МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Ю.Б. Моржикова, Е.С. Бехтерева

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 537(076.5)
ББК 22.33я73
М79

Моржикова Ю.Б.
М79 Электростатика. Практикум по решению задач: учебное пособие / Ю.Б. Моржикова, Е.С. Бехтерева; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 94 с.

Пособие содержит четыре раздела, в каждый из них включено достаточное количество задач, трудность которых возрастает с увеличением порядкового номера. В начале каждого раздела представлены контрольные вопросы, необходимые формулы, а далее идет разбор самих задач. Все задачи сопровождаются подробными решениями, что позволяет осуществлять методическое руководство для проведения как групповых, так и индивидуальных занятий со студентами.

Предназначено для студентов технических специальностей вузов, а также может быть использовано преподавателями классических, технических, педагогических университетов в качестве методических материалов при подготовке к практическим занятиям.

УДК 537(076.5)
ББК 22.33я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
Ю.П. Кунашенко

Доктор физико-математических наук, профессор НИ ТГУ
О.Н. Улеников

ПРЕДИСЛОВИЕ

... ум заключается не только в знании,
но и в умении прилагать знание на деле ...
Аристотель

Любой раздел курса общей физики не обходится без практической части. *Решить задачу – это значит, опираясь на определения и законы физики, найти неизвестную величину через заданные по условию и табличные величины.* Именно решение задач вызывает у большинства студентов затруднения.

Цель практикума – помочь студентам освоить материал программы, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи, приобрести уверенность в самостоятельной работе.

Практикум является результатом многолетней работы по преподаванию курса «Электромагнетизм» студентам технических специальностей ТПУ и содержит четыре раздела. В каждый раздел включено достаточное количество задач, трудность которых возрастает с увеличением порядкового номера. В начале каждого раздела представлены контрольные вопросы, необходимые формулы, а далее идет разбор самих задач.

В основу практикума положены переработанные задачи из учебного пособия: А.Г. Чертов, А.А. Воробьев «Задачник по физике», а также других задачников и включены олимпиадные задачи. В решении задач жирным шрифтом обозначены векторные величины.

Авторы выражают искреннюю признательность и благодарность доценту НИ ТГУ Ревинской О.Г. за материалы, представленные в приложении.

ПРАКТИКУМ «ЭЛЕКТРОСТАТИКА»

ТЕМА 1. ЗАКОН КУЛОНА. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте закон Кулона. Запишите формулу для закона в векторной форме. Определите границы применимости этого закона.
2. Какой минимальный заряд известен в настоящее время?
3. Как взаимодействуют электрические заряды? Как направлены силы их взаимодействия?
4. Во сколько раз кулоновская сила отталкивания протонов больше силы их гравитационного притяжения?
5. Сформулируйте закон сохранения заряда.

Основные формулы

- Закон Кулона

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где q_1, q_2 – точечные заряды; r – расстояние между зарядами; k – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц, в системе СИ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{Н \cdot м^2}{Кл^2}$, ε_0 – электрическая постоянная, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{Ф}{м}$.

- Закон Кулона в векторной форме

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r,$$

где $\vec{e}_r$ – единичный вектор, направленный от заряда q_1 к заряду q_2.

- $\tau = \mathrm{d}q / \mathrm{d}l$ – линейная плотность заряда, измеряется в Кл/м;

  $\sigma = \mathrm{d}q / \mathrm{d}S$ – поверхностная плотность заряда, измеряется в Кл/м^2;

  $\rho = \mathrm{d}q / \mathrm{d}V$ – объемная плотность заряда, измеряется в Кл/м^3.

- Закон сохранения заряда

$$\sum_{i}^{n} q_i = const,$$

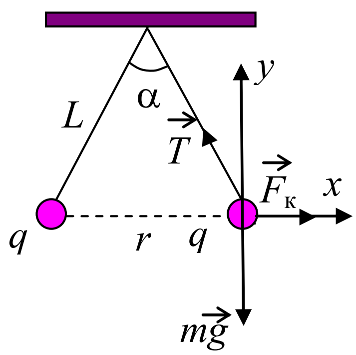
где $\sum_{i}^{n} q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, входящих в изолированную систему; n – число зарядов.

Взаимодействие точечных зарядов

Задача 1. Два шарика массой $m = 0{,}1$ г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной $L = 20$ см каждая. Получив одинаковый заряд, шарики разошлись так, что нити образовали между собой угол $\alpha = 60°$. Найти заряд каждого шарика.

Решение:

Расставим силы, действующие на шарики: это – сила Кулона $\boldsymbol{F_{кл}}$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$ и сила тяжести $\boldsymbol{mg}$. Поскольку шарики находятся в равновесии, то согласно второму закону Ньютона:



$$\boldsymbol{F_{кл} + T + mg = 0}.$$

В проекциях на ось OX и OY:

$$F_{кл} = T \sin\alpha/2,$$
$$mg = T \cos\alpha/2,$$

поделив одно на другое получим

$$F_{кл} = mg\, \mathrm{tg}\alpha/2. \quad (1)$$

С другой стороны кулоновская сила равна

$$F_{кл} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad (2)$$

где r – расстояние между зарядами, из треугольника $r = 2l \sin\alpha/2$. Приравняем формулы (1) и (2)

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 4l^2 \sin^2 \alpha/2} = mg\, tg\, \alpha/2,$$

$$q^2 = mg\, tg\, \alpha/2\; 4\pi\varepsilon_0 4l^2 \sin^2 \alpha/2,$$

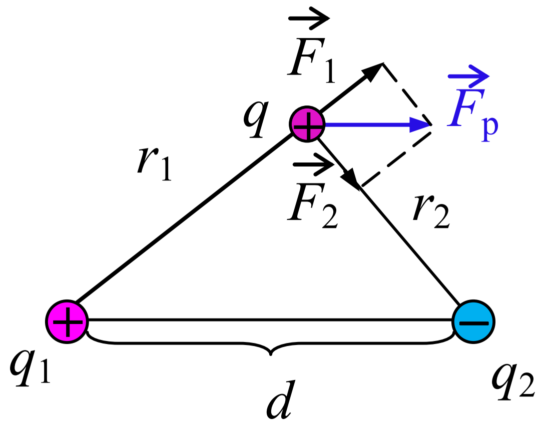
$$q = 4l \sin \alpha/2 \sqrt{mg\pi\varepsilon_0\, tg\, \alpha/2},$$

$$q = 4 \cdot 0{,}2 \cdot \sin 30° \sqrt{10^{-4} \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\, tg 30°} =$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}5 \sqrt{272{,}33 \cdot 10^{-16} \cdot 0{,}577} = 5 \cdot 10^{-8} = 50 нКл.$$

Задача 2. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1 = 1$ мкКл и $q_2 = -q_1$ равно 10 см. Определить силу F, действующую на точечный заряд $q = 0{,}1$ мкКл, удаленный на $r_1 = 6$ см от первого и на $r_2 = 8$ см от второго зарядов.

Решение.



По условию задачи видно, что заряды находятся в углах прямоугольного треугольника со сторонами 10 см, 8 см и 6 см ($10^2 = 8^2 + 6^2$). Расставим силы Кулона, действующие на заряд q со стороны зарядов q_1 и q_2, тогда результирующая сила $\boldsymbol{F}$ есть векторная сумма двух сил $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2},$$

модуль силы можно найти по теореме Пифагора (поскольку угол между силами составляет 90°):

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\ . \tag{1}$$

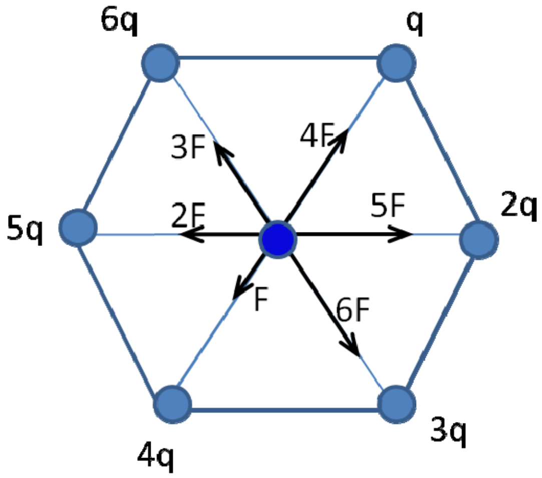
По закону Кулона силы $F_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq_1}{r_1^2}$ и $F_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq_2}{r_2^2}$, подставим в (1)

$$F = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_2}{r_2^2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qq_1\sqrt{\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4}}\,.$$

$$F = 9\cdot10^9\cdot10^{-6}\cdot10^{-7}\sqrt{\frac{1}{0{,}06^4} + \frac{1}{0{,}08^4}} = 0{,}0287\,H.$$

Задача 3. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 10$ см расположены точечные заряды q, $2q$, $3q$, $4q$, $5q$, $6q$ ($q = 0{,}1$ мкКл). Найти силу F, действующую на точечный заряд q, лежащий в плоскости шестиугольника и равноудаленный от его вершин.

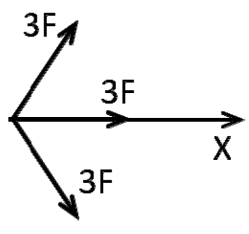
Решение.



Заряд, на который действует сила со стороны всех остальных зарядов, расположен в центре на пересечении диагоналей, причем он равноудален от каждого заряда. Расставим кулоновские силы и найдем результирующую как векторную сумму:

$$\boldsymbol{F_p} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} + \boldsymbol{F_4} + \boldsymbol{F_5} + \boldsymbol{F_6}.$$

По закону Кулона $F_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq_1}{r_1^2}$, т. к. $q_1 = q$, а $r_1 = a$, то $F_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{a^2} = F$, $F_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq_2}{r_2^2}$, т. к. $q_2 = 2q$, а $r_2 = a$, то $F_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2q^2}{a^2} = 2F_1$ и так далее. Для всех сил получим следующие соотношения: $F_2 = 2F$, $F_3 = 3F$, $F_4 = 4F$, $F_5 = 5F$ и $F_6 = 6F$. Сложив попарно вектора сил, получим



В проекциях на ось OX:

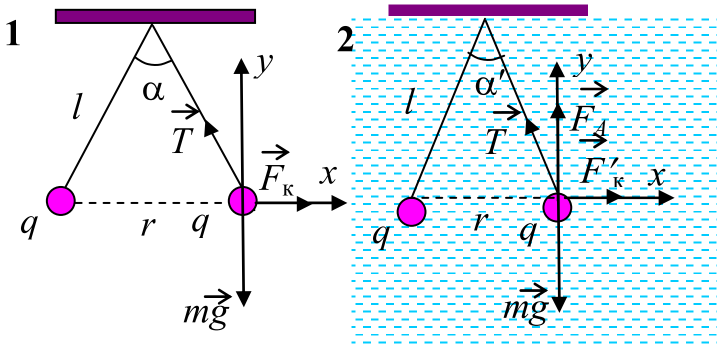
$$3F\cos 60° + 3F + 3F\cos 60° = F_p,$$

$$3F\cdot½ + 3F + 3F\cdot½ = 6F = F_p,$$

$$F_p = 6\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2} = 6\cdot 9\cdot 10^9\cdot\frac{\left(10^{-7}\right)^2}{0{,}1^2} = 54\cdot 10^{-3}\,H = 54\,мH.$$

Задача 4. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α. Шарики погружаются в масло плотностью $\rho_0 = 8\cdot10^2$ кг/м^3. Определить диэлектрическую проницаемость ε масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков в масло остается неизменным. Плотность материала шариков $\rho = 1{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

Решение.



$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{F_к}{mg}$$

$$tg\frac{\alpha'}{2} = \frac{F_к'}{mg - F_A},$$

$$F_к' = \frac{F_к}{\varepsilon}$$

Т. к. по условию задачи угол отклонения не меняется $\alpha = \alpha'$, то

$$\frac{F_к}{mg} = \frac{F_к'}{mg - F_A},$$

$$\frac{F_к}{mg} = \frac{F_к}{\varepsilon(mg - F_A)},$$

$$\frac{F_к}{\rho Vg} = \frac{F_к}{\varepsilon(\rho Vg - \rho_0 Vg)},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon(\rho - \rho_0)} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{\rho}{(\rho - \rho_0)}}.$$

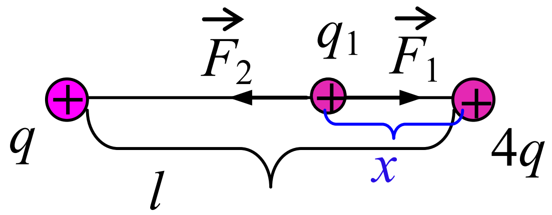
$$\varepsilon = \frac{1{,}6\cdot10^3}{(1{,}6\cdot10^3 - 0{,}8\cdot10^3)} = 2.$$

Задача 5. Два положительных точечных заряда q и $4q$ закреплены на расстоянии $l = 60$ см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд q_1

так, чтобы он находился в равновесии. Указать, какой знак должен иметь этот заряд для того, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещения заряда возможны только вдоль прямой, проходящей через закрепленные заряды.

Решение.

