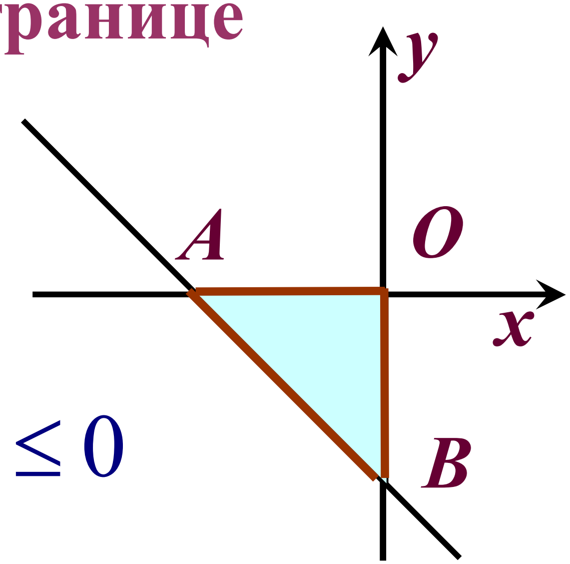
$z(0;0) = 1$

$z(-1,5;0) = -\dfrac{5}{4}$

ПРИМЕР 1 $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$

РЕШЕНИЕ

область



Исследуем поведение функции на границе

на оси *Oy*

$x = 0$ **функция принимает вид**

$$z = 2y^2 + 2y + 1 \quad -5 \le y \le 0$$

$$z' = \left(2y^2 + 2y + 1\right)' = 4y + 2$$

$4y + 2 = 0 \qquad y = -0,5$

$z(0;-5) = 41$

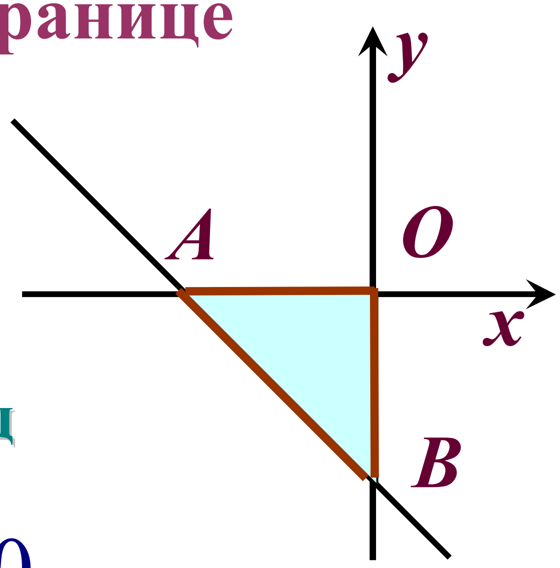
$z(0;0) = 1$

$z(0;-0,5) = \dfrac{1}{2}$

ПРИМЕР 1 $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$

РЕШЕНИЕ

область



Исследуем поведение функции на границе

на прямой *AB*

$$y = -x - 5$$

функция принимает вид

$$z = 4x^2 + 26x + 41 \qquad -5 \le x \le 0$$

$$z' = \left(4x^2 + 26x + 41\right)' = 8x + 26$$

$$8x + 26 = 0$$

$$x = -\frac{13}{4}$$

находим соответствующее значение y

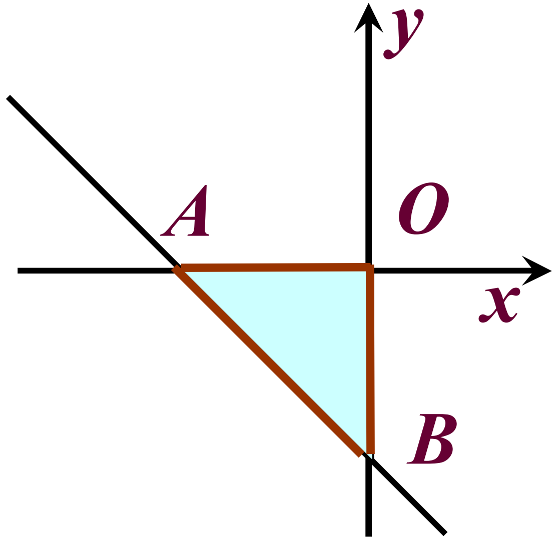
$$y = -\left(-\frac{13}{4}\right) - 5 = -\frac{7}{4}$$

$$z(0;-0,5) = \frac{1}{2} \qquad z(0;-5) = 41 \qquad z\left(-\frac{13}{4};-\frac{7}{4}\right) = -\frac{5}{4}$$

