Элементы линейной алгебры

Линейная алгебра – часть алгебры, изучающая линейные пространства и подпространства, линейные операторы, линейные, билинейные и квадратичные функции на линейных пространствах

Литература

- Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра*
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*
- Ефимов Н.В. *Краткий курс аналитической геометрии*
- Клетеник Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии*
- Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.Б. *Сборник задач по линейной алгебра и аналитической геометрии*
- Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Пахомова Е.Г. *Руководство к решению задач по аналитической геометрии*

§ 1. Матрицы и действия над ними

1. Определение и некоторые виды матриц

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Матрицей размера*** *$m \times n$ называется таблица, образованная из элементов некоторого множества (например, чисел или функций) и имеющая m строк и n столбцов.*

Если $m \neq n$, то матрицу называют ***прямоугольной***.

Если $m = n$, то матрицу называют ***квадратной, порядка n***.

Элементы, из которых составлена матрица, называются ***элементами матрицы***.

Например, a_{24} –

a_{13} –

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}),\ (i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n})$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}),\ \ (i, j = \overline{1,n})$$

Две матрицы **A** и **B** считаются ***равными***, если они одинакового размера, и элементы, стоящие в **A** и **B** на одинаковых местах, равны между собой, т.е. $a_{\mathrm{ij}} = b_{\mathrm{ij}}$.

Некоторые виды матриц

1) Матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = (a_{i1})$, размера $m \times 1$ называют **_матрицей-столбцом длины_** m

2) Матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = (a_{1i})$, размера $1 \times n$ называют **_матрицей-строкой длины_** n

3) **_Нулевой_** матрицей называют матрицу, все элементы которой равны нулю:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

4) Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$

Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{kk} (где $k = \min\{m,n\}$) будем называть ***элементами главной диагонали матрицы***.

Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется ***единичной***:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначают: $\mathbf{E}$ или $\mathbf{E}_n$.

5) Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n. Элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n1}$ будем называть ***элементами побочной диагонали матрицы***.

Квадратные матрицы, у которых все элементы ниже (выше) главной или побочной диагонали равны нулю, называются ***треугольными*** :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1,n-2} & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2,n-2} & b_{2,n-1} & 0 \\ b_{31} & \ldots & b_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & d_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ 0 & \ldots & d_{3,n-2} & d_{3,n-1} & d_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & \ldots & d_{n,n-2} & d_{n,n-1} & d_{nn} \end{pmatrix}$$

6) Прямоугольную матрицу размера $m \times n$ будем называть ***трапециевидной***, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю, т.е. если она имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Линейные операции над матрицами

1) Умножение матрицы на число;

2) Сложение матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Произведением матрицы*** **A**=(a_{ij}) ***на число*** α *называется такая матрица* **B**=(b_{ij}), *элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы* **A** *на число* α, т.е. $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$.

Обозначают: $\alpha\cdot$**A**, α**A**.

Частный случай: (-1)·**A** – ***противоположная матрице*** **A**,

Обозначают –**A.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Суммой двух матриц*** **A**=(a_{ij}) *и* **B**=(b_{ij}) *одинакового размера, называется такая матрица* **C**=(c_{ij}), *элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц* **A** и **B**, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Обозначают: **A+B**

Частный случай: **A+(–B)** – ***разность матриц*** **A** и **B.**

Обозначают: **A–B**

Свойства линейных операции над матрицами

1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (коммутативность сложения матриц)
2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (ассоциативность сложения матриц)
3) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$
4) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$
5) $\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$ (ассоциативность относительно умножения чисел)
6) $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$ (дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел)
7) $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц)
8) $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$

3. Нелинейные операции над матрицами

1) Умножение двух матриц;

2) Транспонирование матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* **A=**(a_{1i}) и **B=**(b_{i1}) – *матрица-строка и матрица-столбец одинаковой длины* n. ***Произведением матрицы-строки* A *на матрицу-столбец* B** *называется число* c, *равное сумме произведений их соответствующих элементов, т.е.*

$$c = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* **A**=(a_{ij}) – *матрица размера* $m \times n$, **B**=(b_{ij}) – *матрица размера* $n \times$ k *(т.е. количество столбцов в матрице* **A** *совпадает с количеством строк матрицы* **B***).* ***Произведением матрицы A на матрицу B*** *называется матрица* **C** =(c_{ij}) *размера* $m \times k$ *такая, что каждый ее элемент* c_{ij} *является произведением* *i-й* *строки матрицы* **A** *на* *j-й* *столбец матрицы* **B**, *т.е.*

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} .$$

Обозначают: **A ·B**, **AB.**

Свойства операции умножения матриц

1) $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$, $\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$

2) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (ассоциативность умножения матриц)

$$\left.\begin{array}{l} 3)\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC} \\ 4)\,\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA}+\mathbf{CB} \end{array}\right\} -$$ дистрибутивность умножения

матриц относительно сложения матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $\mathbf{A}$ *– матрица размера* $m \times n$. *Матрица размера* $n \times m$, *полученная из* $\mathbf{A}$ *заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется* ***транспонированной*** *к* $\mathbf{A}$ *и обозначается* $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Операция нахождения матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ *называется* ***транспонированием*** *матрицы* $\mathbf{A}$.