Заряды закреплены



Поместим заряд q_1 на расстоянии x от заряда $4q$. Расставим кулоновские силы $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, действующие на этот заряд. Для того чтобы заряды были в равновесии необходимо, чтобы сила F_1, действующая от заряда q на заряд q_1 была равна силе F_2, действующей от заряда $4q$ на заряд q_1.

$$F_1 = F_2,$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{(l-x)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4qq_1}{x^2},$$

$$\frac{1}{(l-x)^2} = \frac{4}{x^2},$$

$$x^2 - 4l^2 + 8lx - 4x^2 = 0,$$

$$-3x^2 + 8lx - 4l^2 = 0,$$

$$D = 64l^2 - 4\cdot 3\cdot 4l^2 = 16l^2,$$

$$x_1 = \frac{-8l-4l}{-6} = 2l,\ x_2 = \frac{-8l+4l}{-6} = \frac{2}{3}l,$$

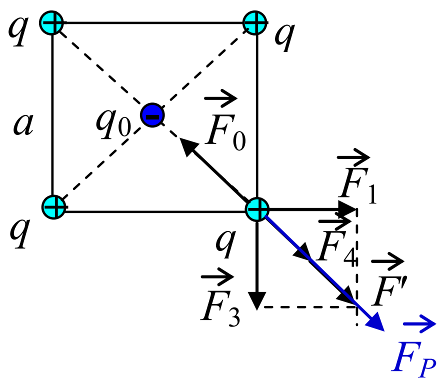
т. к. x не может быть больше l, то

$$x = \frac{2}{3}l = \frac{2}{3}\cdot 60 = 40\,см.$$

Для устойчивого равновесия q_1 должен быть *положительным*. Если он сместится к $4q$, то сила отталкивания возрастет, а со стороны заряда q сила отталкивания уменьшится, следовательно q_1 вернется на свое место.

Задача 6. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды $q = 0{,}3$ нКл каждый. Какой отрицательный заряд q_0 нужно поместить в центре квадрата, чтобы сила взаимного отталкивания положительных зарядов была уравновешена силой притяжения отрицательного заряда?

Решение.



Т. к. в вершинах квадрата находятся одинаковые заряды, то достаточно рассмотреть все силы, действующие на один заряд (на другие будет также). Расставим кулоновские силы, действующие на заряд в вершине 2 и найдем результирующую как векторную сумму:

$$\boldsymbol{F_p} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_0} + \boldsymbol{F_3} + \boldsymbol{F_4}.$$

По закону Кулона $F_1 = F_3$, $F_4 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{2a^2}$ (диагональ квадрата равна $r_{24} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$), $F_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2qq_0}{a^2}$ (половина диагонали квадрата равно $r_{24}/2 = a\sqrt{2}/2$). Так как все заряды находятся в равновесии, то результирующая сила будет равна нулю. Спроецируем все силы на ось OX:

$$2F_1 \cos 45° + F_4 - F_0 = 0,$$

$$F_0 = 2F_1 \cos 45° + F_4,$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q|q_0|}{a^2} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2a^2},$$

$$2q|q_0| = q^2\sqrt{2} + \frac{q^2}{2},$$

$$|q_0| = q\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4}\right) = 0{,}29 \text{ нКл}.$$

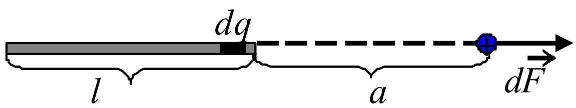
Это интересно

- *Первым установил закон взаимодействия точечных зарядов английский ученый Кавендиш. Но своих работ по электричеству Кавендиш не опубликовал. Более ста лет работы пролежали в библиотеке Кембриджского университета в Англии, пока их не извлек Максвелл и не напечатал. Произошло это через много лет после того, как Кулоном был установлен закон взаимодействия зарядов.*
- Заряд в 1 Кл очень велик. Сила взаимодействия двух точечных зарядов по 1 Кл, расположенных на 1 м друг от друга равна $9 \cdot 10^9$ Н, примерно равна весу египетских пирамид. Поэтому на практике обычно пользуются дольными единицами кулона: 1 нКл = 10^{-9} Кл, 1 мкКл = 10^{-6} Кл.

Взаимодействие точечного заряда с зарядом, равномерно распределенным

Задача 7. Тонкий стержень длиной $l = 10$ см равномерно заряжен. Линейная плотность τ заряда равна 1 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 20$ см от ближайшего его конца находится точечный заряд $q = 100$ нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

Решение.



Закон Кулона позволяет вычислить силу взаимодействия точечных зарядов. По условию задачи, один из зарядов не является точечным, а представляет собой заряд, равномерно распределенный по длине стержня. Разобьем стержень на множество точечных зарядов dq и тогда по закону Кулона сила взаимодействия между зарядами q и dq

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dq}{r^2}, \tag{1}$$

где r – расстояние между зарядами. Стержень заряжен с линейной плотностью заряда, которая равна $\tau = \dfrac{dq}{dr}$, тогда точечный заряд $dq = \tau\ dr$, подставим в (1)

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\tau dr}{r^2}. \tag{2}$$

Так как точечный заряд dq можно выбрать на любом участке стержня, то r будет меняться от a до $a + l$. Чтобы определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда, необходимо выражение (2) проинтегрировать в этих пределах

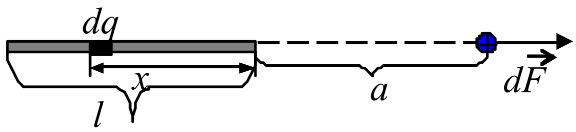
$$F = \int_a^{a+l} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\tau dr}{r^2} = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^{a+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \Big|_a^{a+l} \right) =$$

$$= \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{a+l} + \frac{1}{a} \right) = \frac{q\tau l}{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)}.$$

$$F = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 100 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}1}{0{,}2(0{,}2+0{,}1)} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} H = 1{,}5 мH.$$

Задача 8. Тонкий бесконечно длинный стержень несет равномерно распределенный заряд. На продолжении оси стержня, на расстоянии $a = 10$ см от ближайшего его конца находится точечный заряд $q = 40$ нКл, который взаимодействует со стержнем с силой $F = 6$ мкН. Определить линейную плотность τ заряда на стержне.

Решение.



Закон Кулона позволяет вычислить силу взаимодействия точечных зарядов. По условию задачи, один из зарядов не является точечным, а представляет собой заряд, равномерно распределенный по длине стержня. Разобьем стержень на множество точечных зарядов dq и тогда по закону Кулона сила взаимодействия между зарядами q и dq

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\,dq}{(a+x)^2}, \tag{1}$$

где $(a + x)$ – расстояние между зарядами. Стержень заряжен с линейной плотностью заряда, которая равна $\tau = \dfrac{dq}{dx}$, тогда точечный заряд $dq = \tau\,dx$, подставим в (1)

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\tau dx}{(a+x)^2}. \tag{2}$$

Так как точечный заряд dq можно выбрать на любом участке стержня, то x будет меняться от 0 до ∞, поскольку стержень бесконечно длинный. Чтобы определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда, необходимо выражение (2) проинтегрировать в этих пределах

$$F = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\tau dx}{(a+x)^2} = \frac{q\,\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x)^2} = \frac{q\,\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{(a+x)}\Bigg|_0^\infty\right) =$$

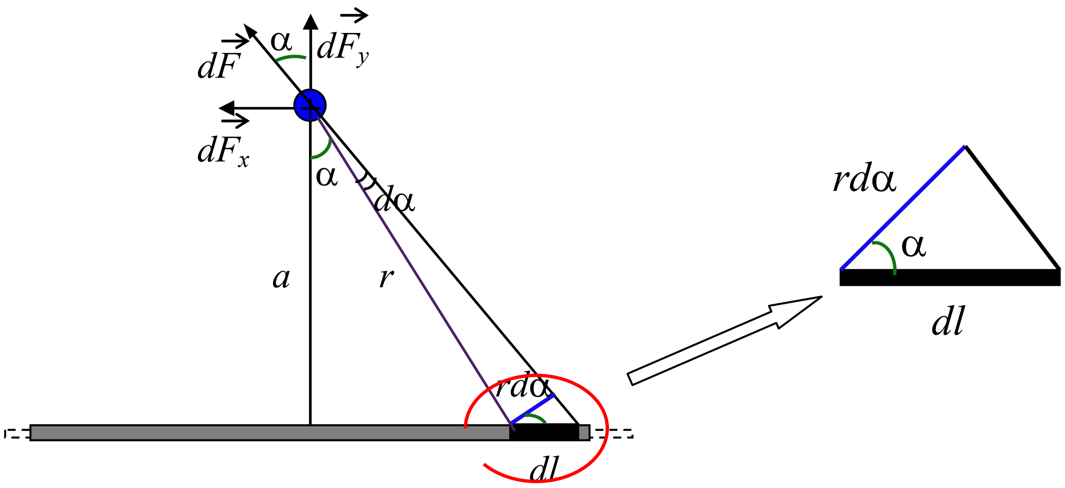
$$= \frac{q\,\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{a+\infty}+\frac{1}{a}\right) = \frac{q\,\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Из последнего выражения определим линейную плотность заряда

$$\tau = \frac{4\pi\varepsilon_0 Fa}{q} = \frac{6\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}1}{9\cdot 10^{9}\cdot 40\cdot 10^{-9}} = 1{,}67\cdot 10^{-9}\,\frac{Кл}{м}.$$

Задача 9. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ = 10 мкКл/м. Какова сила F, действующая на точечный заряд q = 10 нКл, находящийся на расстоянии a = 20 см от стержня, вблизи его середины?

Решение.



Закон Кулона позволяет вычислить силу взаимодействия точечных зарядов. По условию задачи стержень заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = \dfrac{dq}{dl}$, поэтому, чтобы найти силу взаимодействия стержня с точечным зарядом, выделим на нем бесконечно малый элемент dl, который имеет заряд $dq = \tau\, dl$, сила взаимодействия заряда q и dq

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau\,dl}{r^2}, \qquad (1)$$

где r – расстояние от элемента до заряда. Из маленького треугольника $dl = \dfrac{rd\alpha}{\cos\alpha}$, подставим это выражение в (1):

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau\, rd\alpha}{r^2\cos\alpha} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau\, d\alpha}{r\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Из большого треугольника $a = r\cos\alpha$, тогда (2) перепишем в виде:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}d\alpha. \qquad (3)$$

Следует иметь в виду, что $d\boldsymbol{F}$ – вектор, поэтому, прежде чем интегрировать разложим его на две составляющие $dF_x = dF\sin\alpha$, $dF_y = dF\cos\alpha$. Подставляя значение dF из выражения (3) в эти формулы, найдем:

$$F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\left(-\cos\alpha\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\left(-\cos\pi/2 + \cos\left(-\pi/2\right)\right) = 0.$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\left(\sin\alpha\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\left(\sin\pi/2 - \sin\left(-\pi/2\right)\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\left(1+1\right) = \frac{2q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Известно, что модуль вектора F можно найти $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = F_y$, следовательно, сила взаимодействия стержня с зарядом равна

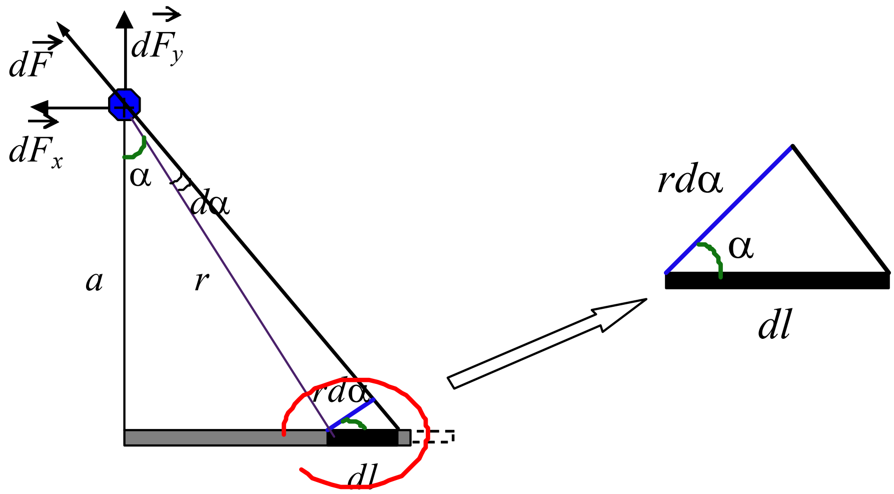
$$F = \frac{2q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 10^{-8}\cdot 10^{-5}}{0,2} = 9\cdot 10^{-3}\,H = 9\,мH.$$

Задача 10. Тонкий очень длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда, равной 10 мкКл/м. На перпендикуляре к оси стержня, восставленном из конца его, находится точечный заряд q = 10 нКл. Расстояние a от конца стержня до заряда равно 20 см. Найти силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

Решение.

Закон Кулона позволяет вычислить силу взаимодействия точечных зарядов. По условию задачи стержень заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = \dfrac{dq}{dl}$, поэтому, чтобы найти силу взаимодействия стержня с точечным зарядом, выделим на нем бесконечно малый элемент dl, который имеет заряд $dq = \tau\, dl$, сила взаимодействия заряда q и dq

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau\,dl}{r^2}, \qquad (1)$$



где r – расстояние от элемента до заряда. Из маленького треугольника $dl = \dfrac{rd\alpha}{\cos\alpha}$, подставим это выражение в (1):

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau\, r d\alpha}{r^2\cos\alpha} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau\, d\alpha}{r\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Из большого треугольника $a = r\cos\alpha$, тогда (2) перепишем в виде:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}d\alpha\,. \qquad (3)$$

Следует иметь в виду, что $d\boldsymbol{F}$ – вектор, поэтому, прежде чем интегрировать разложим его на две составляющие $dF_x = dF\sin\alpha$, $dF_y = dF\cos\alpha$. Подставляя значение dF из выражения (3) в эти формулы, найдем:

$$F_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\int_0^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\sin\alpha\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\left(\sin\pi/2 - \sin 0\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}(1-0) = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

$$F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\int_0^{\pi/2}\sin\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\left(-\cos\alpha\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

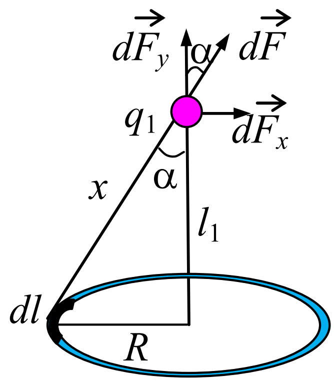
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\left(\cos\pi/2 - \cos 0\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{a}\left(0-1\right) = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Известно, что модуль вектора F можно найти $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = F_y\sqrt{2}$, следовательно, сила взаимодействия стержня с зарядом равна

$$F = \frac{\sqrt{2}q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\sqrt{2}\cdot 9\cdot 10^9\cdot 10^{-8}\cdot 10^{-5}}{0,2} = 6,37\cdot 10^{-3} H = 6,37 мH.$$

Задача 11. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $Q = 0{,}1$ мкКл. На перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его середины, находится точечный заряд q_1= 10 нКл. Определить силу F, действующую на точечный заряд q_1 со стороны заряженного кольца, если он удален от центра кольца на: 1) l_1= 20 см; 2) l_2 = 2 м.

