3. Бесконечно большие последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***бесконечно большой****, если* $\forall M>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ *такое, что*

$$|x_n|>M\,,\ \ \forall n>N.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Расширим множество $\mathbb{R}$.

I способ. Дополним множество $\mathbb{R}$ элементами, обозначаемыми $+\infty$ и $-\infty$ (называют: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность»)

При этом справедливо: $-\infty < r < +\infty\,,\ \ \forall r\in\mathbb{R}$.

II способ. Дополним множество $\mathbb{R}$ элементом, обозначаемыми ∞ (называют: «бесконечность»)

При этом ∞ не связана с действительными числами отношением порядка.

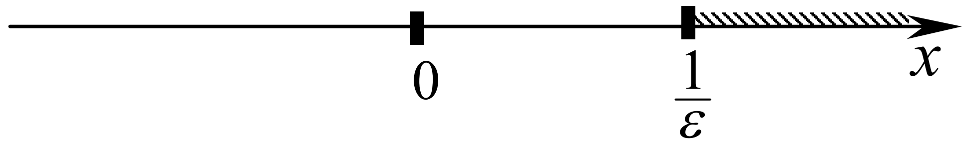
Множество $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называют ***расширенным множеством действительных чисел*** (способ расширения всегда понятен из контекста).

Обозначают: $\overline{\mathbb{R}}$.

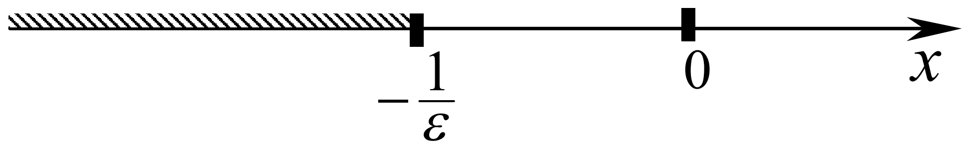
Элементы $-\infty$, $+\infty$, ∞ называют бесконечно удаленными точками числовой прямой.

ε-окрестностью точек $-\infty$, $+\infty$, ∞ считают следующие множества:

$U(+\infty, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 1/\varepsilon \}$



$U(-\infty, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1/\varepsilon \}$



$U(\infty, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1/\varepsilon \}$

Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то с геометрической точки зрения это означает, что в любой ε-окрестности точки ∞ находятся все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа.

(Геометрическая интерпретация бесконечно большой последовательности).

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty, \quad x_n \to \infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремиться к ∞».

Частные случаи бесконечно больших последовательностей:

1) $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $x_n \geq 0$, $\forall n$.

Тогда $|x_n| = x_n > M$, $\forall n > N$

⇒ все члены последовательности, за исключением может быть конечного их числа, находятся в любой ε-окрестности точки + ∞.

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремиться к + ∞».

2) $\{ x_n \}$ – бесконечно большая и $x_n \le 0$, $\forall n$.

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty$

Говорят: «последовательность $\{ x_n \}$ стремиться к – ∞».

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1) Если $\{x_n\}$ – б.б., то последовательность $\{1/x_n\}$ – б.м.

Если последовательность $\{\alpha_n\}$ – б.м, то $\{1/\alpha_n\}$ – б.б.

(связь бесконечно больших и бесконечно малых)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

2) Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б. последовательности одного знака, то их сумма $\{ x_n + y_n \}$ – б.б. того же знака.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО самостоятельно

3) Если $\{x_n\}$ – б.б., а $\{y_n\}$ – ограниченна, то их сумма $\{x_n + y_n\}$ – б.б. последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

4) Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б., то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

5) Если $\{x_n\}$ – б.б., $\{y_n\}$ – сходящаяся, причем

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a \neq 0$$

то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называют* ***отделимой от нуля****, если существуют число* $K > 0$ *и номер* N *такие, что* $|x_n| > K,\ \forall n > N.$

6) Если $\{x_n\}$ – ограниченная и отделимая от нуля, $\{y_n\}$ – б.б., то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ – б.б. последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

7) Если последовательность $\{x_n\}$ – б.б. и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$|x_n| < |y_n| \quad (|x_n| \le |y_n|),$$

то последовательность $\{y_n\}$ тоже является б.б.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

8) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б. одного знака и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n \le z_n \le y_n$.

Тогда последовательность $\{z_n\}$ тоже является б.б. того же знака.

(лемма о двух милиционерах для б.б. последовательностей)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

§3. Предел функции

1. Определение предела функции по Гейне и по Коши

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

$U^*(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ – ***проколотая окрестность точки*** x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (по Коши, на языке ε-δ).

Число $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***при*** $\boldsymbol{x}$ ***стремящемся к*** $\boldsymbol{x_0}$ (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что*

если $x \in U^*(x_0, \delta)$, *то* $f(x) \in U(A, \varepsilon)$.

Замечание.

1) Условие $x \in U^*(x_0, \delta)$ означает, что для x выполняется неравенство:

а) $0 < | x - x_0 | < \delta$, если $x_0 \in \mathbb{R}$;

б) $| x | > 1/\delta$, если $x_0 = \infty$;

в) $x > 1/\delta$, если $x_0 = +\infty$;

г) $x < -1/\delta$, если $x_0 = -\infty$.

2) Условие $f(x) \in U(A, \varepsilon)$ означает, что для $f(x)$ выполняется неравенство $| f(x) - A | < \varepsilon$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (по Гейне, на языке последовательностей).

Число $A \in \mathbb{R}$ называется ***пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0****, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A.*

ТЕОРЕМА 1. *Определение предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны*.

Обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \qquad f(x) \to A,$ ïðè $\; x \to x_0$

Говорят: «$f(x)$ стремится к A при x стремящемся к x_0» .

2. Свойства пределов

Из свойств сходящихся последовательностей и определения предела функции по Гейне получаем, что справедливы следующие утверждения.

1) Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то он единственный.

2) Если $f(x) \to A$, то $|f(x)| \to |A|$.

3) Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (говорят: функция локально ограничена)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой при*** $\boldsymbol{x \to x_0}$, *если* $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

4) ЛЕММА 2 (о роли бесконечно малых функций).

Число $A \in \mathbb{R}$ является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

5) Пусть $f(x)$ – ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Тогда $f(x) \cdot \alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

6) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел при $x \to x_0$.

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже имеют предел при $x \to x_0$, причем

$$a) \quad \lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$b) \quad \lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$c) \quad \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0 \right)$$

Следствие свойства 6. Если $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то $\forall c \in \mathbb{R}$ функция $c \cdot f(x)$ тоже имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Говорят: «константу можно вынести за знак предела».

Замечание. Свойство 6 и его следствие обычно называют теоремами о пределах.

7) Пусть $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$ и $\exists\delta>0$ такое, что $f(x) \geq 0$ (или $f(x) > 0$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq 0$

8) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \to x_0$ и $\exists\delta>0$ такое, что $f(x) \geq g(x)$ (или $f(x) > g(x)$), $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

9) ЛЕММА 3 (о двух милиционерах).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый предел при $x \to x_0$ и $\exists\delta>0$ такое, что $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, $\forall x \in U^*(x_0, \delta)$.

Тогда функция $\varphi(x)$ тоже имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

10) Пусть $f\colon X \to Y$, $\varphi\colon Y \to Z$ и существуют пределы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \qquad \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = z_0$$

Тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = z_0 \qquad (1)$$

Формула (1) называется ***формулой замены переменной в пределе***

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно