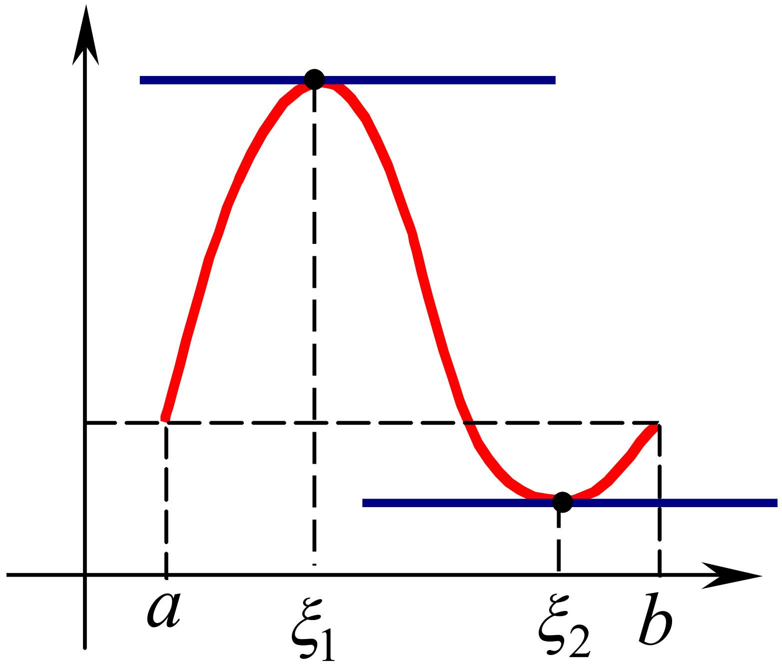
§8. Основные теоремы дифференциального исчисления

ТЕОРЕМА 1 (Ролля).

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a;\ b]$ *и дифференцируема на* $(a;\ b)$.

Если $f(a) = f(b)$, *то существует хотя бы одна точка* $\xi \in (a;\ b)$ *такая, что* $$f'(\xi) = 0\ .$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы Ролля.



Если функция $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме* 1 *условиям, то на интервале* $(a;\, b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна оси* Ox.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

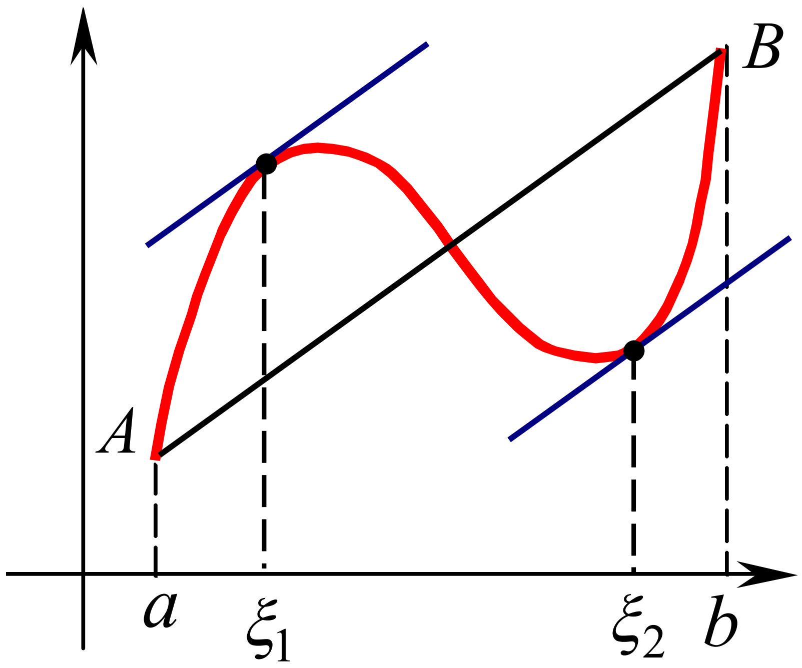
ТЕОРЕМА 2 (Лагранжа).

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a;\, b]$ *и дифференцируема на* $(a;\, b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a;\, b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \qquad (2)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы Лагранжа.



Следовательно, *если функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме* 2 *условиям, то на интервале* $(a; b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна секущей* AB.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Замечание. Формулу (2) можно переписать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) \,. \qquad (3)$$

Формулу (3) называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений.***

СЛЕДСТВИЕ теоремы Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$.

Функция $f(x)$ *принимает на* $[a; b]$ *постоянное значение* C $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0, \ \forall x \in (a; b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 3 (Коши).

Пусть функции $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на* $[a;\ b]$ *и дифференцируемы на* $(a;\ b)$, *причем* $\varphi'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a;\ b)$. *Тогда существует хотя бы одна точка* $\xi \in (a;\ b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

§9. Использование производной при вычислении пределов

ТЕОРЕМА 1 (Правило Лопиталя).

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ и выполняются следующие условия:

1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и непрерывны в некоторой δ-окрестности x_0, за исключением возможно самой x_0;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0 \quad \left(\text{èëè} \quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty\right)$;

3) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в $U^*(x_0,\delta)$, причем

$$\varphi'(x) \neq 0, \ \forall x \in U^*(x_0,\delta).$$

Тогда, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (конечный или бесконечный),

то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем эти два предела будут равны. Т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

Замечания.

1) Если $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ тоже являются б.м. (б.б.) при $x \to x_0$, то правило Лопиталя можно применить повторно.

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не существует, то правило Лопиталя неприменимо. При этом $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ может существовать.

ПРИМЕР. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

ТЕОРЕМА 4 (второе достаточное условие экстремума).

Пусть x_0 *– внутренняя точка* D(f) *и*

$f(x)$ *n раз дифференцируема в точке* x_0, *причем*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\ ,\quad f^{(n)}(x_0) \neq 0\ .$$

Тогда:

1) *если n – четное и* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *то* x_0 *является точкой минимума функции* $f(x)$;
2) *если n – четное и* $f^{(n)}(x_0) < 0$, *то* x_0 *является точкой максимума функции* $f(x)$;
3) *если n – нечетное, то* x_0 *не является точкой экстремума функции* $f(x)$.

Замечание. На практике пользоваться 2-м достаточным условием экстремума менее удобно, чем 1-м. Действительно,

1) сложно вычислить $f^{(n)}(x_0)$;

2) определяются не все промежутки монотонности функции.

Но иногда, все же лучше применить 2-е достаточное условие. Например, если критических точек бесконечно много.