Решение.



1) Выделим на кольце бесконечно малый элемент dl, который несет заряд dq, определим силу взаимодействия dF этого заряда с точечным зарядом q_1

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 dq}{x^2}, \qquad (1)$$

где x – расстояние от элемента dl до точечного заряда q_1.

Так как $d\boldsymbol{F}$ вектор, разложим его на две компоненты $d\boldsymbol{F_x}$ и $d\boldsymbol{F_y}$. В силу симметрии векторная сумма всех компонент $d\boldsymbol{F_x}$ даст ноль (т. к. составляющие сил двух диаметрально противоположных элементов взаимно уничтожаются), поэтому

$$F=\int dF_y=\int dF\cos\alpha\,. \qquad (2)$$

Из рисунка cos α = l_1/x, подставим это выражение и (1) в (2)

$$F=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{x^2}\frac{l_1}{x}dq=\frac{q_1l_1}{4\pi\varepsilon_0x^3}\int dq=\frac{q_1l_1Q}{4\pi\varepsilon_0x^3},$$

из рисунка $x=\sqrt{l_1^2+R^2}$, тогда сила взаимодействия

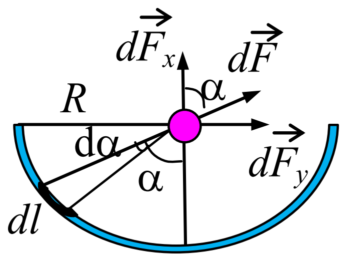
$$F=\frac{q_1Ql_1}{4\pi\varepsilon_0\left(l_1^2+R^2\right)^{3/2}}=9\cdot10^9\frac{10^{-8}\cdot10^{-7}\cdot0{,}2}{\left(0{,}2^2+0{,}1^2\right)}=161\cdot10^{-6}H=161 мкН.$$

2) В этом случае расстояние от кольца до точечного заряда l_2 = 2 м, тогда заряженное кольцо можно считать как точечный заряд, поскольку $l_2 \gg R$. Тогда силу взаимодействия можно найти по закону Кулона, как для точечных зарядов

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1Q}{l_2^2}=9\cdot10^9\frac{10^{-8}\cdot10^{-7}}{4}=2{,}25\cdot10^{-6}H=2{,}25 мкН.$$

Задача 12. Тонкое полукольцо радиусом R = 10 см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью τ = 1 мкКл/м. В центре кривизны полукольца находится заряд q = 20 нКл. Определить силу F взаимодействия точечного заряда и заряженного полукольца.

Решение.



Выделим на полукольце бесконечно малый элемент dl, который при взаимодействии с зарядом q, можно рассматривать как точечный. Тогда по закону Кулона

$$dF=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dq}{R^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\tau dl}{R^2}, \qquad (1)$$

где R – расстояние от элемента dl до точечного заряда q. Из рисунка $dl = R\,d\alpha$, тогда (1) перепишем в виде

$$dF=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\tau d\alpha}{R}. \qquad (2)$$

Так как $\boldsymbol{dF}$ вектор, разложим его на две компоненты $\boldsymbol{dF_x}$ и $\boldsymbol{dF_y}$. В силу симметрии векторная сумма всех компонент $\boldsymbol{dF_x}$ даст ноль (т. к. составляющие сил двух диаметрально противоположных элементов взаимно уничтожаются), поэтому

$$F = \int dF_y = \int dF \cos\alpha \,. \qquad (3)$$

Подставим в (3) (2) и учтем, что угол меняется в пределах $\alpha_1 = -\pi/2$ до $\alpha_2 = \pi/2$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{R}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{R}\sin\alpha\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{R}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau}{R}\big(1-(-1)\big) = \frac{2q\tau}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 20\cdot 10^{-9}\cdot 10^{-6}}{0{,}1} = 3{,}6\cdot 10^{-3} H = 3{,}6 мH.$$

ТЕМА 2. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СМЕЩЕНИЕ

Вопросы для самоконтроля

1. Какая величина характеризует силовое действие электростатического поля на пробный заряд в рассматриваемой точке?
2. Сформулируйте определение напряженности электрического поля. Какова единица напряженности?
3. Как напряженность поля, созданного точечным зарядом, зависит от расстояния? Запишите её выражение.
4. Как зависит напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, от расстояния до плоскости? Нарисуйте график.
5. Что такое силовые линии напряженности электрического поля?
6. Где начинаются и заканчиваются линии напряженности электрического поля?
7. Какое электростатическое поле называют однородным?
8. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.
9. Как зависит от расстояния напряженность поля, созданного заряженной сферой? Почему внутри сферы напряженность поля равна нулю?
10. Как можно рассчитать напряженность поля распределенного заряда?

Основные формулы

- Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{np}},$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на пробный заряд q_{np}, помещенный в данную точку поля.

- Сила, действующая на всякий точечный заряд q в точке поля с напряженностью $\vec{E}$

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

- Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом на расстоянии r от заряда

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость вещества, для воздуха ε ≈ 1.

- Принцип суперпозиции электрических полей, согласно которому напряженность $\vec{E}$ результирующего поля, созданного несколькими точечными зарядами, равна векторной (геометрической) сумме напряженностей складываемых полей

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i.$$

- Поток вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля:
  а) через произвольную поверхность S, помещенную в неоднородное поле,

$$\Phi_E = \int_A E\cos\alpha dS, \text{ или } \Phi_E = \int_S E_n dS,$$

где α – угол между вектором напряженности $\vec{E}$ и нормалью $\vec{n}$ к элементу поверхности; dS – площадь элемента поверхности; E_n – проекция вектора напряженности на нормаль;

  б) через плоскую поверхность, помещенную в однородное электрическое поле,

$$\Phi_E = ES\cos\alpha.$$

- Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS,$$

где интегрирование ведется по всей поверхности.

- Теорема Остроградского-Гаусса

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i,$$

где $\sum_{i=1}^{n} q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности; n – число зарядов.

- Электрическое смещение $\vec{D}$ связано с напряженностью $\vec{E}$ электрического поля соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}.$$

Это соотношение справедливо только для изотропных диэлектриков.

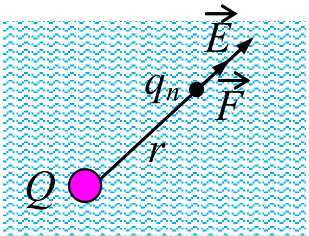
Характерные значения напряженности электростатического поля

Источник электростатического поля	Напряженность поля, Н/Кл	Источник электростатического поля	Напряженность поля, Н/Кл
Фоновое излучение космического пространства	$3 \cdot 10^{-6}$	Солнечный свет	1000
Электропроводка	10^{-2}	Гроза	10 000
Радиоволны	10^{-1}	Пробой воздуха	$3 \cdot 10^{6}$
Электрические часы	1,5	Мембрана клетки	10^{7}
Стереосистема	10	Импульсный лазер	$5 \cdot 10^{11}$
Гелий-неоновый лазер	100	Протон в атоме водорода	$6 \cdot 10^{11}$
Атмосфера (ясная погода)	150	Поверхность пульсара	10^{14}
Брызги воды в душе	800	Поверхность ядра урана	$2 \cdot 10^{21}$

Напряженность поля точечных зарядов

Задача 1. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого точечным зарядом Q = 10 нКл на расстоянии r = 10 см от него. Диэлектрик – масло (ε = 2,2).

Решение.



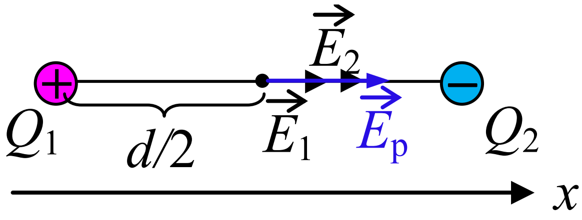
Заряд Q создает вокруг себя поле. Поместим на расстоянии r пробный точечный заряд q_n. Напряженность электрического поля, созданная зарядом Q на расстоянии r равна $E = \dfrac{F}{q_n}$, где F – кулоновская сила взаимодействия точечных зарядов $F = \dfrac{Qq_n}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, тогда напряженность $E = \dfrac{Qq_n}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\dfrac{1}{q_n} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, где ε = 2,2 – диэлектрическая проницаемость масла.

$$E = 9\cdot 10^9 \frac{10^{-8}}{2,2\cdot 0,1^2} = 4,09\cdot 10^3 \frac{В}{м} = 4,09\frac{кВ}{м}.$$

Задача 2. Расстояние d между двумя точечными зарядами $Q_1 = +8$ нКл и $Q_2 = -5,3$ нКл равно 40 см. Вычислить напряженность E поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему равна напряженность, если второй заряд будет положительным?

Решение.

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность $\boldsymbol{E_p}$ электрического поля в искомой точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей $\boldsymbol{E_1}$ и $\boldsymbol{E_2}$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\boldsymbol{E_p} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2}$.



Напряженности электрического поля, создаваемого в вакууме первым и вторым зарядами, соответственно равны

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \text{ и } E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}.$$

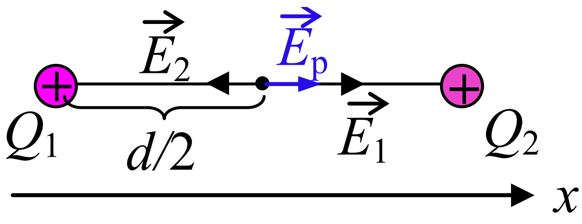
Вектор $\boldsymbol{E_1}$ (см. рис.) направлен по силовой линии от заряда Q_1**,** так как заряд $Q_1 > 0$; вектор $\boldsymbol{E_2}$ направлен также по силовой линии, но к заряду Q_2, так как $Q_2 < 0$. Модуль вектора E_p найдем как сумму проекций напряженностей E_1 и E_2 на ось x

$$E_p = E_1 + E_2,$$

$$E_p = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{4}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(|Q_1| + |Q_2|\right),$$

$$E_p = 9\cdot 10^9 \frac{4}{0,4^2}(8+5,3)\cdot 10^{-9} = 2993\frac{В}{м} \approx 2,99\frac{кВ}{м}.$$

В случае, когда второй заряд положительный направление вектора $\boldsymbol{E_2}$ изменится на противоположное (см. рис.).



Модуль вектора E_p найдем как сумму проекций напряженностей E_1 и E_2 на ось x

$$E_p = E_1 - E_2,$$

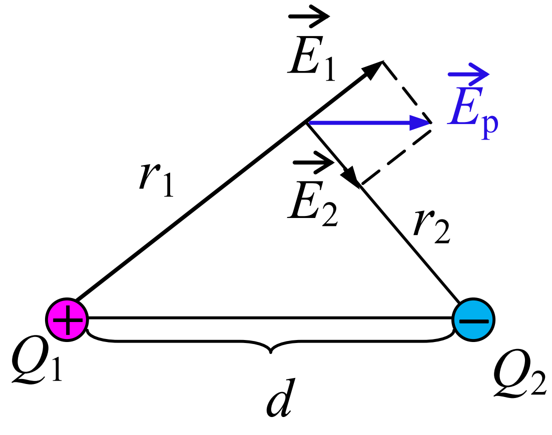
$$E_p = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{4}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(|Q_1| - |Q_2|\right),$$

$$E_p = 9\cdot 10^9 \frac{4}{0{,}4^2}(8-5{,}3)\cdot 10^{-9} = 607{,}5\frac{В}{м}.$$

Задача 3. Расстояние d между двумя точечными зарядами $Q_1 = +9$ нКл и $Q_2 = -16$ нКл равно 5 см. Вычислить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 3$ см и от второго на $r_2 = 4$ см.

Решение.

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность $\boldsymbol{E_p}$ электрического поля в искомой точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей $\boldsymbol{E_1}$ и $\boldsymbol{E_2}$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\boldsymbol{E_p} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2}$.



Напряженности электрического поля, создаваемого в вакууме первым и вторым зарядами, соответственно равны

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = k\frac{|Q_1|}{r_1^2} \text{ и } E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = k\frac{|Q_2|}{r_2^2}.$$

Вектор $\boldsymbol{E_1}$ (см. рис.) направлен по силовой линии от заряда Q_1**,** так как заряд $Q_1 > 0$; вектор $\boldsymbol{E_2}$ направлен также по силовой линии, но к заряду Q_2, так как $Q_2 < 0$. Так как по условию задачи выполняется соотношение $d^2 = r_1^2 + r_2^2 \quad \left(5^2 = 3^2 + 4^2\right)$, то треугольник прямоугольный. Тогда модуль вектора напряженности равен:

$$E_p = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(k\frac{|Q_1|}{r_1^2}\right)^2 + \left(k\frac{|Q_2|}{r_2^2}\right)^2} = k\sqrt{\left(\frac{|Q_1|}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{|Q_2|}{r_2^2}\right)^2},$$

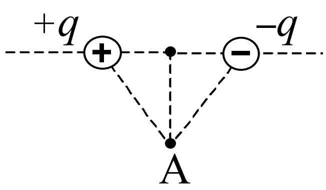
$$E_p = 9\cdot 10^9\sqrt{\left(\frac{9\cdot 10^{-9}}{3^2\cdot 10^{-4}}\right)^2 + \left(\frac{16\cdot 10^{-9}}{4^2\cdot 10^{-4}}\right)^2} =$$

$$= 9\cdot 10^9\sqrt{2}\cdot 10^{-5} = 12{,}7\cdot 10^4\,\frac{В}{м} = 127\,\frac{кВ}{м}.$$

Это интересно

- *Не следует думать, что* ***силовые линии*** *– это существующие в действительности образования. Они лишь помогают наглядно представить распределения поля в пространстве.*
- Силовые линии электростатического поля ***не замкнуты***
- *Густота силовых линий пропорциональна модулю вектора напряженности, т. е. больше вблизи заряженных тел, где напряженность поля также больше.*
- электрическое поле – это ***векторное поле, его*** важными характеристиками являются ***поток вектора и циркуляция.***
- Силовые линии ***однородного поля*** представляют собою параллельные прямые, густота которых всюду одна и та же.

