Литература

- Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1,2*
- Кудрявцев Л.Д. *Краткий курс математического анализа*
- Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа*
- Запорожец Г.И. *Руководство к решению задач по математическому анализу*

§2. Числовые последовательности

1. Основные понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ***Последовательностью*** *называется перенумерованное множество*
(чисел – числовая последовательность,
функций – функциональная последовательность и т.д.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. ***Последовательностью*** *называется функция, заданная на множестве натуральных чисел*.

Если область значений последовательности – числовое множество, то последовательность называют ***числовой***, если область значений – множество функций, то последовательность называют ***функциональной***.

Принято обозначать:

аргумент последовательности: n (или k)

значения функции: x_n, y_n и т.д.

Называют: x_1 – первый член последовательности,

x_2 – второй член последовательности и т.д.

x_n – n-й (общий) член последовательности.

Способы задания последовательностей:

1) явно (т.е. формулой $x_n = f(n)$)

2) рекуррентным соотношением

(т.е. формулой $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$)

Записывают последовательность:

$\{ x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \}$ – развернутая запись;

$\{ x_n \}$ – короткая запись (где x_n – общий член)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовая последовательность $\{ x_n \}$ называется

- ***ограниченной снизу***, если $\exists a \in \mathbb{R}$ такое, что $a \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- ***ограниченной сверху***, если $\exists b \in \mathbb{R}$ такое, что $x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- ***ограниченной***, если $\exists a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Замечание. Условие «$\exists a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $a \leq x_n \leq b$» равносильно условию «$\exists M > 0$ такое, что $| x_n | \leq M$»

- ***возрастающей*** (***неубывающей***), если

$$x_n < x_{n+1} \ (x_n \leq x_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

- ***убывающей*** (***невозрастающей***), если

$$x_n > x_{n+1} \ (x_n \geq x_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

Замечание. Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие последовательности называются ***монотонными***.

2. Предел последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* $a \in \mathbb{R}$ *называется пределом последовательности* $\{ x_{\mathrm{n}} \}$ *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ *такое, что*

$$| x_{\mathrm{n}} - a | < \varepsilon , \ \forall n > N.$$

Записывают: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a, \quad x_n \to a$

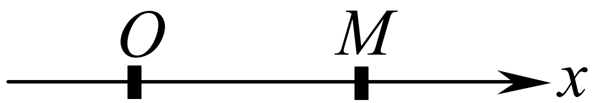
Говорят: последовательность $\{ x_{\mathrm{n}} \}$ сходится (стремиться) к a.

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся*** (***сходящейся к*** a)

Последовательность, не имеющую предела, называют ***расходящейся***.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ
предела последовательности

Пусть $r\in\mathbb{R}$, $M(r)\in Ox$



$M(r)$ – геометрическая интерпретация числа $r\in\mathbb{R}$.

Пусть $x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$.

Интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ называют ε-***окрестностью точки*** x_0.

(геометрическое определение ε-окрестности точки)

Будем обозначать: $\mathrm{U}(x_0, \varepsilon)$

Имеем: $\mathrm{U}(x_0, \varepsilon) = \{x\in\mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$

(алгебраическое определение ε-окрестности точки)

Из определения предела последовательности получаем: если $\{x_n\} \to a$, то с геометрической точки зрения это означает, что в любой ε-окрестности точки a находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением может быть конечного их числа. (Геометрическая интерпретация предела последовательности).

$\Rightarrow$ a – точка «сгущения» последовательности $\{ x_n \}$.

СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1) Две последовательности, отличающиеся на конечное число членов, ведут себя одинаково относительно сходимости.

2) Последовательность может иметь не более одного предела

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3) Если $\{ x_n \} \to a$, то $\{ |x_n| \} \to |a|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – очевидно, в силу $| \, |x_n| - |a| \, | \le |x_n - a|$.

4) Сходящаяся последовательность ограничена

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Последовательность, сходящуюся к нулю, называют* ***бесконечно малой***.

5) ЛЕММА 1 (о роли б.м. последовательностей). *Число* $a \in \mathbb{R}$ *является пределом последовательности* $\{x_n\} \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, *где* $\{\alpha_n\}$ *– бесконечно малая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Суммой, разностью, произведением, частным двух последовательностей* $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ *называются соответственно последовательности*

$$\{x_n + y_n\},\ \{x_n - y_n\},\ \{x_n \cdot y_n\},\ \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}\ (y_n \neq 0)\quad .$$

Последовательность $\{cx_n\}$ называется *произведением* $\{x_n\}$ *на число c* (произведение последовательностей $\{x_n\}$ и $\{c\}$)

6) Пусть $\{x_n\}$ – ограничена, $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая. Тогда $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ – бесконечно малая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно.

7) Пусть $\{ x_n \}$ и $\{ y_n \}$ – сходящиеся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже являются сходящимися последовательностями, причем

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$ (доказать самостоятельно)

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n} \right) = \dfrac{a}{b} \quad (b \neq 0)$

СЛЕДСТВИЕ свойства 7. Если $\{x_n\}$ сходится к a, то $\forall c \in \mathbb{R}$ последовательность $\{cx_n\}$ тоже сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = ca$$

Говорят: «константу можно вынести за знак предела»

8) Пусть $\{x_n\} \to a$ и $x_n \geq 0$ (или $x_n > 0$), $\forall n \in \mathbb{N}$.
Тогда $a \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно.

9) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – сходящиеся последовательности и

$$x_n \leq y_n \ \ (x_n < y_n)\ ), \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда
$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – следствие свойства 8.

10) ЛЕММА о двух милиционерах.

Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к одному и тому же числу и $\forall n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$x_n \le z_n \le y_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда последовательность $\{z_n\}$ тоже сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно.