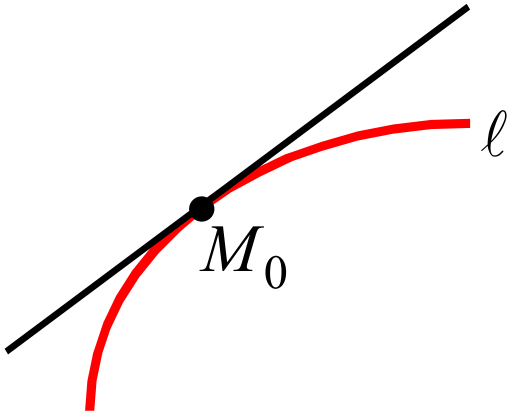
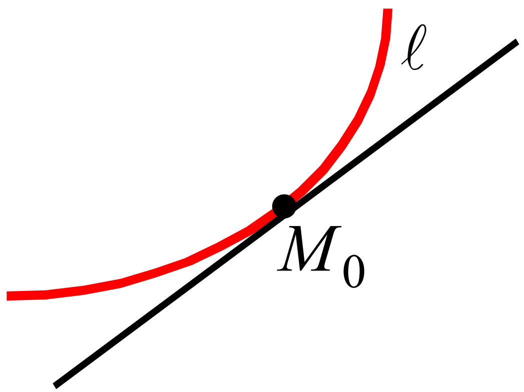
3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* ℓ *– кривая,* M_0 *– точка кривой, причем в* M_0 *существует невертикальная касательная к* ℓ*.*

Кривую ℓ *называют* ***выпуклой в точке*** $\boldsymbol{M_0}$*, если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит ниже касательной, проведенной к* ℓ *в точке* M_0*.*

Кривую ℓ *называют* ***вогнутой в точке*** $\boldsymbol{M_0}$*, если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит выше касательной, проведенной к* ℓ *в точке* M_0*.*

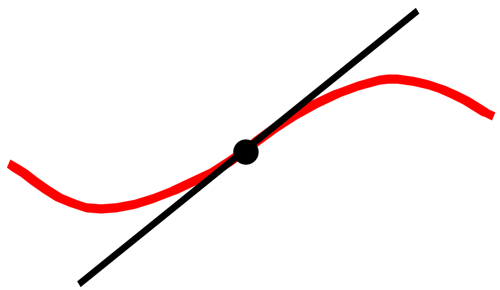


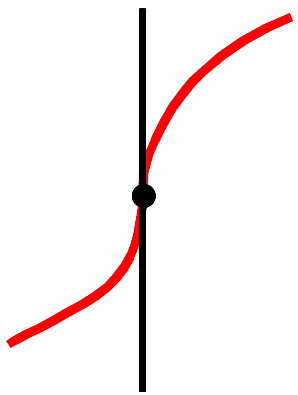


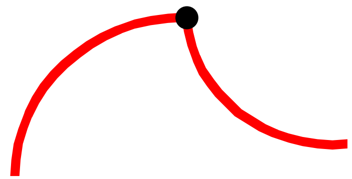
*Точки кривой, которые разделяют ее выпуклые и вогнутые участки, называются **точками перегиба** кривой.*

***Замечания*.**

1) Выпуклость и вогнутость кривой в точке – локальные понятия. Они определяют относительное расположение точек кривой и касательной вблизи точки касания. В точках, удаленных от точки касания, кривая и касательная могут располагаться произвольным образом.
2) В точке перегиба касательная к кривой (если она существует) пересекает кривую (кривая переходит с одной стороны касательной на другую).







ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Кривая* $y = f(x)$ *называется* ***выпуклой*** (*вогнутой*) ***на интервале*** $(a;b)$ *если* $\forall x \in (a;b)$ *кривая выпукла* (*вогнута*) *в соответствующей точке* $M(x\,;f(x))$.

Замечания.

1) Если $M_0(x_0\,;f(x_0))$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$, то x_0 – внутренняя точка области определения функции $f(x)$.
2) Точками перегиба кривой $y = f(x)$ часто называют точки, которые разделяют интервалы выпуклости и вогнутости этой кривой (т.е. абсциссы точек перегиба кривой $y = f(x)$).

