§10. Исследование функций и построение графиков

1. Возрастание и убывание функции (самостоятельно)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***возрастающей*** (***неубывающей***) *на интервале* $(a;b)$ *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\, f(x_1) \le f(x_2)\,).$$

Иначе говоря, функция $y = f(x)$ называется возрастающей на $(a;b)$, если большему значению аргумента из $(a;b)$ соответствует большее значение функции.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***убывающей*** (***невозрастающей***) *на интервале* $(a;b)$ *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (\, f(x_1) \ge f(x_2)\,).$$

Иначе говоря, функция $y = f(x)$ называется убывающей на $(a;b)$, если большему значению аргумента из $(a;b)$ соответствует меньшее значение функции.

Интервалы возрастания и убывания функции называются ***интервалами монотонности функции***.

Замечание. Из определения $\Rightarrow$ если $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$, то на этом интервале Δx и соответствующее ему $\Delta f(x)$ будут иметь одинаковый (разный) знак.

ТЕОРЕМА 1(необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) функции).

Пусть $y=f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(a;b)$. *Тогда*

1) *если* $y=f(x)$ *возрастает* (*убывает*) *на* $(a;b)$, *то на этом интервале ее производная неотрицательна (неположительна)*, т.е. $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(a;b)$ ($f'(x)\leq 0$, $\forall x\in(a;b)$);

(необходимое условие возрастания (убывания) функции)

2) *если* $f'(x)>0$, $\forall x\in(a;b)$ ($f'(x)<0$, $\forall x\in(a;b)$), *то функция* $y=f(x)$ *на* $(a;b)$ *возрастает (убывает).*

(достаточное условие возрастания (убывания) функции)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

(Пискунов Н.С. Т.1, стр. 145.)

2. Экстремумы функции

Пусть $x_0 \in D(f)$, x_0 – внутренняя точка $D(f)$ (т.е. существует некоторая окрестность точки x_0 , целиком лежащая во множестве $D(f)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точка x_0 называется* ***точкой максимума функции*** $f(x)$ *если существует такая δ-окрестность* $U(x_0,\delta)$ *точки x_0, что* $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in U^*(x_0,\delta)$.

Значение функции точке максимума называется ***максимумом функции***.

Точка x_0 называется ***точкой минимума функции*** $f(x)$ *если существует такая δ-окрестность* $U(x_0,\delta)$ *точки x_0, что*

$$f(x) > f(x_0)\ ,\ \forall x \in U^*(x_0,\delta).$$

Значение функции точке минимума называется ***минимумом функции***.

Точки минимума и максимума функции называются ее ***точками экстремума***.

Минимумы и максимумы функции называются ее ***экстремумами***.

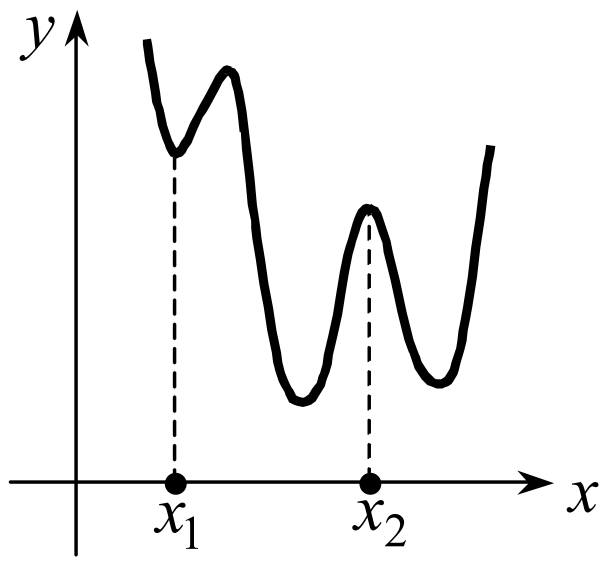
Замечания:

1) Понятия минимум и максимум функции близки к понятиям наименьшее и наибольшее значения функции. Они показывают, в каком отношении находятся значение функции в точке x_0 и в других точках.