<u>Свойства операции транспонирования матриц</u>

1) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$;

2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$;

3) $(\alpha\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \alpha\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$;

4) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

§2. Определители

1. Вспомогательные определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть n – натуральное число.* ***Факториалом*** *числа n (обозначают: $n!$) называют произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, т.е.*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Кроме того, факториал числа 0 полагают равным 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расположение n чисел в любом порядке называется* ***перестановкой*** *этих чисел.*

Пусть дана некоторая перестановка n различных чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n.$$

Говорят, что два числа α_i и α_k образуют ***инверсию*** в перестановке, если большее число стоит левее меньшего, т.е. если $\alpha_i > \alpha_k$.

Количество пар, образующих инверсию в перестановке, называется ***числом инверсий в перестановке***.

2. Определение определителя

Пусть **A**=(a_{ij}) – квадратная матрица порядка n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Определителем матрицы* A** (***определителем порядка** n*) *называется число, равное алгебраической сумме* $n!$ *слагаемых, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *каждое слагаемое есть произведение n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца;*

2) *слагаемое берется со знаком «плюс», если число инверсий в перестановке первых индексов сомножителей и число инверсий в перестановке вторых индексов сомножителей в сумме дают четное число. В противном случае слагаемое берется со знаком «минус».*

Определитель матрицы **A** обозначают |**A**| , det**A** или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Элементы, строки, столбцы матрицы называются соответственно ***элементами, строками, столбцами определителя*** матрицы.

Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали.

Определитель третьего порядка равен алгебраической сумме шести произведений. Со знаком «плюс» берутся произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Со знаком «минус» берутся произведение элементов побочной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали. Т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

3. Свойства определителей

1) *При транспонировании матрицы ее определитель не меняется*.

2) *При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак*.

3) *Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя*.

Доказать самостоятельно

4) *Если все элементы k-й строки определителя* $|\mathbf{A}|$ *являются суммами двух элементов, то определитель равен сумме двух определителей* $|\mathbf{A_1}|$ *и* $|\mathbf{A_2}|$, *у которых все строки кроме k-й совпадают со строками определителя* $|\mathbf{A}|$, *а k-я строка в определителе* $|\mathbf{A_1}|$ *состоит из первых слагаемых, а в определителе* $|\mathbf{A_2}|$ *– из вторых слагаемых*.

Доказать самостоятельно

5) *Определитель равен нулю если*:

а) он имеет строку (столбец), состоящую из нулей;
б) он имеет хотя бы две одинаковые строки (столбца);
в) он имеет хотя бы две пропорциональные (т.е. отличающиеся множителем) строки (столбца);
г) хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).

Доказать самостоятельно

Замечание. i-ю строку (i-й столбец) определителя $|\mathbf{A}|$ называют линейной комбинацией его строк (столбцов) $i_1, i_2, \ldots, i_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, если каждый элемент i-й строки (столбца) является линейной комбинацией соответствующих элементов строк (столбцов) $i_1, i_2, \ldots, i_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Т.е.

$$a_{ij} = \lambda_1 \cdot a_{i_1 j} + \lambda_2 \cdot a_{i_2 j} + \ldots + \lambda_k \cdot a_{i_k j}, \quad j = \overline{1, n}$$

$$(\, a_{ji} = \lambda_1 \cdot a_{ji_1} + \lambda_2 \cdot a_{ji_2} + \ldots + \lambda_k \cdot a_{ji_k}, \quad j = \overline{1, n}\,)$$

6) Критерий равенства нулю определителя

Определитель равен нулю $\Leftrightarrow$ *хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).*

7) *Определитель не изменится, если к каждому элементу i-й строки (столбца) прибавить соответствующий элемент k-й строки (столбца), умноженный на число* $\alpha \neq 0$.

Доказать самостоятельно

8) *Если* **A** *и* **B** – *квадратные матрицы порядка n , то существует* **AB** *и* **BA**, *причем* $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{BA}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$.

4. Теорема Лапласа и ее следствие

Пусть **A** = (a_{ij}) – матрица размера $m \times n$.

Выберем в **A** произвольно k строк: $i_1, i_2, \ldots, i_k$

и k столбцов: $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов составим определитель M_k :

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Определитель M_k называют минором k-го порядка матрицы **A**.

Частные случаи:

а) любой элемент матрицы – минор первого порядка;

б) определитель квадратной матрицы порядка n – ее минор порядка n.

Пусть **A** = (a_{ij}) – квадратная матрица порядка n.

Выберем в **A** минор M_k (строки: $i_1, \ldots, i_k$, столбцы: $j_1, \ldots, j_k$).

Вычеркнем из матрицы **A** строки и столбцы, из элементов которых состоит минор M_k.

Определитель M_k^*, составленный из оставшихся элементов матрицы **A**, называется ***дополнительным минором к минору*** M_k.

Число $A_k = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k} \cdot M_k^*$ называется ***алгебраическим дополнением минора*** M_k.

Частный случай:

дополнительный минор элемента a_{ij} (его обозначают M_{ij}) – это определитель порядка $n - 1$, полученный из определителя |**A**| вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (его обозначают A_{ij}) – это произведение $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

ТЕОРЕМА (Лапласа). *Пусть в определителе порядка n выбрано k строк (столбцов) (где $1 \le k \le n-1$). Тогда определитель равен сумме произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.*

СЛЕДСТВИЕ 1 (теоремы Лапласа). *Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$|\mathbf{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in} \qquad (3)$$

$$|\mathbf{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj} \qquad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ 2 (теоремы Лапласа). *Сумма произведений элементов i-й строки (столбца) определителя на алгебраический дополнения соответствующих элементов k-й строки (столбца) этого определителя равна нулю*. Т.е.

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=0 \qquad (5)$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\ldots+a_{nj}A_{nk}=0 \qquad (6)$$