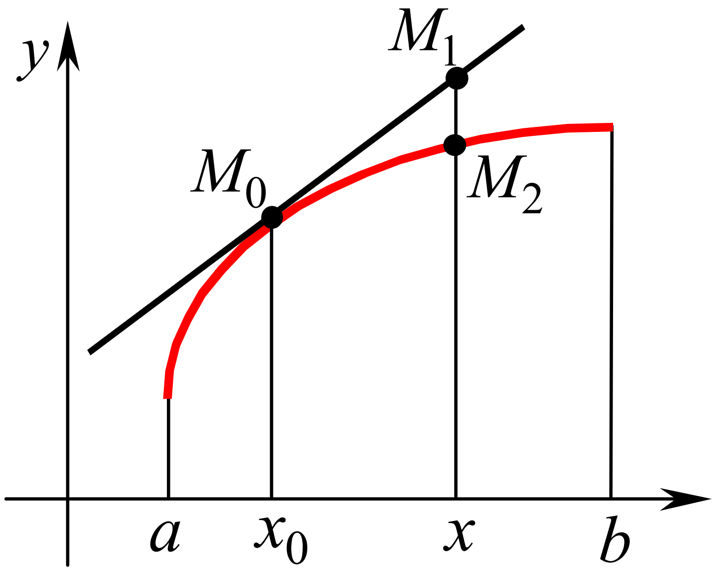
ТЕОРЕМА 5 (необходимое и достаточное условия выпуклости (вогнутости) графика функции).

Пусть функция $y = f(x)$ *дважды дифференцируема на интервале* $(a;b)$. *Тогда*:

1) *если кривая* $y = f(x)$ *выпукла* (*вогнута*) *на интервале* $(a;b)$, *то* $f''(x) \le 0 \quad (f''(x) \ge 0), \quad \forall x \in (a;b)$
(необходимое условие выпуклости (вогнутости) графика);

2) *если* $f''(x) < 0 \quad (f''(x) > 0) \quad \forall x \in (a;b)$, *то кривая* $y = f(x)$ *выпукла* (*вогнута*) *на интервале* $(a;b)$
(достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточного условия



СЛЕДСТВИЕ 6 (необходимое условие перегиба кривой $y = f(x)$).

Пусть функция $y = f(x)$ *дважды дифференцируема в* $\mathrm{U}(x_0,\delta)$ (*или в* $\mathrm{U}^*(x_0,\delta)$).

Если $M_0(x_0\,; f(x_0))$ *– точка перегиба кривой* $y = f(x)$, то $f\,''(x_0) = 0$ *или в точке* x_0 *функция* $y = f(x)$ *не имеет второй производной.*

Замечание. Точки, в которых вторая производная функции $y = f(x)$ обращается в ноль или имеет разрыв, называют иногда критическими точками II рода функции $y = f(x)$ (или критическими точками функции $y = f(x)$ по второй производной).

ТЕОРЕМА 7 (достаточное условие перегиба кривой $y = f(x)$).

Пусть x_0 *– внутренняя точка* $D(f)$ *и функция* $f(x)$ *дважды дифференцируема в* $U^*(x_0, \delta)$.

Если при переходе через точку x_0 *функция* $f''(x)$ *меняет знак, то точка* $M_0(x_0\,; f(x_0))$ *является точкой перегиба кривой* $y = f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

4. Асимптоты кривой

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямая* ℓ *называется* ***асимптотой*** *кривой, если при неограниченном удалении точки* M *кривой от начала координат расстояние от точки* M *до прямой* ℓ *стремится к нулю.*

Замечание.

Выделяют два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты кривая $y = f(x)$ не пересекает (почему?), наклонные – может пересекать.