   Различие – в области действия понятий. Наибольшее и наименьшее значения – понятия глобального характера, максимум и минимум – понятия локального характера.

   Поэтому в некоторой литературе употребляют термины «***глобальный максимум*** (***минимум***)» вместо наибольшего (наименьшего) значения функции и «***локальный максимум*** (***минимум***)» – вместо максимум (минимум) функции.

2) Функция может иметь в своей области определения несколько точек максимума и минимума. Причем, некоторые минимумы функции могут быть больше ее максимумов.

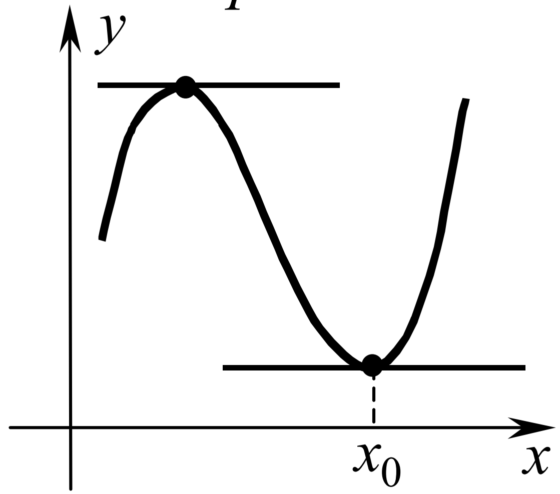


ТЕОРЕМА 2 (необходимое условие экстремума, теорема Ферма).

Пусть x_0 *– точка экстремума функции* $f(x)$ *и* $f(x)$ *– дифференцируема в точке* x_0. *Тогда* $f'(x_0) = 0$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ 2.

Если x_0 *– точка экстремума функции* $f(x)$ *и кривая* $y = f(x)$ *имеет невертикальную касательную в точке* $M_0(x_0, f(x_0))$, *то эта касательная – горизонтальная.*



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

(Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1, стр. 148.)

Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю, называются ***стационарными точками функции*** $f(x)$.

ТЕОРЕМА 3 (первое достаточное условие экстремума).

Пусть x_0 *– внутренняя точка* $\mathrm{D}(f)$,

$f(x)$ *непрерывна в* $\mathrm{U}(x_0,\delta)$

$f(x)$ *дифференцируема в* $\mathrm{U}(x_0,\delta)$ *или* $\mathrm{U}^*(x_0,\delta)$.

Если при переходе через точку x_0 *производная функции* $f(x)$ *меняет знак, то* x_0 *является точкой экстремума.*

При этом, если производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 *– точка максимума, если с минуса на плюс – то* x_0 *– точка минимума.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

(Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1, стр. 150-151.)

Замечание.

Из теоремы 3 $\Rightarrow$ точками экстремума могут быть не только стационарные точки, но и точки, в которых функция не имеет производной (точки разрыва производной).

Стационарные точки функции $f(x)$ и точки, в которых $f'(x)$ не существует, называются ***критическими точками*** I ***рода*** (***критическими точками по первой производной***).

ТЕОРЕМА 4 (второе достаточное условие экстремума).

Пусть x_0 *– внутренняя точка* D(f) *и*

$f(x)$ *n раз дифференцируема в точке* x_0 *, причем*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\ , \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0\ .$$

Тогда:

1) *если n – четное и* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *, то* x_0 *является точкой минимума функции* $f(x)$;
2) *если n – четное и* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *, то* x_0 *является точкой максимума функции* $f(x)$;
3) *если n – нечетное, то* x_0 *не является точкой экстремума функции* $f(x)$.

Замечание. На практике пользоваться 2-м достаточным условием экстремума менее удобно, чем 1-м. Действительно,

1) сложно вычислить $f^{(n)}(x_0)$;

2) определяются не все промежутки монотонности функции.

Но иногда, все же лучше применить 2-е достаточное условие. Например, если критических точек бесконечно много.