Проверь себя



1. Напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом на расстоянии r от него, равна 100 В/м. *Напряженность поля на расстоянии* 2 r *от него равна* ________*В/м.* (25)

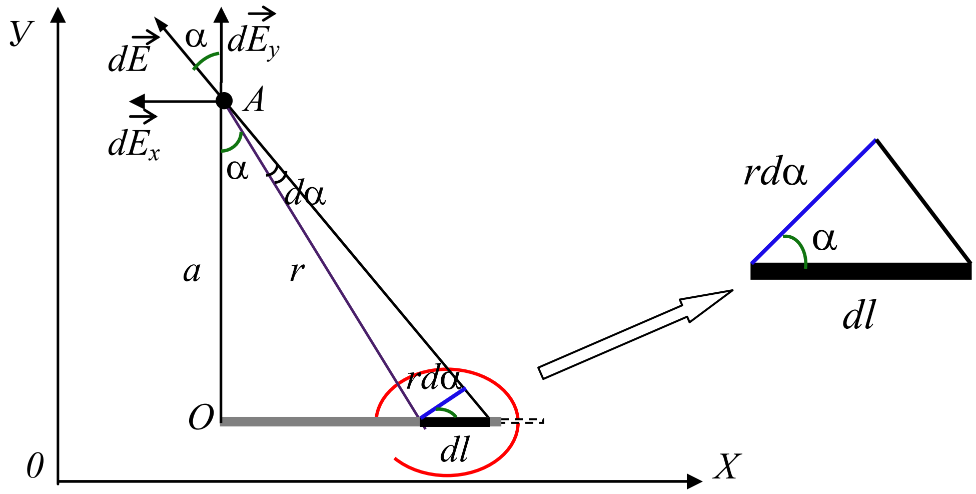
2. Какое направление (1, 2, 3 или 4) имеет *вектор напряженности электрического поля*, созданного двумя разноименными зарядами, равными по модулю, в точке А?

1) 2) 3) 4)

Напряженность тел с линейной плотностью заряда

Задача 4. Длинная нить равномерно заряжена с линейной плотностью τ. Найти напряженность поля в точке A, лежащей вблизи нити на перпендикуляре, восстановленном из конца нити, на расстоянии a от этого конца.

Решение.



Выберем оси OX и OY, как показано на рисунке. Нить расположена вдоль оси OX**,** точка O – конец нити, из которого восстановлен перпендикуляр. Напряженность E поля, создаваемого нитью, требуется найти в точке A.

Разделим нить на бесконечно малые элементы dl. Заряд dq, находящийся на элементе dl, можно считать точечным $dq = \tau\, dl$. Рассмотрим элемент dl находящийся от точки A на расстоянии r. $\mathbf{dE}$ –вектор напряженности поля в точке A, создаваемый этим элементом, модуль которого равен

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\tau d\ell}{r^2}. \qquad (1)$$

Рассчитать напряженность E в точке A, взяв линейный интеграл от dE нельзя, т. к. векторы $\mathbf{dE}$**,** создаваемые различными элементами dl, имеют различные направления и заменить векторную сумму $\sum d\vec{E}$ алгебраической, т. е. применить интегрирование, невозможно.

Разложим $\mathbf{dE}$ на составляющие, $\mathbf{dE_x}$ и $\mathbf{dE_y}$ и выберем в качестве переменной величины угол α $dE_x = dE\sin\alpha$, $dE_y = dE\cos\alpha$.

Из маленького треугольника $dl = \dfrac{rd\alpha}{\cos\alpha}$, подставим это выражение в (1), получим:

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\tau}{r^2}\frac{rd\alpha}{\cos\alpha} = k\frac{\tau}{r}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Из большого треугольника $a = r\cos\alpha$, тогда $dE = k\frac{\tau}{a}d\alpha$, следовательно $dE_x = k\frac{\tau}{a}\sin\alpha d\alpha$ и $dE_y = k\frac{\tau}{a}\cos\alpha d\alpha$.

$$E_x = \int_0^\infty dE_x = k\frac{\tau}{a}\int_o^{\pi/2}\sin\alpha d\alpha = k\frac{\tau}{a},$$

$$E_y = \int_0^\infty dE_y = k\frac{\tau}{a}\int_o^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = k\frac{\tau}{a}.$$

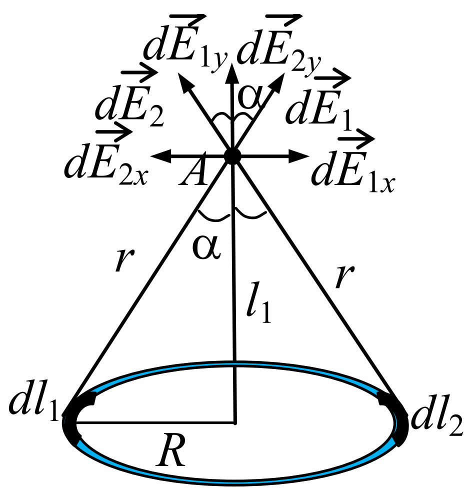
E_x и E_y – проекции на оси OX и OY искомого вектора напряженности $\boldsymbol{E}$ в точке A, модуль вектора напряженности равен $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$,

$$E = \sqrt{\left(k\frac{\tau}{a}\right)^2 + \left(k\frac{\tau}{a}\right)^2} = \sqrt{2\left(k\frac{\tau}{a}\right)^2} = \sqrt{2}k\frac{\tau}{a}.$$

Т. к. проекции E_x и E_y равны, это означает, что вектор напряженности от всей нити в заданной точке направлен под углом 45° к вертикали.

Задача 5. Тонкое кольцо радиуса R = 8 см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью τ = 10 нКл/м. Определить напряженность электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние r = 10 см.

Решение.



Разобьем кольцо на бесконечно малые элементы dl. Заряд каждого элемента dq можно считать точечным $dq = \tau\, dl$. Рассмотрим элементы

dl_1 и dl_2. Элемент dl_1 создает в исследуемой точке A поле с напряженностью $dE_1 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, а элемент dl_2 с напряженностью $dE_2 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, отсюда $dE_1 = dE_2 = dE$.

Разложим $d\boldsymbol{E}_1$ и $d\boldsymbol{E}_2$ на составляющие по осям OX и OY. Как видно из чертежа, сумма всех составляющих, параллельных оси OX, будет равна нулю $\sum d\vec{E}_x = 0$.

Остается просуммировать все составляющие по оси OY

$$E = \int dE_y, \ dE_y = dE\cos\alpha .$$

Находим $\cos\alpha$, как видно из чертежа, $\cos\alpha = \dfrac{l_1}{r} = \dfrac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r}$, тогда напряженность

$$E = \int dE_y = \int dE\cos\alpha = \int \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r}\frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

$$E = \frac{\tau\sqrt{r^2 - R^2}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{\tau\sqrt{r^2 - R^2}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}2\pi R = \frac{\tau R\sqrt{r^2 - R^2}}{2\varepsilon_0 r^3}.$$

$$E = \frac{10^{-8}\cdot 8\cdot 10^{-2}\sqrt{10^{-2} - 64\cdot 10^{-4}}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-3}}\frac{В}{м} = 2{,}71\cdot 10^3\frac{В}{м} = 2{,}71\frac{кВ}{м}.$$

Напряженность тел с поверхностной плотностью заряда

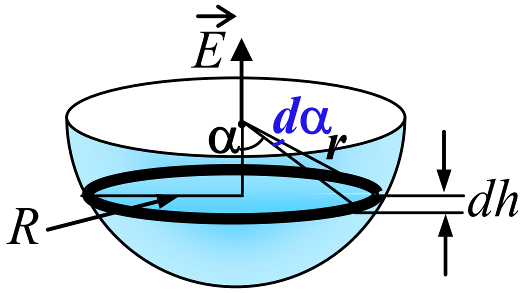
Задача 6. Полусфера несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. Найти напряженность E электрического поля в геометрическом центре полусферы.

Решение.

Разобьем полусферу на элементарные кольца бесконечно малой высоты dh, из рисунка $dh = rd\alpha$, где r – расстояние от центра полусферы до кольца. Заряд каждого кольца $dq = \sigma ds$, где ds – площадь боковой поверхности кольца (на чертеже эта поверхность заштрихована), которая равна $ds = 2\pi R dh = 2\pi R r d\alpha$, где R – радиус кольца. Заряд кольца $dq = \sigma 2\pi R r d\alpha$, где $R = r\sin\alpha$.

Напряженность $\boldsymbol{E}$ поля, создаваемого заряженной полусферой в точке O, равна сумме напряженностей полей, создаваемых элементарными кольцами в рассматриваемой точке.

Напряженность $d\boldsymbol{E}$ поля, создаваемая кольцом бесконечно-малой высоты в центре полусферы (в точке O) равна (см. задачу № 15).



$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha = \frac{\sigma 2\pi R r d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha = \frac{\sigma r\sin\alpha}{2\varepsilon_0 r}\cos\alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\alpha\cos\alpha d\alpha,$$

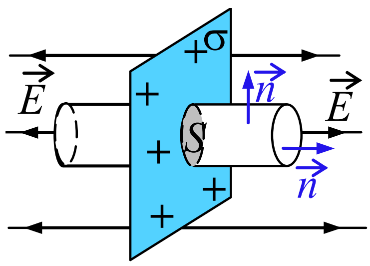
$$E = \int dE = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\alpha\cos\alpha d\alpha = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin 2\alpha d\alpha = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

$$E = \frac{1\cdot 10^{-9}}{4\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 28{,}25\frac{В}{м}.$$

Интеграл $\int \sin 2\alpha d\alpha = -\frac{1}{2}\cos 2\alpha$.

Задача 7. Определить напряженность E электростатического поля, создаваемого в вакууме равномерно заряженной бесконечной плоскостью с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$.

Решение.



Очевидно, что в данной задаче вектор напряженности $\boldsymbol{E}$ будет перпендикулярен плоскости и в симметричных относительно плоскости точках он будет одинаков по модулю. Для нахождения поля плоскости применим теорему Гаусса. В качестве замкнутой поверхности выберем прямой цилиндр, основания которого параллельны плоскости, а ось перпендикулярна ей (см. рисунок).

Согласно теореме Гаусса для поля в вакууме, поток вектора напряженности электростатического поля

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i, \qquad (1)$$

где E_n – проекция вектора $\boldsymbol{E}$ на нормаль $\boldsymbol{n}$ к заряженной плоскости; $\sum_{i=1}^{N} q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, охватываемых произвольной замкнутой поверхностью S.

Посчитаем поток напряженности электростатического поля через выбранную поверхность, поскольку вектор нормали $\boldsymbol{n}$ направлен по-разному, разобьем нашу поверхность на боковую поверхность цилиндра и на 2 основания цилиндра, тогда

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_{S_{бок}} \vec{E}d\vec{S}_{бок} + 2\int_{S_{осн}} \vec{E}d\vec{S}_{осн} = \int_{S_{бок}} EdS_{бок}\cos 90^0 + 2\int_{S_{осн}} EdS_{осн}\cos 0^0 = 2ES_{осн}$$

Заряд, заключенный внутри построенной цилиндрической поверхности, равен

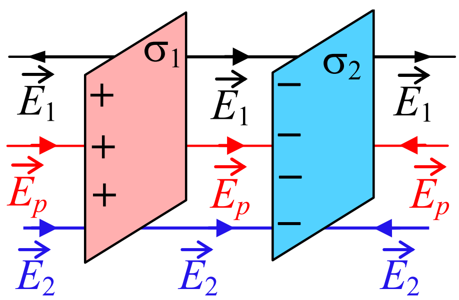
$$dq = \sigma dS, \quad \sum_{i=1}^{N} q_i = \int \sigma dS = \sigma S_{осн}.$$

Тогда, согласно теореме Гаусса (1),

$$2ES_{осн} = \frac{\sigma S_{осн}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}.$$

Задача 8. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 2$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = -5$ нКл/м^2. Определить напряженность E поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

Решение.



Согласно принципу суперпозиции, напряженность $\boldsymbol{E_p}$ результирующего поля, создаваемого обеими плоскостями, равно геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых каждой заряженной плоскостью (независимо от присутствия другой плоскости),

$$\boldsymbol{E_p} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2}.$$

Слева и справа от плоскостей линии напряженности направлены навстречу друг другу, следовательно

$$E_{p(слева)} = E_2 - E_1,\ E_{p(справа)} = E_1 - E_2,$$

а между плоскостями линии напряженности сонаправлены, следовательно

$$E_p = E_1 + E_2.$$

Напряженности электростатических полей, создаваемых первой и второй плоскостями (см. задачу № 17)

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0},\ E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Учитывая записанные формулы, получаем результирующую напряженность полей

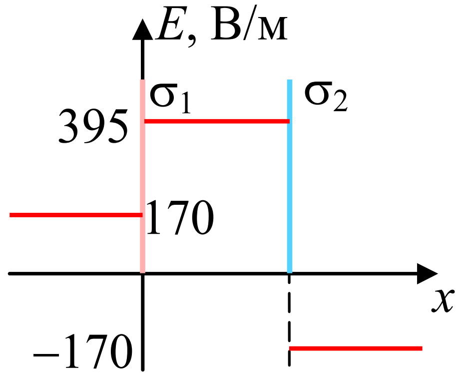
$$E_{p(слева)} = \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_1|}{2\varepsilon_0} = \frac{(5-2)\cdot 10^{-9}}{2\varepsilon_0} = \frac{3\cdot 10^{-9}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 170\frac{В}{м}.$$

$$E_{p(справа)} = \frac{|\sigma_1|}{2\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} = \frac{(2-5)\cdot 10^{-9}}{2\varepsilon_0} = \frac{-3\cdot 10^{-9}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = -170\frac{В}{м},$$

здесь знак минус означает, что вектор напряженности $\boldsymbol{E}$ направлен против оси X (на рисунке справа и слева вектор направлен в разные стороны).

$$E_{p(между)} = \frac{|\sigma_1|}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} = \frac{(2+5)\cdot 10^{-9}}{2\varepsilon_0} = \frac{7\cdot 10^{-9}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 395\frac{В}{м}.$$

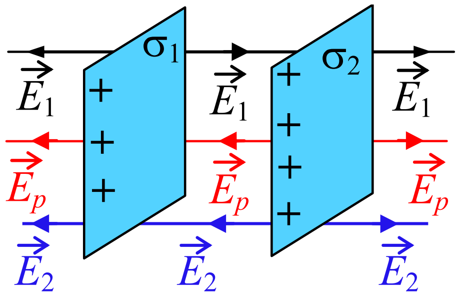
График изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.