ПРИМЕР 1 $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$

РЕШЕНИЕ

область



Среди найденных значений

$z(0;-0,5) = \frac{1}{2}$

$z(0;0) = 1$

$z(0;-5) = 41$

$z(-5;0) = 11$

$z\left(-\frac{13}{4};-\frac{7}{4}\right) = -\frac{5}{4}$

$z(-1,5;0) = -\frac{5}{4}$

$z(-2;-1) = -3$

выбираем наибольшее и наименьшее

$z_{наиб} = z(0;-5) = 41$

$z_{наим} = z(-2;-1) = -3$

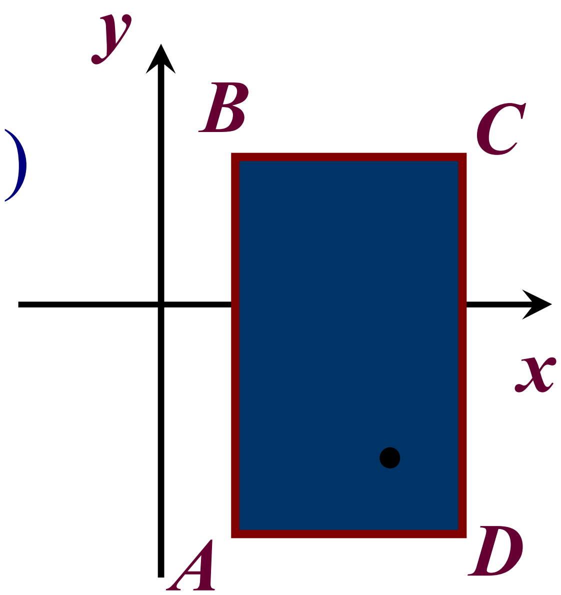
ПРИМЕР 2

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$$

в прямоугольнике с вершинами в точках

$$A(1; -3), \quad B(1; 2), \quad C(4; 2), \quad D(4; -3)$$



РЕШЕНИЕ

построим область

1) Находим стационарные точки функции

$$z'_x = 2x - 6 \qquad z'_y = 2y + 4 \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

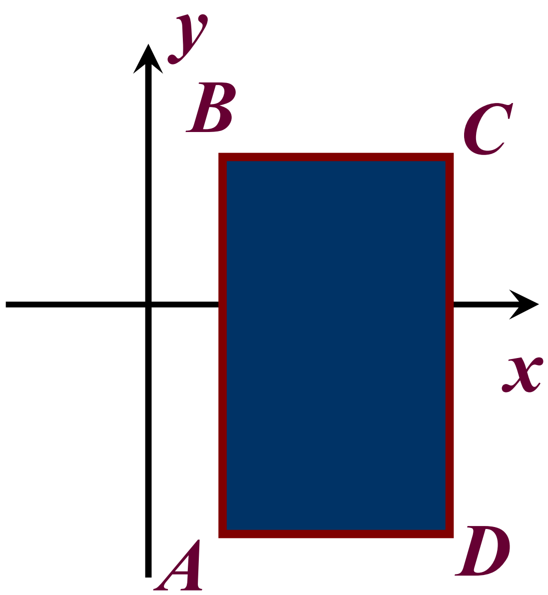
$(3; -2)$ ***стационарная точка*** $\boxed{z(3; -2) = -11}$

