§6. Дифференциал функции

1. Определение и геометрический смысл

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***дифференцируемой в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ *, если ее приращение в этой точке может быть записано как сумма линейной относительно* Δx *части и бесконечно малой более высокого порядка чем* Δx , т.е.

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) , \qquad (1)$$

где A *– число,* $\beta(\Delta x)$ *– б.м. более высокого порядка че*м Δx.

Слагаемое $A \cdot \Delta x$ *в выражении* (1) (т.е. линейную относительно Δx часть $\Delta f(x_0)$) *называют* ***дифференциалом функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ и обозначают: $dy(x_0)$, $df(x_0)$.

ТЕОРЕМА 1 (о связи дифференцируемости с существованием производной).

Функция $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 $\Leftrightarrow$ *она имеет в точке* x_0 *производную. При этом для ее дифференциала в точке* x_0 *справедливо равенство*

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x \,. \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Очевидно, что соответствие $(x_0\,;\Delta x) \to df(x_0)$ является функцией (двух переменных).

Ее называют ***дифференциалом функции*** $y = f(x)$ и обозначают

$$dy\,,\ \ df(x)\,.$$

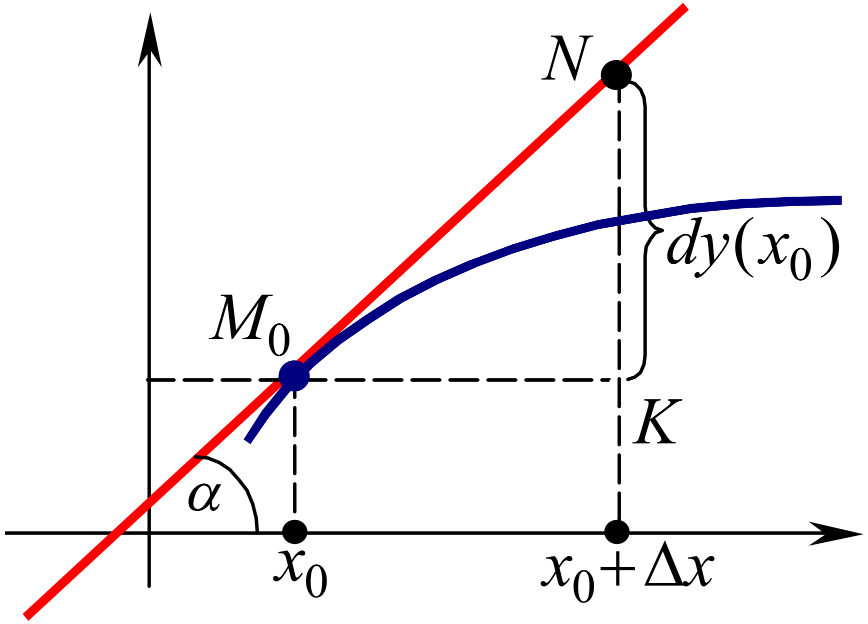
Замечание. Из теоремы 1 следует, что нахождение производной и дифференциала функции представляет собой по существу одну и ту же задачу. Поэтому операцию нахождения производной называют ***дифференцированием функции***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***дифференцируемой на интервале*** $(a;b)$ *если она дифференцируема* (т.е. имеет производную) *в каждой точке этого интервала*.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***дифференцируемой на отрезке*** $[a;b]$ *если она дифференцируема на интервале* $(a;b)$ *и имеет соответствующие односторонние производные в точках* a *и* b.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Рассмотрим график функции $y = f(x)$.
Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
Тогда в x_0 функция $f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$.
$\Rightarrow$ в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ $\exists$ касательная к кривой $y = f(x)$.



Таким образом, *дифференциал функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *равен приращению ординаты точки на касательной к кривой* $y = f(x)$, *которое соответствует приращению* Δx.

ПРИМЕРЫ.

Найти дифференциалы функций: 1) $y = x^3$; 2) $y = x$.

Замечания.

1) Так как для дифференциала функции $y = x$ справедливо

$$dy = dx = \Delta x ,$$

то говорят: «*дифференциал независимой переменной равен ее приращению*».

Учитывая этот факт, формулу (2) можно переписать в виде

$$dy = f'(x) \cdot dx . \qquad (3)$$

2) Из формулы (3) получаем, что производная $y' = f'(x)$ является отношением 2-х дифференциалов:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} .$$

Таким образом, символическая дробь $\dfrac{dy}{dx}$ превратилась в реальную дробь.

2. Свойства дифференциалов

Из теоремы 1 и правил дифференцирования получаем, что справедливы следующие утверждения

1) *Дифференциал константы равна нулю*, т.е.

$$d(C) = 0\ , \quad \text{где } C \text{ – константа.}$$

2) *Дифференциал суммы* (*разности*) *равна сумме* (*разности*) *дифференциалов*, т.е. $d(u \pm v) = du \pm dv$.

3) *Дифференциал произведения находится по правилу*:

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv\ .$$

4) $d(C \cdot u) = C \cdot du$, где C – константа.
Говорят: «*константа выносится за знак дифференциала*».

5) *Дифференциал дроби находится по правилу*:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}, \quad \big(v(x) \neq 0\big).$$

Рассмотрим дифференциал сложной функции $y = f(\varphi(t))$.

Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t,
функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = \varphi(t)$.