Задача 9. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 1$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = 3$ нКл/м^2. Определить напряженность E поля: 1) между пластинами; 2) вне пла-

стин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.

Решение.



Согласно принципу суперпозиции, напряженность $\boldsymbol{E}_p$ результирующего поля, создаваемого обеими плоскостями, равно геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых каждой заряженной плоскостью (независимо от присутствия другой плоскости),

$$\boldsymbol{E}_p = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2.$$

Слева и справа от плоскостей линии напряженности сонаправлены, следовательно

$$E_{p(слева)} = -E_2 - E_1 = -(E_2 + E_1),\ E_{p(справа)} = E_1 + E_2,$$

а между плоскостями линии напряженности направлены навстречу друг другу, следовательно

$$E_{p(между)} = E_1 - E_2.$$

Напряженности электростатических полей, создаваемых первой и второй плоскостями (см. задачу № 17)

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0},\ E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Учитывая записанные формулы, получаем результирующую напряженность полей

$$E_{p(слева)} = -\left(\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\right) = -\frac{(3+1)\cdot 10^{-9}}{2\varepsilon_0} = -\frac{4\cdot 10^{-9}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = -226\,\frac{В}{м},$$

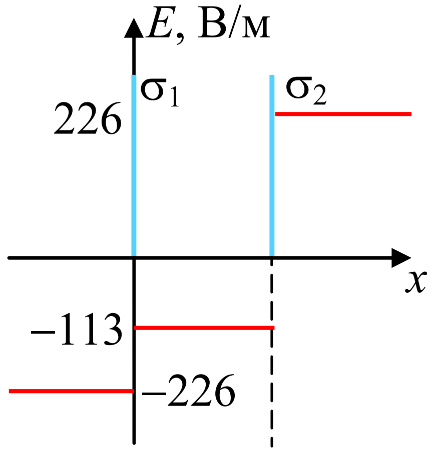
здесь знак минус означает, что вектор напряженности $\boldsymbol{E}$ направлен против оси X (на рисунке справа и слева вектор направлен в разные стороны).

$$E_{p(справа)} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{(1+3)\cdot 10^{-9}}{2\varepsilon_0} = \frac{4\cdot 10^{-9}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 226\,\frac{В}{м},$$

$$E_{p(между)} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{(1-3)\cdot 10^{-9}}{2\varepsilon_0} = -\frac{2\cdot 10^{-9}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = -113\,\frac{В}{м},$$

здесь знак минус означает, что вектор напряженности $\boldsymbol{E}$ направлен против оси X.

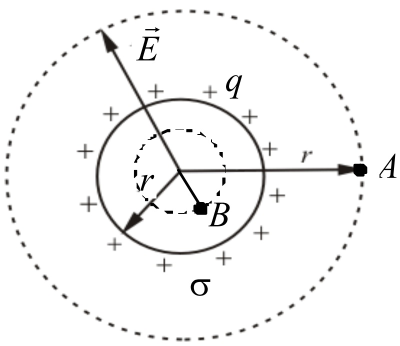
График изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной пластинам.



Задача 10. Сплошная металлическая сфера радиусом $R = 20$ см несет равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстоянии $r_1 = 16$ см и $r_2 = 36$ см от центра сферы. Построить график зависимости E (r).

Решение.

Поле, создаваемое сферической поверхностью радиуса R, заряженной с постоянной поверхностной плотностью σ обладает центральной симметрией. Это означает, что направление вектора $\boldsymbol{E}$ в любой точке проходит через центр сферы, а значение напряженности является функцией расстояния r от центра сферы.



Найдем напряженность поля, созданную заряженной сферой в точках A и B. Через точки A и B проведем сферические поверхности и найдем поток вектора напряженности через эти поверхности.

Точка B находится внутри заряженной сферической поверхности, на расстоянии r_1 от центра ($r_1 < R$). Сферическая поверхность, проведенная через эту точку, не будет содержать внутри заряда. Следовательно, по теореме Гаусса $\oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$, напряженность в точке B будет равна нулю $E = 0$ ($r_1 < R$).

Найдем напряженность поля, созданного заряженной сферической поверхностью в точке A, находящейся на расстоянии r_2 от центра сферы. Окружим заряженное тело замкнутой сферической поверхностью, радиуса r_2, проходящей через точку A (см. рис.).

Для всех точек этой поверхности $E_n = E(r)$. Внутрь поверхности попадает весь заряд q, создающий рассматриваемое поле. Следовательно, $E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (так как $\oint(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$).

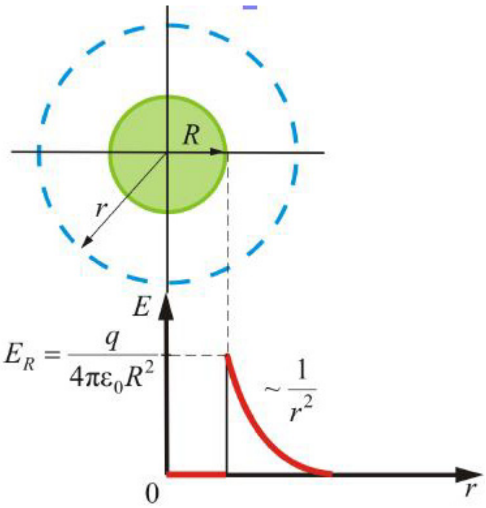
Таким образом, напряженность поля в точках, расположенных на расстоянии $r_2 > R$, равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2}.$$

Если известна поверхностная плотность заряда σ, то $q = \sigma 4\pi R^2$, тогда напряженность будет равна

$$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Таким образом, получили, что поле внутри равномерно заряженной сферы равно нулю, а поле вне заряженной сферической поверхности имеет такой же вид, как поле точечного заряда q, находящегося на расстоянии r от точки A. Причем в точке $r = R$ функция $E(r)$ терпит разрыв, физически это означает, что если мы приближаемся к этой точке изнутри сферы, то поле стремится к нулю, а если снаружи, то поле в пределе принимает определенное значение.



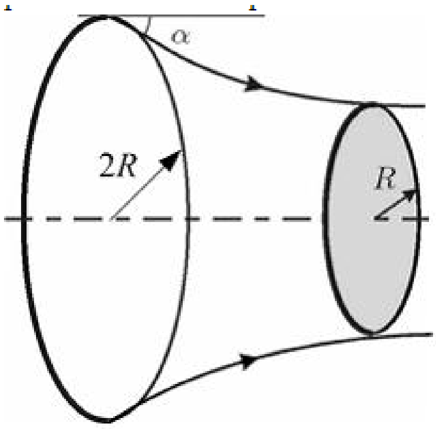
$$\boxed{E = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}, & r \geq R \end{cases}.}$$

Посчитаем значение напряженности электрического поля в точках, находящихся на расстоянии $r_1 = 16$ см и $r_2 = 36$ см от центра сферы:

$$E(r_1) = 0,$$

$$E\left(r_2\right) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{1\cdot 10^{-9}\cdot 0{,}2^2}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}36^2} = 34{,}87\,\frac{В}{м}.$$

Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.

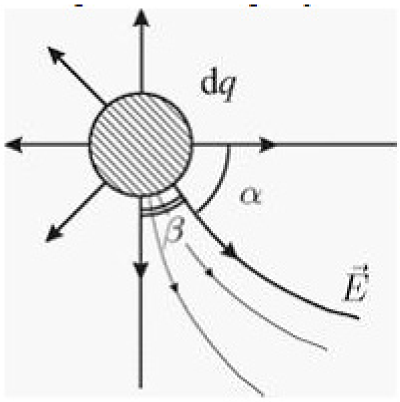


Олимпиадная задача 11. Электрическое поле создано равномерно заряженным с линейной плотностью τ тонким кольцом радиуса $2R$. На оси кольца расположен незаряженный тонкий диск радиуса R (см. рисунок).

1. Если силовые линии, выходящие из кольца под углом $\alpha = 45°$ к его оси, касаются края диска, E_n – проекция вектора напряженности $\boldsymbol{E}$ электрического поля заряженного кольца на нормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхности элементарного участка диска площадью dS, то для потока этого вектора через поверхность диска площадью $S = \pi R^2$ справедливо выражение вида …
2. Если силовые линии, выходящие из кольца под углом $\alpha = 45°$ к его оси, касаются края диска, то поток Φ^* вектора напряженности электрического поля заряженного кольца через произвольное параллельное диску сечение трубки, ограниченной этими силовыми линиями, равен …
3. Если силовые линии, выходящие из кольца под углом $\alpha = 45°$ к его оси, касаются края диска, то поток вектора напряженности Φ_E электрического поля заряженного кольца через поверхность диска равен …
4. Если силовые линии, выходящие из кольца под углом $\alpha = 45°$ к его оси, касаются края диска, то сила взаимодействия заряженных кольца и диска определяется выражением вида …

Решение.

1. Поле, создаваемое равномерно заряженным кольцом, является неоднородным. Поток вектора напряженности Φ_E в этом случае выражается интегралом $\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_S E_n dS,}$ где E_n – проекция вектора напряженности **E** на нормаль **n** к поверхности элементарного участка диска площадью dS, зависящая от положения этого участка на диске. Интегрирование выполняется по всей пронизываемой линиями напряженности поверхности диска площадью $S = \pi R^2$.



2. Поток $\Phi_{полн}$, создаваемый всем заряженным кольцом, в соответствии с принципом суперпозиции, складывается из потоков $d\Phi_{полн}$, создаваемых элементами заряженного кольца. Электрическое поле элемента кольца в непосредственной близости от него почти не отличается от поля равномерно заряженной прямолинейной нити. Силовые линии этого поля изображены на рисунке.

Так как угол $\alpha = 45°$, то через диск проходят лишь те силовые линии, которые выходят из кольца под углом $0° \le \beta \le \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = 45°.$ Вследствие симметрии поля вокруг прямолинейной заряженной нити этим углам β соответствует лишь 1/8 полного потока поля нити, равного согласно принципу суперпозиции и теореме Гаусса $\Phi_{полн} = \int d\Phi_{полн} = \int \dfrac{dq}{\varepsilon_0} = \int\limits_0^{4\pi R} \dfrac{\tau dl}{\varepsilon_0} = \dfrac{4\pi R\tau}{\varepsilon_0},$ где $dq = \tau\, dl$ – заряд малого участка нити длиной dl, а ε_0 – электрическая постоянная.

В результате поток Φ^* вектора напряженности электрического поля заряженного кольца через произвольное параллельное диску сечение трубки, ограниченной силовыми линиями, которые проходят через кольцо и край диска, равен $\boxed{\Phi^* = \dfrac{1}{8}\Phi_{полн} = \dfrac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0}.}$

3. Из теоремы Гаусса для электростатического поля в вакууме следует, что поток поля остается постоянным внутри выделенной в пространстве трубки, образующими которой являются силовые линии. В самом деле, в объеме такой трубки, ограниченной двумя сечениями, нет электрических зарядов, и, в соответствии с теоремой Гаусса, поток через границу этого объема равен нулю. Поток через боковую поверхность трубки равен нулю по определению силовых линий. Следовательно, потоки через сечения трубки равны по модулю. Применим свойство постоянства потока. Учитывая, что поток вектора напряженности Φ_E неоднородного поля равномерно заряженного кольца через поверхность диска площадью $S = \pi R^2$ выражается интегралом $\Phi_E = \oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_S E_n dS$, (см. ответ задания № 1) и поток Φ^* этого вектора через произвольное параллельное диску сечение, ограниченной силовыми линиями, выходящими из кольца под углом $\alpha = 45°$ к его оси и касающимися края диска, равен $\Phi^* = \dfrac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0}$ (см. ответ задания № 2), получим искомый поток $\boxed{\Phi_E = \dfrac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0}}$.

4. Из соображения симметрии следует, что искомая сила направлена перпендикулярно плоскости диска. Поэтому для ее нахождения следует сложить лишь те составляющие сил, приложенных к каждому заряду dq элемента диска, которые направлены перпендикулярно плоскости диска:

$$F = \int E_n dq = \sigma \int E_n dS = \sigma \Phi_E,$$

где $\sigma = \dfrac{dq}{dS} = \dfrac{q}{\pi R^2}$ – поверхностная плотность равномерно заряженного диска зарядом q, dq – заряд элементарного участка заряженной поверхности диска площадью dS, E_n – проекция вектора напряженности электрического поля заряженного кольца на нормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхности диска, $\Phi_E = \dfrac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0}$ – поток напряженности электрического поля заряженного кольца через поверхность диска площадью S (см. ответ задания № 3). Здесь учтено, что диск при вычислении потока рассматривался в указанной ситуации исключительно как геометрический объект (не содержащий каких-либо зарядов) и не рассматривались тонкости определения и вычисления потока электростатического поля через заряженную поверхность, которых в этой ситуации много. Например, казалось бы, заряд на плоскости не может повлиять на поток в месте своего расположения (так как из него выходит «поровну» силовых линий как по одну, так и по другую сторону плоскости диска). Но эти силовые линии затем могут «развернуться» и пересечь диск в другом месте, создав там дополнительный поток. Однако все подобные эффекты соответствуют только внутренним силам взаимодействия между частями диска и не влияют на силу взаимодействия диска с кольцом.

