§18. Условные экстремумы ФНП

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Условным экстремумом функции n переменных* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется экстремум этой функции, найденный в предположении, что переменные* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *связаны* m $(m < n)$ *условиями*:

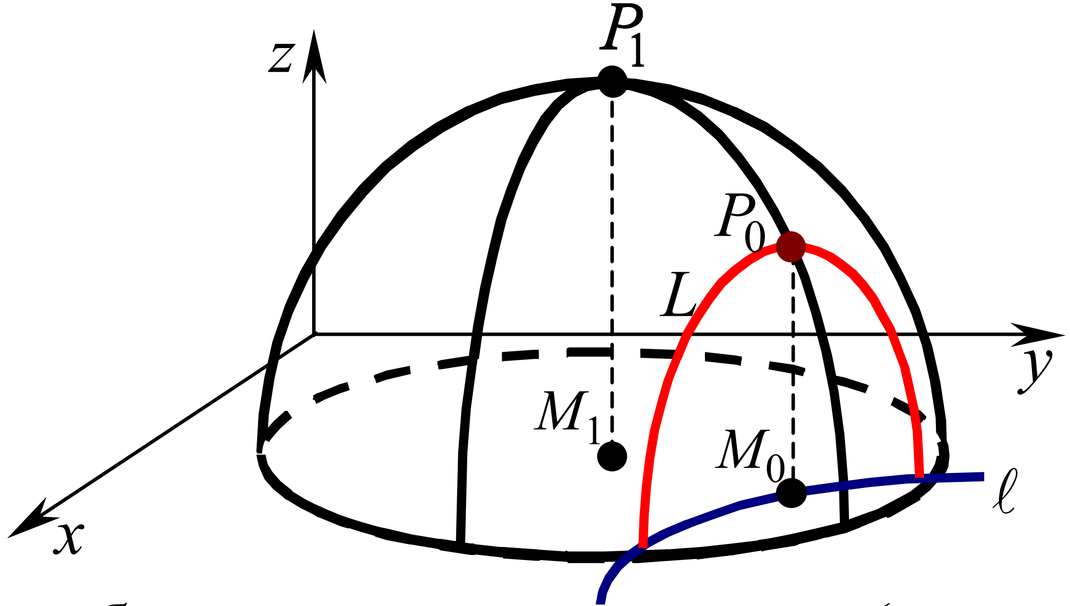
$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Условия (1) называются ***уравнениями связи***.

Обычный экстремум при этом называют ***безусловным экстремумом***.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ условного экстремума функции ДВУХ переменных.

Пусть поверхность S – график функции $z = f(x,y)$;



M_1 – точка безусловного экстремума (сравниваем P_1 и точки ее полной окрестности).

Пусть $\ell \subset xOy$ – кривая уравнения связи $\varphi(x,y) = 0$,

L – образ ℓ на поверхности S .

M_0 – точка условного экстремума (сравниваем положение P_0 и точек кривой L) .

ЗАДАЧА. Найти экстремум функции $z = f(x,y)$, при условии, что x и y связаны условием $\varphi(x,y) = 0$.

<u>I способ.</u> **Метод подстановки**.

Из уравнения $\varphi(x,y) = 0$ выразить $y = \psi(x)$ и подставить в $z = f(x,y)$. Тогда условный экстремум – обычный экстремум функции одной переменной $z = f(x, \psi(x))$.

<u>II способ.</u> **Метод Лагранжа**.

Пусть уравнение $\varphi(x,y) = 0$ определяет функцию $y = y(x)$ в неявном виде, $f(x,y)$ – дифференцируемая.

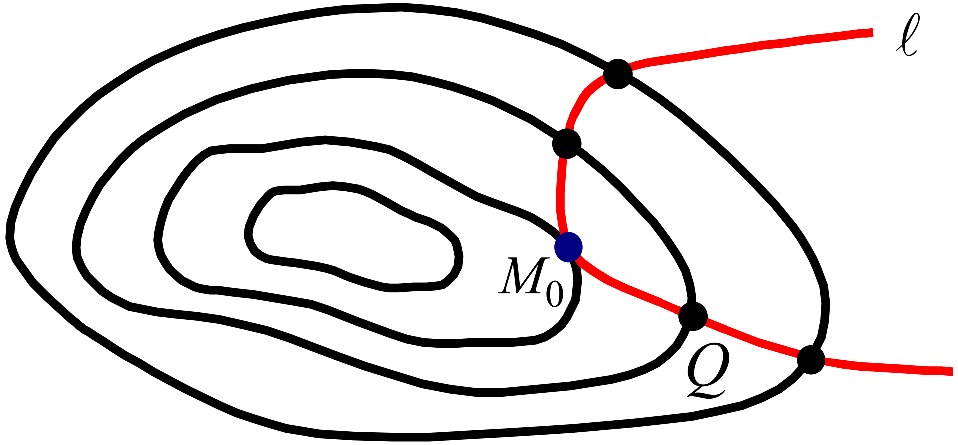
Необходимые условия условного экстремума функции 2-х переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Замечания.