Тогда $\exists$ производные $x'(t)$ и $f'(x)$ и сложная функция $y = f(\varphi(t))$ имеет производную в точке t , причем

$$y'(t) = [f(\varphi(t))]' = f'(x) \cdot x'(t)$$

Следовательно, функция $y = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t и ее дифференциал в этой точке равен

$$dy(t) = y'(t) \cdot dt ,$$

$$\Rightarrow \quad dy(t) = f'(x) \cdot x'(t)dt ,$$

$$\Rightarrow \quad dy(t) = f'(x) \cdot \underbrace{x'(t)dt}_{dx},$$

$$\Rightarrow \quad dy = f'(x) \cdot dx . \qquad (4)$$

Сравним формулы (3) и (4):

(3): $dy = f'(x) \cdot dx$, где x – независимая переменная;

(4): $dy = f'(x) \cdot dx$, где $x = \varphi(t)$ – функция.

Таким образом, *формула* (3) *справедлива вне зависимости от того, является ли x независимым аргументом или функцией*. Поэтому формулу (3) называют ***инвариантной формой записи дифференциала***.

Замечание. Формула

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \qquad (2)$$

не является инвариантной.

Действительно, для сложной функции $y = f(\varphi(t))$ имеем:

$$dy(t) = y'(t) \cdot \Delta t = f'(x) \cdot x'(t) \cdot \Delta t .$$

Но $x'(t) \cdot \Delta t \neq \Delta x$, т.к.

$$\Delta x = dx + \beta(\Delta t) = x'(t) \cdot \Delta t + \beta(\Delta t) .$$

§7. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $X_1 \subseteq D(f)$. Тогда на X_1 определена $f'(x)$.

Функцию $f'(x)$ называют также ***первой производной функции $f(x)$*** (или ***производной первого порядка функции $f(x)$***).

Если $f'(x)$ дифференцируема на некотором множестве $X_2 \subseteq X_1$, то $(f'(x))'$ называют ***второй производной функции $y = f(x)$*** (или ***производной второго порядка функции $f(x)$***) и обозначают

$$y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \qquad f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Замечание. Значение второй производной функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают

$$y''(x_0), \quad \frac{d^2 y(x_0)}{dx^2}, \qquad f''(x_0), \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

Если $f''(x)$ тоже дифференцируема на некотором множестве $X_3 \subseteq X_2$, то ее производную $(f''(x))'$ называют ***третьей производной функции $y = f(x)$*** (или ***производной третьего порядка функции $f(x)$***).

Продолжая этот процесс, назовем ***n-й производной функции*** $y = f(x)$ ее производную от производной порядка $n - 1$.

Обозначают:

$$y''', \quad \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad f'''(x), \quad \frac{d^3 f}{dx^3}$$ – третья производная $y = f(x)$;

$$y^{(4)}, \quad \frac{d^4 y}{dx^4}, \quad f^{(4)}(x), \quad \frac{d^4 f}{dx^4}$$ – четвертая производная $y = f(x)$;

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f}{dx^n}$$ – n-я производная $y = f(x)$.

Производные порядка $n > 1$ называют ***производными высших порядков***.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ второй производной.

Если $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t,
то $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени* t_0,
$S''(t_0)$ – *ускорение в момент времени* t_0 (скорость изменения скорости)

Справедливы следующие утверждения.

1) $(C \cdot u)^{(n)} = \mathrm{C} \cdot u^{(n)}$, где C – константа.

Говорят: «константа выносится за знак n-й производной».

2) *Производная n-го порядка суммы (разности) функций равна сумме (разности) n-х производных слагаемых*, т.е.

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)} .$$

3) *n-я производная произведения находится по формуле*:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}, \qquad (1)$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

Формула (1) называется ***формулой Лейбница***.

2. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $X_1 \subseteq D(f)$.
Дифференциал $dy = f'(x) \cdot dx$ – функция двух переменных x и $dx = \Delta x$.
Зафиксируем значение dx.
Тогда dy станет функцией одной переменной x.

Дифференциал функции $dy(x)$ (если он существует) называется ***дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$*** (или ***вторым дифференциалом функции $y = f(x)$***) и обозначается d^2y, $d^2f(x)$.

d^2y – функция переменной x.
Дифференциал функции d^2y (если он существует) называют ***дифференциалом третьего порядка функции $y = f(x)$*** (или ***третьим дифференциалом функции $y = f(x)$***) и обозначается d^3y, $d^3f(x)$.

Продолжая далее этот процесс, определим ***дифференциал n-го порядка функции $y = f(x)$*** как дифференциал от дифференциала порядка $n - 1$. Обозначают: $d^n y$, $d^n f(x)$.

Замечание. Значение дифференциала n-го порядка функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $d^n y(x_0)$, $d^n f(x_0)$.

Дифференциалы порядка $n > 1$ называют ***дифференциалами высших порядков***.

Если функция имеет дифференциал порядка n, то ее называют ***n раз дифференцируемой***.

ТЕОРЕМА 1 (о связи дифференциала n-го порядка и n-й производной).

Функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow$ она имеет в точке x_0 производную порядка n. При этом для $d^n y(x_0)$ справедливо равенство

$$d^n y(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot (dx)^n \; . \qquad (2)$$

***Замечания*.**

1) Скобки в правой части формулы (2) обычно опускают, т.е. записывают ее в виде:

$$d^n y(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot dx^n \,. \tag{3}$$

2) Из формулы (3) получаем, что n-я производная $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ является отношением 2-х дифференциалов:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Таким образом, символическая дробь $\dfrac{d^{(n)} y}{dx^n}$ превратилась в реальную дробь.

3) Дифференциалы порядка n ($n > 1$) не обладают свойством инвариантности. Т.е. формула (3) не будет верной, если x – функция.