В результате сила взаимодействия определяется выражением:

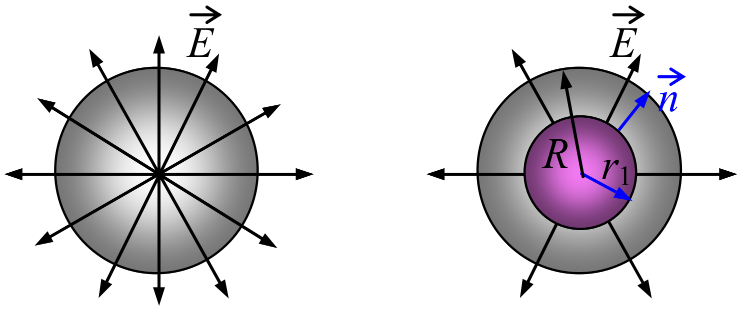
$$F = \frac{\sigma\pi R\tau}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{\pi R^2}\frac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0} = \frac{q\tau}{2R\varepsilon_0}.$$

Напряженность тел с объемной плотностью заряда

Задача 12. Заряд равномерно распределен по объему шара радиуса R из непроводящего материала с объемной плотностью заряда ρ. Найти напряженность поля в точках расположенных на расстояниях: 1) $r_1 < R$; 2) $r_2 > R$. Построить график зависимости $E\,(r)$.

Решение.

Поле, созданное таким шаром центрально-симметричное, поэтому напряженность поля можно найти, используя теорему Гаусса.



1) ***Поле внутри шара $r_1 < R$.*** Выберем в качестве замкнутой поверхности S концентрическую сферу радиуса r_1. Согласно теореме Гаусса для поля в вакууме, поток вектора напряженности электростатического поля

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\,, \qquad (1)$$

где E_n – проекция вектора $\boldsymbol{E}$ на нормаль $\boldsymbol{n}$ к заряженной плоскости; $\sum_{i=1}^{N} q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, охватываемых произвольной замкнутой поверхностью S.

Найдем заряды, находящиеся внутри поверхности радиуса r_1 через объемную плотность заряда ρ

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V \rho dV = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r_1^3.$$

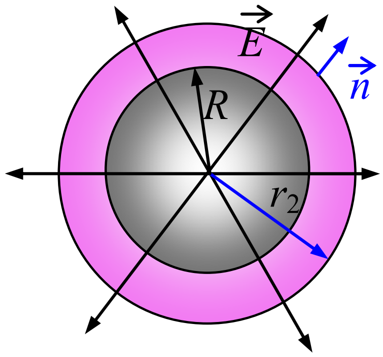
Поток вектора $\boldsymbol{E}$ через поверхность S

$$\oint_S E_n dS = \int_S E\cos 0° dS = ES = E4\pi r_1^2,$$

по теореме Гаусса

$$E4\pi r_1^2 = \rho\frac{4}{3}\pi r_1^3 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r_1.$$

2) *Поле вне шара $r_2 > R$.* Выберем в качестве замкнутой поверхности S' концентрическую сферу радиуса r_2.



Заряды, находящиеся внутри поверхности радиуса r_2

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V \rho dV = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Поток вектора $\boldsymbol{E}$ через поверхность S'

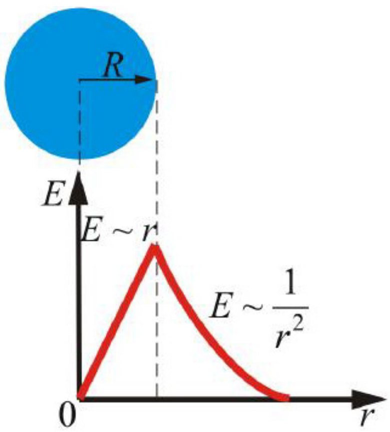
$$\oint_{S'} E_n dS = \int_{S'} E\cos 0° dS = ES' = E4\pi r_2^2,$$

по теореме Гаусса

$$E4\pi r_2^2 = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_2^2}.$$

Таким образом, получили, что поле внутри равномерно заряженного шара растет линейно с расстоянием r от его центра, поле вне шара – поле убывает с расстоянием r по такому же закону, как у точечного заряда

$$\boxed{E = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r, & r < R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, & r > R \end{cases}.}$$

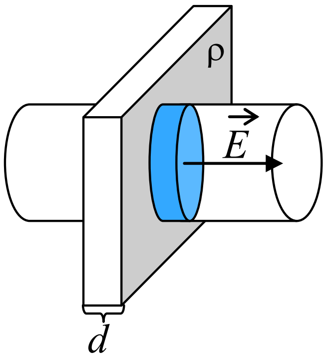


Построим график зависимости $E(r)$, для этого исследуем поведение функции. В точке $r = R$ (r стремится к R слева) напряженность $E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}R$, в точке $r = R$ (r стремится к R справа) напряженность $E = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0}$.

Следовательно, функция $E(r)$ разрыва не имеет, график представлен на рисунке.

Задача 13. Большая плоская, пластина толщиной $d = 1$ см несет заряд, равномерно распределенный: по объему с объемной плотностью $\rho = 100$ нКл/м^3. Найти напряженность E электрического поля вблизи центральной части пластины вне ее, на малом расстоянии от поверхности.

Решение.



Будем считать, что поле от плоской пластины толщиной d вблизи ее поверхности однородно. Тогда определим величину напряженности поля, используя теорему Гаусса. Для этого выберем замкнутую поверхность в виде цилиндра. Найдем поток вектора напряженности через эту поверхность

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_{S_{бок}} \vec{E}d\vec{S}_{бок} + 2\int_{S_{осн}} \vec{E}d\vec{S}_{осн} = \int_{S_{бок}} EdS_{бок}\cos 90^0 + 2\int_{Sосн} EdS_{осн}\cos 0^0 =$$
$$= 0 + 2ES_{осн} = 2ES_{осн}.$$

Суммарный заряд, внутри выбранной поверхности

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int \rho dV = \rho V = \rho S_{осн} d.$$

По теореме Гаусса $2ES_{осн} = \dfrac{\rho S_{осн} d}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}.$

Задача 14. Длинный парафиновый ($\varepsilon = 2$) цилиндр радиусом $R = 2$ см несет заряд, равномерно распределенный по объему с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м^3. Определить напряженность E и смещение D электрического поля в точках, находящихся от оси цилиндра на расстоянии: 1) $r_1 = 1$ см; 2) $r_2 = 3$ см. Обе точки равноудалены от концов цилиндра. Построить графики зависимостей E (r) и D (r).

Решение.

В случае наличия диэлектрика, вводят вспомогательную величину – вектор электрического смещения $\boldsymbol{D}$, который связан с вектором напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\, \varepsilon\, \boldsymbol{E}, \qquad (1)$$

где ε_0 – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость среды. Сначала, используя теорему Гаусса для вектора электрического смещения ***D*** находят его величину, а затем, зная связь между ***E*** и ***D***, находят напряженность электрического поля.

Поле, создаваемое длинным цилиндром, обладает осевой симметрией. Это означает, что направление вектора ***E*** и ***D*** в любой точке проходит через ось цилиндра, а значение напряженности и электрического смещения является функцией расстояния r от оси цилиндра и постоянно на поверхности.

1) ***Поле внутри цилиндра*** $\boldsymbol{r_1 < R}$**.** Выберем в качестве замкнутой поверхности S цилиндр радиуса r_1 и высотой h. Согласно теореме Гаусса для вектора ***D***, поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов охватываемых этой поверхностью

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{N} q_i,, \tag{1}$$

где D_n – проекция вектора ***D*** на нормаль ***n*** к заряженной плоскости; $\sum_{i=1}^{N} q_i$ – алгебраическая сумма свободных зарядов, охватываемых произвольной замкнутой поверхностью S.

Найдем заряды, находящиеся внутри поверхности радиуса r_1 через объемную плотность заряда ρ

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V \rho dV = \rho V = \rho\pi r_1^2 h.$$

Поток вектора ***D*** через поверхность S

$$\oint_S D_n dS = \int_{S_{бок}} DdS\cos 0° + 2\int_{S_{осн}} DdS\cos 90° = DS_{бок} + 0 = D2\pi r_1 h,$$

по теореме Гаусса

$$D2\pi r_1 h = \rho\pi r_1^2 h \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\rho}{2} r_1.$$

По формуле (1), напряженность поля внутри цилиндра $\boxed{E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0\varepsilon} r_1}$.

2) ***Поле вне цилиндра*** $\boldsymbol{r_2 > R}$**.** Выберем в качестве замкнутой поверхности S цилиндр радиуса r_2 и высотой h. Рассчитаем поток вектора ***D*** через поверхность S

$$\oint_S D_n dS = \int_{S_{бок}} DdS\cos 0° + 2\int_{S_{осн}} DdS\cos 90° = DS_{бок} + 0 = D2\pi r_2 h.$$

Суммарный заряд, охватываемый этой поверхностью

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V \rho dV = \rho V = \rho\pi R^2 h.$$

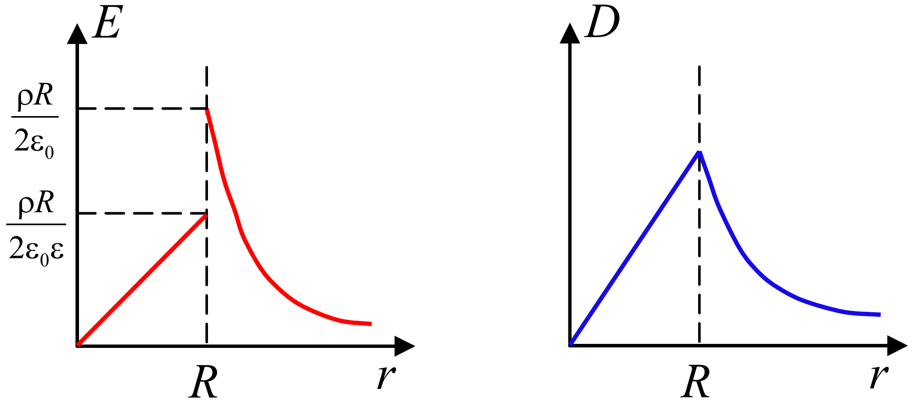
по теореме Гаусса

$$D 2\pi r_2 h = \rho\pi R^2 h \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\rho R^2}{2r_2}.$$

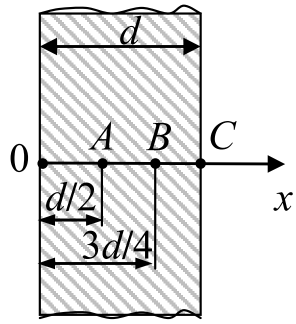
По формуле (1), напряженность поля вне цилиндра $\boxed{E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r_2}}$, заметим, что вне цилиндра нет диэлектрика, следовательно $\varepsilon = 1$.

Итак $$\boxed{D = \begin{cases} \frac{\rho}{2} r, \\ \frac{\rho R^2}{2r}, \end{cases} \qquad E = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0\varepsilon} r, & r < R \\ \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}, & r > R \end{cases}.}$$.

Построим график зависимости $D(r)$, для этого исследуем поведение функции. В точке $r = R$ (r стремится к R слева) смещение $D = \frac{\rho}{2} R$, в точке $r = R$ (r стремится к R справа) смещение $E = \frac{\rho R^2}{2r} = \frac{\rho R^2}{2R} = \frac{\rho R}{2}$. Следовательно, функция $D(r)$ разрыва не имеет, график представлен на рисунке. Построим график зависимости $E(r)$, для этого исследуем поведение функции. В точке $r = R$ (r стремится к R слева) напряженность $E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0\varepsilon} R$, в точке $r = R$ (r стремится к R справа) напряженность $E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0}$. Поскольку значения в одной и той же точке получились разные, следовательно, функция $E(r)$ имеет разрыв в этой точке, график представлен на рисунке.

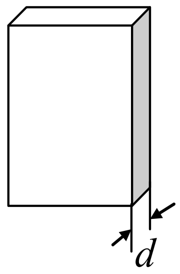


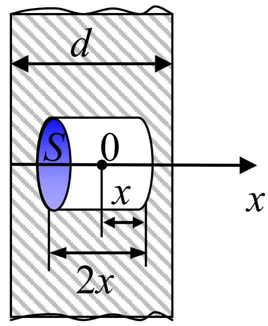
Задача 15. Лист стекла толщиной $d = 2$ см равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho = 1$ мкКл/м^3. Определить напряженность E и смещение D электрического поля в точках A, B, C (см. рис.), Построить график зависимости $E(x)$ и $D(x)$ (ось x координат перпендикулярна поверхности листа стекла).



Решение.

Поскольку стекло – это диэлектрик, то сначала найдем вектор электрического смещения $\boldsymbol{D}$, а затем, используя связь $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{E}$, определим напряженность.





Выберем ось X, так как показано на рисунке, начало координат поместим в середину пластинки.

Т. к. пластинка заряжена равномерно, следовательно, поле симметрично, а вектора $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ направлены вдоль оси OX. В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндр высотой $2x$ с площадью основания S. Рассчитаем поток вектора $\boldsymbol{D}$ через эту поверхность

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \int_{S_{бок}} DdS\cos 90^\circ + 2\int_{S_{осн}} DdS\cos 0^\circ = 0 + 2DS = 2DS.$$

Суммарный заряд, охватываемый этой поверхностью

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V \rho dV = \rho V = \rho 2xS.$$

По теореме Гаусса

$$2DS = \rho 2xS \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \rho x.}$$

Если выбрать систему координат посередине, то в точке A $x = 0$, следовательно и $D_A = 0$ и $E_A = 0$.