ПРИМЕР 2 $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$

РЕШЕНИЕ

Исследуем поведение функции на границе

$A(1;-3),\quad B(1;2),\quad C(4;2),\quad D(4;-3)$



1) На отрезке *AB* $x = 1$

$z = y^2 + 4y - 3 \qquad -3 \le y \le 2$

$z' = \left(y^2 + 4y - 3\right)' = 2y + 4$

$2y + 4 = 0 \qquad y = -2$

$(1;-2)$

$z(1;-3) = -6$

$z(1;2) = 9$

$z(1;-2) = -7$

2) На отрезке *CD* $x = 4$

$z = y^2 + 4y - 6 \qquad -3 \le y \le 2$

$z' = \left(y^2 + 4y - 6\right)' = 2y + 4$

$2y + 4 = 0$

$y = -2$

$(4;-2)$

$z(4;2) = 6$

$z(4;-3) = -9$

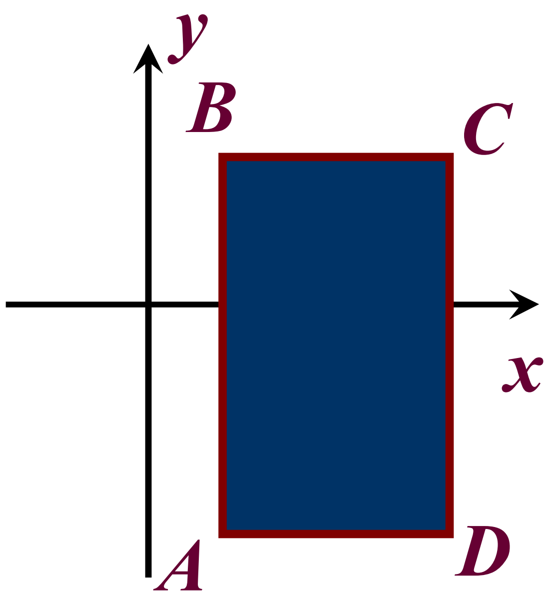
$z(4;-2) = -10$

ПРИМЕР 2 $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$

РЕШЕНИЕ

Исследуем поведение функции на границе

$A(1; -3), \quad B(1; 2), \quad C(4; 2), \quad D(4; -3)$



3) На отрезке BC $\quad y = 2$

$z = x^2 - 6x + 14 \qquad 1 \le x \le 4$

$z' = \left(x^2 - 6x + 14\right)' = 2x - 6 \qquad z(1; -2) = 9$

$2x - 6 = 0 \qquad x = 3 \qquad z(4; 2) = 6$

$(3; 2) \qquad z(3; 2) = 5$

4) На отрезке AD $\quad y = -3$

$z = x^2 - 6x - 1 \qquad 1 \le x \le 4$

$z' = \left(x^2 - 6x - 1\right)' = 2x - 6 \qquad 2x - 6 = 0$

$x = 3 \qquad (3; -3)$

$z(1; -3) = -6$

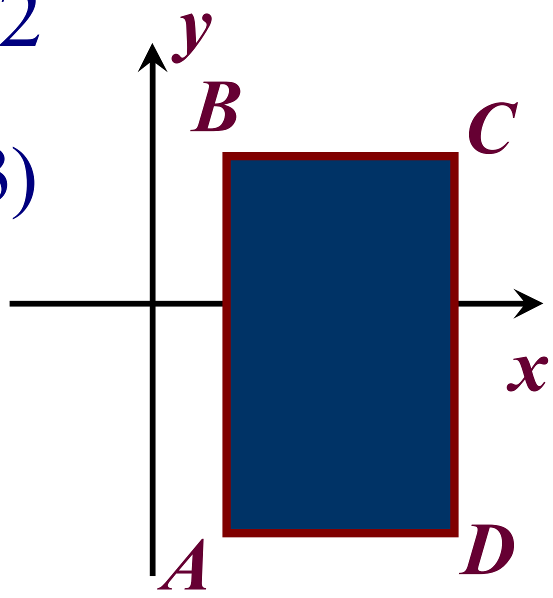
$z(4; -3) = -9$

$z(3; -3) = -10$

ПРИМЕР 2 $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$

РЕШЕНИЕ

$A(1;-3),\quad B(1;2),\quad C(4;2),\quad D(4;-3)$



выбираем

$z(1;-2) = 9$

$z(4;2) = 6$

$z(3;2) = 5$

$z(1;-3) = -6$

$z(1;2) = 9$

$z(1;-2) = -7$

$z(1;-3) = -6$

$z(4;-3) = -9$

$z(3;-3) = -10$

$z(4;-3) = -9$

$z(4;2) = 6$

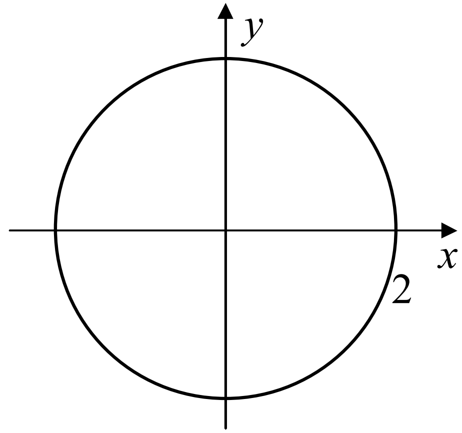
$z(4;-2) = -10$

$z(3;-2) = -11$

Пример 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy$

в круге $x^2 + y^2 \le 4$

Построим область D на плоскости Oxy – круг



Найдем точки, где функция принимает наибольшее и наименьшее значения. Эти точки могут находиться, как внутри области, так и на её границе.

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Точка $(0,\ 0)$ находится внутри круга $\boxed{z(0;0) = 0}$

Кроме того, наибольшее и наименьшее значения функции могут лежать на границе. Их надо найти, все сравнить и выбрать наибольшее и наименьшее

Уравнение границы: $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ где $x \in [-2;2]$

Функция z на границе: $z = \pm x \cdot \sqrt{4 - x^2}$

$$z' = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{z(\sqrt{2}) = 2} \\ \boxed{z(-\sqrt{2}) = -2} \end{matrix}$$

z на концах отрезка x: $\boxed{z(\pm 2) = 0}$

Таким образом, $z_{\text{наибольшее}} = 2$ в точке $M_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$ $z_{\text{наименьшее}} = -2$ в точке $M_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$