1) Условия (5) – необходимые условия экстремума функции 3-х переменных $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$.
$F(x,y,\lambda)$ называют ***функцией Лагранжа***, λ – ***множителем Лагранжа*** .

2) ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ метода Лагранжа.
Рассмотрим линии уровня $f(x,y) = C_1$, …, $f(x,y) = C_k$ функции $z = f(x,y)$ и кривую $\varphi(x,y) = 0$ (кривую ℓ).



Точка Q не является точкой условного экстремума, т.к. в ее окрестности функция принимает значения как больше C_i , так и меньше C_i .
Точка условного экстремума M_0 – точка в которой ℓ ***касается*** некоторой линии уровня $f(x,y) = C_m$.

$\Rightarrow$ В точке условного экстремума касательная к линии уровня $f(x,y) = C_m$ и к ℓ – общая.

Угловой коэффициент касательной к линии уровня $f(x,y) = C_m$ в точке M_0:

$$k_1 = -\frac{f'_x(M_0)}{f'_y(M_0)}.$$

Угловой коэффициент касательной к линии ℓ в точке M_0:

$$k_2 = -\frac{\varphi'_x(M_0)}{\varphi'_y(M_0)}.$$

Так как $k_1 = k_2$, то

$$-\frac{f'_x(M_0)}{f'_y(M_0)} = -\frac{\varphi'_x(M_0)}{\varphi'_y(M_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'_x(M_0)}{\varphi'_x(M_0)} = \frac{f'_y(M_0)}{\varphi'_y(M_0)} = -\lambda,$$

$$\Rightarrow \quad f'_x(M_0) = -\lambda\varphi'_x(M_0), \qquad f'_y(M_0) = -\lambda\varphi'_y(M_0),$$

$$\Rightarrow \quad f'_x(M_0) + \lambda\varphi'_x(M_0) = 0, \qquad f'_y(M_0) + \lambda\varphi'_y(M_0) = 0.$$

Полученные из системы (5) критические точки M_i необходимо проверить на наличие условного экстремума (рассмотреть в них приращение $\Delta f(M_i)$ с учетом уравнения связи $\varphi(x,y) = 0$).

Замечание.

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – критическая точка условного экстремума, $M_0(x_0,y_0) \leftrightarrow \lambda_0$.

Рассмотрим $\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$, где $\varphi(x_0,y_0) = 0$ и $\varphi(x_0 + \Delta x,y_0 + \Delta y) = 0$:

$$\Delta f(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) + \lambda_0 \cdot [\varphi(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - \varphi(x_0,y_0)]=$$

$$= \underbrace{[\, f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) + \lambda_0\, \varphi(\, x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)]}_{F(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y,\, \lambda_0)} - \underbrace{[f(x_0,y_0) + \lambda_0\, \varphi(x_0,y_0)]}_{F(x_0,\, y_0,\, \lambda_0)} .$$

$$\Rightarrow \Delta f(M_0) = \Delta_{x,y} F(x_0,y_0,\lambda_0)$$

Таким образом, *приращение функции* $\Delta f(M_0)$ *с учетом уравнения связи* $\varphi(x,y) = 0$ *совпадает с приращением функции* 2-х *переменных* $F\,(x,y,\lambda_0) = f(x,y) + \lambda_0 \cdot \varphi(x,y)$.

Для функции 2-х переменных справедлива

ТЕОРЕМА 1 (достаточное условие условного экстремума функции 2-х переменных).

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ – *критическая точка для условного экстремума функции* $z = f(x,y)$ *и в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0,y_0)$ *функция имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.*

Обозначим

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & F''_{xx}(M_0) & F''_{xy}(M_0) \\ \varphi'_y(M_0) & F''_{xy}(M_0) & F''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда:

1) *если* $\Delta > 0$, *то в точке* M_0 – *условный минимум* ;
2) *если* $\Delta < 0$, *то в точке* M_0 – *условный максимум* ;
3) *если* $\Delta = 0$, *то никакого заключения о критической точке* $M_0(x_0,y_0)$ *сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.*

Обобщая полученные результаты на функцию n переменных получим следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2 (необходимые условия условного экстремума функции n переменных).

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в точке* $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ *имеет условный экстремум, то* M_0 *является стационарной точкой функции*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m) = f(M) + \lambda_1 \cdot \varphi_1(M) + \ldots + \lambda_m \cdot \varphi_m(M),$$

где $\varphi_1(M) = 0, \ldots \varphi_m(M) = 0$ – *уравнения связи*.

Наличие в критической точке M_0 экстремума определяют по знаку приращения функции n переменных

$$\Delta F(M_0, \lambda_{01}, \ldots \lambda_{0m})$$

где $\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0m}$ – фиксированные значения множителей Лагранжа, соответствующие точке M_0.