В точке B $x = d/4$, следовательно и $D_B = \rho d/4 = 5$ нКл/м^2 и $E_B = \rho d/4\varepsilon\varepsilon_0 = 80{,}8$ В/м.

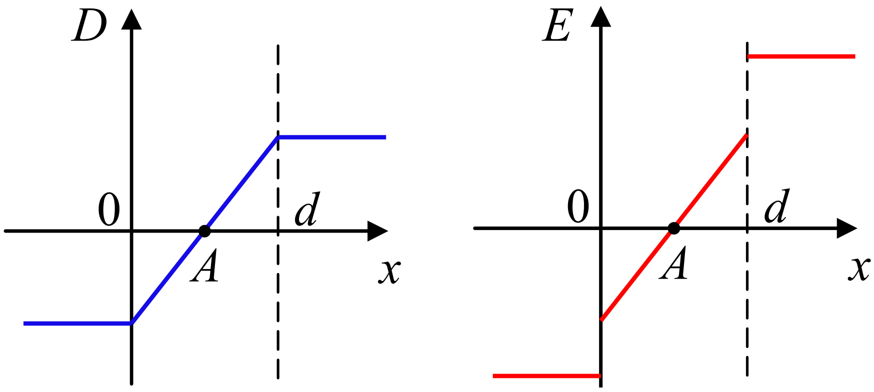
В точке C $x = d/2$, следовательно и $D_C = \rho d/2 = 10$ нКл/м^2 и $E_C = \rho d/2\varepsilon\varepsilon_0 = 162$ В/м.

Вне пластины электрическое смещение равно

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i,$$

$$2DS = \rho dS,$$
$$D = \frac{\rho d}{2} = const,$$
видим, что функция постоянна, и имеет то же значение, что и в точке C (зависимость $D\,(x)$ см. на рисунке).

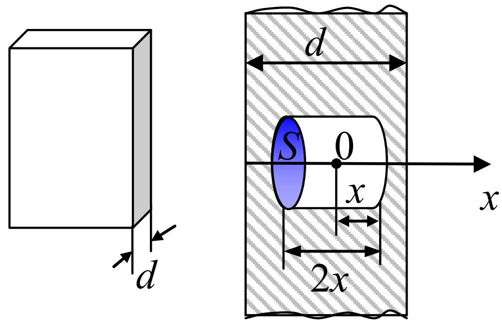
Определим напряженность вне пластинки, заметим, что в этой области диэлектрическая проницаемость среды ε равна 1
$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} = const,$$
видим, что функция постоянна, однако имеет другое значение, чем в точке C, следовательно на границе раздела, функция терпит разрыв (зависимость $E\,(x)$ см. на рисунке).



Задача 16. Пластина толщиной $d = 2$ см имеет электрический заряд, распределенный так, что его объемная плотность зависит от координаты x по закону $\rho = \rho_0\left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right)\right]$, где ρ_0=10 нКл/м^3, x – измеряется от середины пластины в поперечном направлении. Определить напряженность поля на краю пластины. Построить график зависимости напряженности поля от координаты x.

Решение.

Выберем ось X, так как показано на рисунке, начало координат поместим в середину пластинки. Т. к. пластинка заряжена равномерно, следовательно, поле симметрично, а вектор $\boldsymbol{E}$ направлен вдоль оси OX. В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндр высотой $2x$ с площадью основания S.



Рассчитаем поток вектора $\boldsymbol{E}$ через эту поверхность

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \int_{S_{бок}} EdS\cos 90^\circ + 2\int_{S_{осн}} EdS\cos 0^\circ = 0 + 2ES = 2ES.$$

Суммарный заряд, охватываемый этой поверхностью

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V \rho dV = \int_{-x}^{x} \rho_0\left(1-\cos\frac{\pi x}{d}\right)Sdx = \rho_0 S\left[\int_{-x}^{x} dx - \int_{-x}^{x}\cos\frac{\pi x}{d}dx\right] =$$

$$= \rho_0 S\left[x - \frac{d}{\pi}\sin\frac{\pi x}{d}\right]\Bigg|_{-x}^{x} = \rho_0 S\left[2x - \frac{2d}{\pi}\sin\frac{\pi x}{d}\right].$$

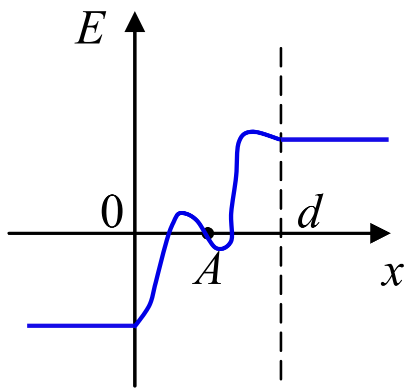
По теореме Гаусса

$$2ES = \frac{\rho_0 S}{\varepsilon_0}\left[2x - \frac{2d}{\pi}\sin\frac{\pi x}{d}\right] \quad\Rightarrow\quad \boxed{E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[x - \frac{d}{\pi}\sin\frac{\pi x}{d}\right].}$$

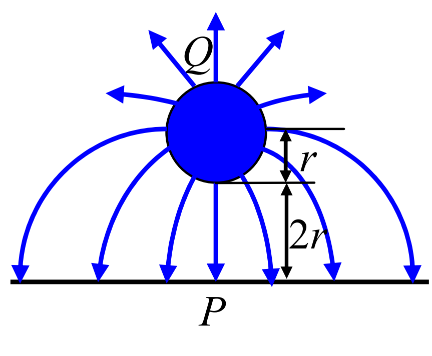
На краю пластины $x = d/2$, следовательно напряженность

$$E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{d}{2} - \frac{d}{\pi}\sin\frac{\pi d}{2d}\right] = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{d}{2} - \frac{d}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\rho_0 d}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right].$$

Видим, что внутри пластины поле меняется, вне пластины – постоянно.



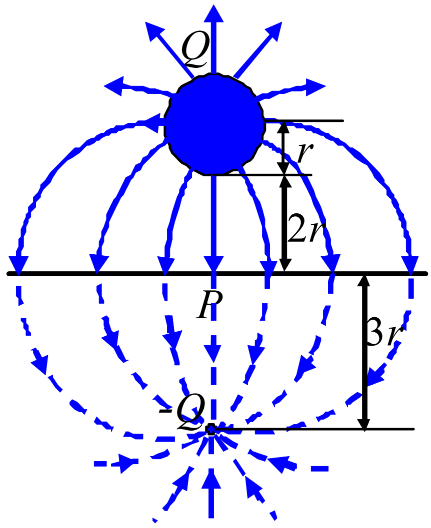
Олимпиадная задача 17. Пластмассовый шарик радиусом r и зарядом $Q > 0$, равномерно распределенным по объему, подвешен на диэлектрической нити над горизонтальной бесконечно протяженной проводящей не заряженной плоскостью (см. рис.). Если нижняя точка шарика отстоит от плоскости на расстоянии $2r$, то



1) Напряженность E_1 электрического поля, созданного зарядом Q в точке P, находящейся в непосредственной близости от плоскости, равна …

2) Напряженность E результирующего поля в точке P равна …
3) Плотность σ индуцированных поверхностных зарядов в области под шариком равна …

Решение.



Если близко к поверхности металлической плоскости поднести заряженный пластмассовый шар, то на поверхности проводника собираются заряды противоположного знака (индуцированные поверхностные заряды), в то время как одноименные заряды удаляются от неё. Так будет продолжаться до тех пор, пока результирующее электрическое поле в проводнике не исчезнет. Используем метод электрических изображений. В точке P электрическое поле E_1, созданное зарядом Q, равно $E_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{(3r)^2} = \dfrac{1}{36\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$. Электрическое поле, которое создается индуцированными поверхностными зарядами, эквивалентно полю зеркально отраженного заряда (-Q), расположенного в глубине под поверхностью на расстоянии $3r$ (см. рис.). Электрическое поле заряда-изображения в точке P имеет ту же величину, и направление, что и поле заряда Q так что, результирующее электрическое поле E будет равно $E = 2E_1 = \dfrac{1}{18\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$. Электрическое поле непосредственно у поверхности проводника связано с локальной плотностью заряда на его поверхности: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Отсюда $\sigma = \varepsilon_0 E$. Таким образом, поверхностная плотность зарядов, индуцированных зарядом Q на поверхности проводящей бесконечно протяженной плоскости в точке, расположенной под зарядом, определяется формулой $\sigma = -\dfrac{1}{18\pi}\dfrac{Q}{r^2}$. Знак минус показывает, что индуцированный на поверхности плоскости заряд противоположен по знаку заряду Q.

Это надо знать

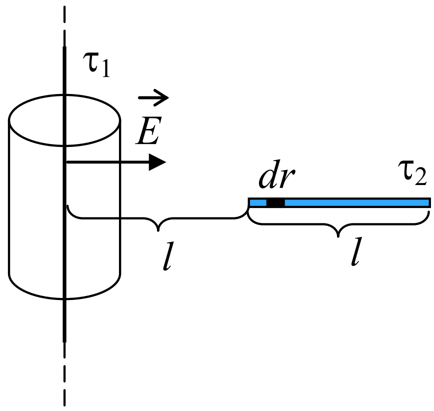
- ***Теорема Гаусса-Остроградского:*** *поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен* *алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на* ε_0 $\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i}$

- *линии электростатического поля не могут быть замкнутыми* $\boxed{\oint \vec{E}d\vec{l} = 0}$
- *Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность*

Сила, действующая на заряд в электрическом поле

Задача 18. Прямая, бесконечная, тонкая нить несет равномерно распределенный по длине заряд (τ_1 = 1 мкКл/м). В плоскости, содержащей нить, перпендикулярно нити находится тонкий стержень длиной l. Ближайший к нити конец стержня находится на расстояний l от нее. Определить силу F, действующую на стержень, если он заряжен с линейной плотностью τ_2 = 0,1 мкКл/м.

Решение.



Выделим на стержне бесконечно малый элемент dr с зарядом dq, тогда сила взаимодействия малого элемента стержня и нити

$$dF = E\, dq, \tag{1}$$

где $dq = \tau_2\, dr$, E – напряженность нити.

Из соображений симметрии следует, что напряженность нити в любой точке направлена вдоль радиальной прямой, перпендикулярной к нити, а значение напряженности зависит лишь от расстояния r от нее. Найдем напряженность по теореме Гаусса, замкнутую поверхность выберем в виде цилиндра высотой h и радиуса r.

Найдем поток через эту поверхность. Для оснований цилиндра $E_n = 0$, для боковой поверхности $E_n = E(r)$. Силовые линии поля пересекают только боковую поверхность цилиндра радиуса r. Следовательно, поток вектора $\boldsymbol{E}$ через эту замкнутую поверхность будет равен

$$\oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{S_{бок}} \vec{E}d\vec{S}_{бок} + 2\int\limits_{S_{осн}} \vec{E}d\vec{S}_{осн} = E\int\limits_{S_{бок}} dS_{бок} + 0 = E2\pi rh\,.$$

Суммарный заряд, внутри выбранной поверхности

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int \tau_1 dr = \tau_1 h.$$

По теореме Гаусса $E2\pi rh = \dfrac{\tau_1 h}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r}.$

Подставим напряженность нити в формулу (1) и получим силу взаимодействия нити со стержнем

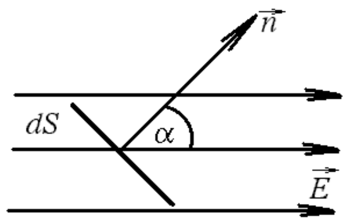
$$dF = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r}dq = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\tau_2 dr = \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r},$$

$$F = \int dF = \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_l^{2l}\frac{dr}{r} = \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_l^{2l} = \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2l}{l} = \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2.$$

$$F = \frac{10^{-6}\cdot 10^{-7}}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\ln 2 = 1{,}25\,мН.$$

Проверь себя

1. Каким будет поток вектора $\vec{E}$, через площадку dS (см. рис.)? Укажите правильный ответ.



   1. $d\Phi = E\cdot dS$
   2. $d\Phi = E\cdot dS\cdot\cos\alpha$
   3. $d\Phi = E\cdot dS\cdot\sin\alpha$

ТЕМА 3. ПОТЕНЦИАЛ. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ЗАРЯДА В ПОЛЕ

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое потенциал?
2. Как показать, что электростатическое поле потенциально?
3. Какова связь напряженности и потенциала? Как по картине эквипотенциальных поверхностей нарисовать картину силовых линий поля?
4. Можно ли, зная напряженность, однозначно вычислить потенциал поля в некоторой точке пространства?
5. Можно ли, зная потенциал, однозначно вычислить напряженность электрического поля в некоторой точке пространства?
6. Как по известному распределению эквипотенциальных поверхностей построить силовые линии электрического поля?
7. Чему равна работа по перемещению заряда по эквипотенциальной поверхности?
8. Приведите примеры расчета разности потенциалов простейших электростатических полей.
9. Как ведет себя диполь во внешнем электростатическом поле?

Основные формулы

- Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{W}{q} = \frac{A_\infty}{q},$$

где W – потенциальная энергия заряда в поле другого заряда, A_∞ – работа сил поля по перемещению точечного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность.

- Потенциал электрического поля, создаваемый точечным зарядом Q на расстоянии r от заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

- Потенциал электрического поля, созданного системой n точечных зарядов, в данной точке в соответствии с принципом суперпозиции электрических полей равен алгебраической сумме потенциалов φ_1, φ_2, …, φ_n, создаваемых отдельными точечными зарядами Q_1, Q_2, …, Q_n:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i .$$

- Энергия W взаимодействия системы точечных зарядов Q_1, Q_2, …, Q_n определяется работой, которую эта система зарядов может совершить при удалении их относительно друг друга в бесконечность, и выражается формулой

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i ,$$

где φ_i – потенциал поля, создаваемого всеми n–1 зарядами (за исключением 1-го) в точке, где расположен заряд Q_i.