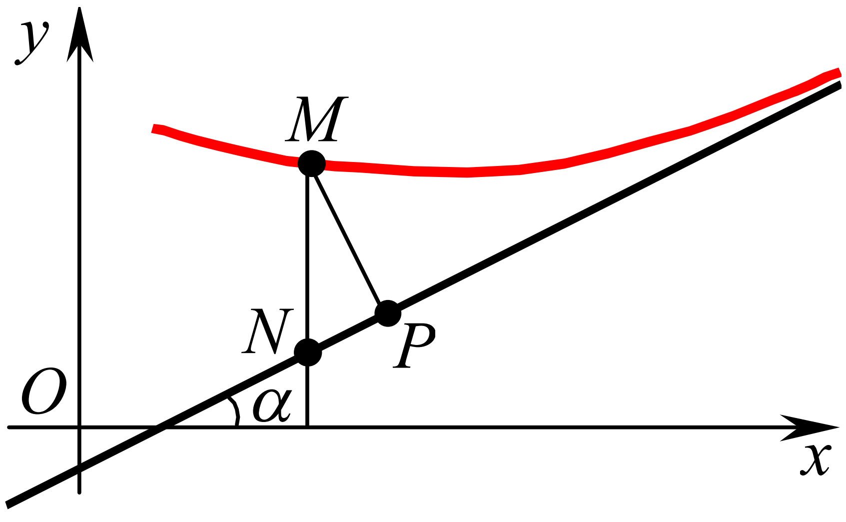
ТЕОРЕМА 8 (необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты кривой $y = f(x)$).

Прямая $y = kx + b$ *является наклонной асимптотой кривой* $y = f(x) \Leftrightarrow$ *существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{è} \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = b$$

$$\text{(или}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{è} \qquad \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx] = b \quad \text{).}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Замечания.

1) Из теоремы 8 следует, что график функции $y = f(x)$ может иметь наклонную асимптоту только если функция определена в окрестности $+\infty$ или $-\infty$.

   Причем, наклонных асимптот у кривой $y = f(x)$ может быть не более двух: для правой ветви (т.е. при $x \to +\infty$) и для левой ветви (т.е. при $x \to -\infty$).

2) Если $\lim\limits_{x \to +(-)\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ è $\lim\limits_{x \to +(-)\infty} f(x) = b$,

   то наклонная асимптота имеет уравнение $y = b$, т.е. является горизонтальной.

ТЕОРЕМА 9 (необходимое и достаточное условие существования вертикальной асимптоты кривой $y = f(x)$).

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$ $\Leftrightarrow$ точка $x = a$ является точкой разрыва II *рода функции $y = f(x)$, причем, хотя бы один из односторонних пределов $f(a - 0)$, $f(a + 0)$ равен бесконечности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

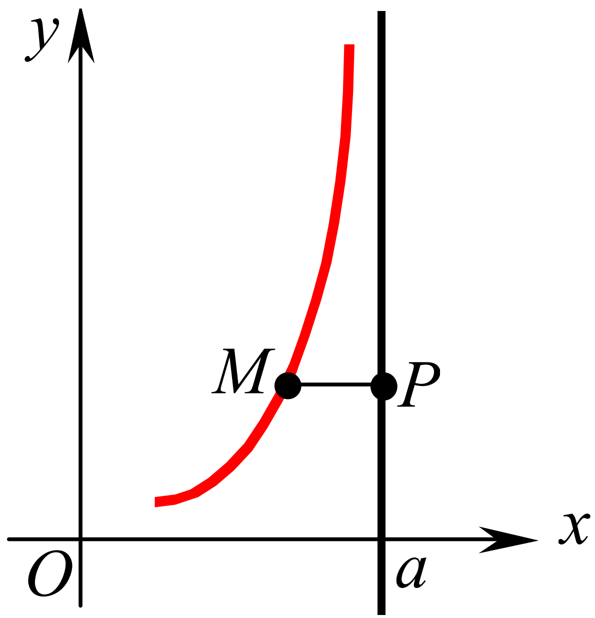


СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать четность и периодичность функции.
3. Исследовать точки разрыва, найти вертикальные асимптоты.
4. Найти наклонные асимптоты (если их существование возможно).
5. Найти точки пересечения графика с осями координат.
6. Найти $f'(x)$. Определить точки экстремума, интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти $f''(x)$. Определить точки перегиба графика, интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить график функции.