- Потенциал связан с напряженностью электрического поля соотношением

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,\varphi .$$

В случае электрического поля, обладающего сферической симметрией, эта связь выражается формулой

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr}\vec{e}_r ,$$

или в скалярной форме

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} ,$$

а в случае однородного поля, т. е. поля, напряженность которого в каждой точке его одинакова как по модулю, так и по направлению,

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/d,$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы точек двух эквипотенциальных поверхностей; d – расстояние между этими поверхностями вдоль электрической силовой линии.

- Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении точечного заряда Q из одной точки поля, имеющей потенциал φ_1, в другую, имеющую потенциал φ_2,

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ или } A = Q\int_L E_l\,dl ,$$

где E_l – проекция вектора напряженности $\vec{E}$ на направление перемещения; dl – перемещение.

В случае однородного поля последняя формула принимает вид

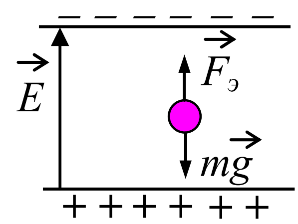
$$A = QEl\cos\alpha,$$

где l – перемещение; α – угол между направлениями вектора $\vec{E}$ и перемещения $\vec{l}$.

Движение заряженных частиц в электрическом поле

Задача 1. В плоском, горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капелька ртути находится в равновесии при напряженности электрического поля E = 60 кВ/м. Заряд капли Q = 1 нКл. Найти радиус капли. ($\rho_{\text{ртути}} = 13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3).

Решение.



На каплю действуют электрическая сила $\boldsymbol{F}_э$ и сила тяжести $m\boldsymbol{g}$. Так как капля находится в равновесии, то согласно второму закону Ньютона

$$\boldsymbol{F}_э + m\boldsymbol{g} = 0,$$

$$F_э = mg. \qquad (1)$$

Электрическая сила равна $F_э = Q\,E$, масса капли $m = \rho_{\text{ртути}}\,V$, объем капли $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Подставляя все выражения в (1) получим

$$QE = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{ртути} g \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{3QE}{4\pi\rho_{ртути} g}}.$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\cdot10^{-9}\cdot60\cdot10^3}{4\cdot3{,}14\cdot13{,}6\cdot10^3\cdot9{,}8}} = 0{,}48\cdot10^{-3}\,м = 0{,}48\,мм.$$

Задача 2. 562 одинаковых шарообразных капелек ртути диаметром 0,25 мм заряжены до одного и того же потенциала 65 В. Каков будет потенциал и заряд большой капли, полученной в результате слияния этих капель.

Решение.

Потенциал одной капли

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = k\frac{q}{r}, \qquad (1)$$

потенциал полученной капли

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = k\frac{Q}{R}. \qquad (2)$$

По закону сохранения заряда, заряд полученной капли $Q = N \cdot q$, выразим из (1) заряд маленькой капли $q = \dfrac{\varphi_0 r}{k}$, тогда

$$Q = N\frac{\varphi_0 r}{k} = N\frac{\varphi_0 d}{k2} = 562 \cdot \frac{65 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^9 \cdot 2} = 507 \cdot 10^{-12}\,Кл.$$

Для того чтобы посчитать по формуле (2) потенциал полученной капли, необходимо знать её радиус. Объем полученной капли $V = N \cdot V_0$,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = N\frac{4}{3}\pi r^3, \quad \Rightarrow \quad R^3 = Nr^3, \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt[3]{N}.$$

Подставим полученный результат в (2)

$$\varphi = k\frac{Q}{R} = k\frac{Q}{r\sqrt[3]{N}} = kN\frac{\varphi_0 r}{k}\frac{1}{r\sqrt[3]{N}} = \varphi_0\sqrt[3]{N^2}.$$

$$\varphi = 65\sqrt[3]{562^2} = 4427\,В.$$

Задача 3. Капля ртути заряжена до потенциала 20 В, ее разбили на 100 одинаковых частей. Найти потенциал каждой части.

Решение.

Капля представляет собой шар радиуса R, тогда ее потенциал

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = k\frac{Q}{R}, \qquad (1)$$

потенциал маленькой капли (после разделения)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = k\frac{q}{r}. \qquad (2)$$

По закону сохранения заряда, заряд полученной капельки $q = Q/N$, а ее радиус (т. к. объем капли $V_0 = N \cdot V$)

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = N\frac{4}{3}\pi r^3, \quad \Rightarrow \quad R^3 = Nr^3, \quad \Rightarrow \quad r = R\big/\sqrt[3]{N}.$$

Подставляя в (1) получим

$$\varphi = k\frac{q}{r} = k\frac{Q}{Nr} = k\frac{Q\sqrt[3]{N}}{NR} = k\frac{Q}{R}\frac{1}{\sqrt[3]{N^2}} = \varphi_0\frac{1}{\sqrt[3]{N^2}}.$$

$$\varphi = \frac{20}{\sqrt[3]{100^2}} = \frac{20}{10\sqrt[3]{10}} \approx 1\,В.$$

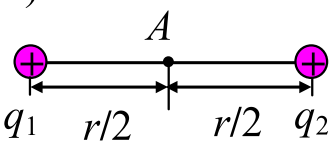
Задача 4. Два одинаковых точечных положительных заряда, по 1 нКл каждый, отстоят на расстоянии 100 см друг от друга. Найти потенциал точки поля, находящейся посередине между зарядами, когда

1) заряды находится в вакууме $\varepsilon = 1$;

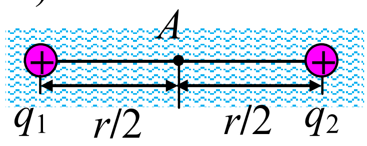
2) заряды находятся в оливковом масле $\varepsilon = 3{,}1$.

Решение.

1)



2)



1) Потенциал в точке A по принципу суперпозиции равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке зарядами q_1 и q_2.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = k\frac{q_1}{r/2} + k\frac{q_2}{r/2} = k\frac{4q}{r},$$

$$\varphi = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-9}}{1} = 36\text{В}.$$

2) Заряды находятся в оливковом масле с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3{,}1$, следовательно, их потенциал уменьшится в ε раз. По принципу суперпозиции

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = k\frac{q_1}{\varepsilon r/2} + k\frac{q_2}{\varepsilon r/2} = k\frac{4q}{\varepsilon r},$$

$$\varphi = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-9}}{3{,}1 \cdot 1}\text{В} \cong 12\,\text{В}.$$

Задача 5. Расстояние между двумя металлическими шарами велико по сравнению с их размерами. Радиус первого шара $R_1 = 6$ см, заряжен до потенциала $\varphi_1 = 300$ В, а шар радиусом $R_2 = 4$ см – до потенциала $\varphi_2 = 500$ В. Определить потенциал φ шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.

Решение.

До соединения шаров каждый обладал потенциалом

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = k\frac{q_1}{R_1}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2} = k\frac{q_2}{R_2}.$$

Выразим заряд каждого шара через их потенциалы

$$q_1 = \frac{\varphi_1 R_1}{k},\ q_2 = \frac{\varphi_2 R_2}{k}.$$

После соединения металлическим проводником, заряды будут на телах перераспределяться до тех пор, пока не выровняются их потенциалы $\varphi'_1 = \varphi'_2 = \varphi$,

$$\varphi'_1 = k\frac{q'_1}{R_1},\ \varphi'_2 = k\frac{q'_2}{R_2},$$

а заряды

$$q'_1 = \frac{\varphi R_1}{k},\ q'_2 = \frac{\varphi R_2}{k}.$$

По закону сохранения зарядов $q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$. Подставим выражения для зарядов, получим

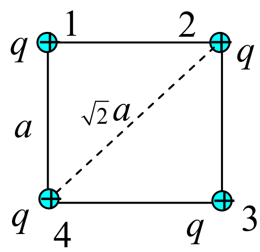
$$\frac{\varphi_1 R_1}{k} + \frac{\varphi_2 R_2}{k} = \frac{\varphi R_1}{k} + \frac{\varphi R_2}{k},$$

$$\varphi_1 R_1 + \varphi_2 R_2 = \varphi\left(R_1 + R_2\right),$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 R_1 + \varphi_2 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{300\cdot 6\cdot 10^{-2} + 500\cdot 4\cdot 10^{-2}}{6\cdot 10^{-2} + 4\cdot 10^{-2}} = \frac{1800 + 2000}{10} = 380\,B.$$

Задача 6. В вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые по абсолютной величине заряды q. Определить энергию взаимодействия системы.

Решение.



1 *способ.* Пусть в вершинах квадрата находятся все положительные заряды. Каждый заряд попарно взаимодействуют между собой, а энергия всей системы определится как сумма

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24} + W_{34}.$$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$, где r_{12} – расстояние между зарядами q_1 и q_2. Так как все заряды одинаковые по величине, и находятся на одном и том же расстоянии, то

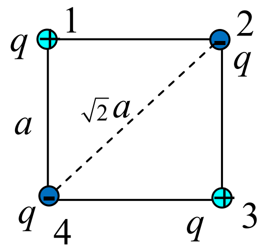
$$W_{12} = W_{13} = W_{23} = W_{34} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = k\frac{q^2}{a}\ \ (r_{12} = a),$$

$$W_{13} = W_{42} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} = k\frac{q^2}{a\sqrt{2}} \ (r_{13} = a\sqrt{2}).$$

Перепишем энергию системы $W = 4 \cdot W_{12} + 2 \cdot W_{13}$

$$W = 4k\frac{q^2}{a} + 2k\frac{q^2}{a\sqrt{2}} = k\left(4 + \frac{2}{a\sqrt{2}}\right)\frac{q^2}{a}.$$

2 *способ.* Пусть в вершинах квадрата на диагонали 24 находятся отрицательные заряды. Определим энергию всей системы по формуле



$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi(i),$$

где $\varphi(i)$ – потенциал в точке, где находится i заряд, создаваемый всеми другими зарядами (кроме i-того заряда).

Энергия системы

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi(1) - q_2\varphi(2) + q_3\varphi(3) - q_4\varphi(4)\right), \qquad (1)$$

где $\varphi(1)$ – потенциал в точке 1, создаваемый зарядами q_2, q_3 и q_4; $\varphi(2)$ – потенциал в точке 2, создаваемый зарядами q_1, q_3 и q_4 и т. д.

Потенциал в точке 1 определим по принципу суперпозиции, как алгебраическая сумма всех потенциалов

$$\varphi(1) = -k\frac{q_2}{a} - k\frac{q_4}{a} + k\frac{q_3}{a\sqrt{2}} = -2k\frac{q}{a} + k\frac{q}{a\sqrt{2}},$$

$$\varphi(2) = k\frac{q_1}{a} + k\frac{q_3}{a} - k\frac{q_4}{a\sqrt{2}} = 2k\frac{q}{a} - k\frac{q}{a\sqrt{2}} = -\varphi(1),$$

$$\varphi(3) = -k\frac{q_2}{a} - k\frac{q_4}{a} + k\frac{q_1}{a\sqrt{2}} = -2k\frac{q}{a} + k\frac{q}{a\sqrt{2}} = \varphi(1),$$

$$\varphi(4) = k\frac{q_1}{a} + k\frac{q_3}{a} - k\frac{q_2}{a\sqrt{2}} = 2k\frac{q}{a} - k\frac{q}{a\sqrt{2}} = -\varphi(1).$$

Подставим полученные выражения в (1)

$$W = \frac{1}{2}\Big(q\varphi(1) - q\big(-\varphi(1)\big) + q\varphi(1) - q\big(-\varphi(1)\big)\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\big(q\varphi(1) + q\varphi(1) + q\varphi(1) + q\varphi(1)\big) = 2q\varphi(1).$$

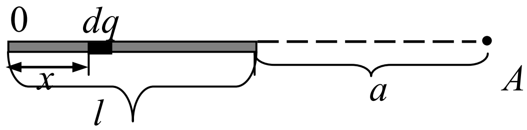
Подставляя выражение для потенциала в точке 1 получим энергию взаимодействия системы

$$W = 2q\left(-2k\frac{q}{a} + k\frac{q}{a\sqrt{2}}\right) = 2k\frac{q^2}{a}\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = k\frac{q^2}{a}\left(\sqrt{2} - 4\right).$$

Энергия взаимодействия будет отрицательной, это означает, что «некие силы пытаются держать вместе заряды», иначе говоря, получили энергию связи зарядов.

Задача 7. Найти потенциал, который создается заряженным стержнем длиной $l = 10$ см на расстоянии $a = 20$ см от его края. Если на нем равномерно распределен заряд $q = 1$ нКл.

Решение.



Разделим мысленно стержень на бесконечные малые элементы длиной dx, который несет заряд dq, этот заряд можно считать точечным. Тогда потенциал $d\varphi$, создаваемый точечным зарядом dq в точке A, будет равен

$$d\varphi = k\frac{dq}{l - x + a}, \tag{1}$$

где x – расстояние от начала координат, до малого элемента. Элементарный заряд выразим через линейную плотность заряда $dq = \tau\, dx = (q/l)\cdot dx$, и подставим в формулу (1), получим

$$d\varphi = k\frac{q}{l}\frac{dx}{l - x + a}.$$

По принципу суперпозиции весь потенциал в точке A равен

$$\varphi = \int d\varphi = \int k\frac{q}{l}\frac{dx}{l - x + a} = k\frac{q}{l}\int_0^l \frac{dx}{l - x + a} = -k\frac{q}{l}\ln\left(l - x + a\right)\Big|_0^l =$$

$$= -k\frac{q}{l}\Big[\ln\left(l - l + a\right) - \ln\left(l - 0 + a\right)\Big] = k\frac{q}{l}\Big[\ln\left(l + a\right) - \ln a\Big] = k\frac{q}{l}\ln\frac{l + a}{a}.$$

Подставим численные значения и получим окончательный результат

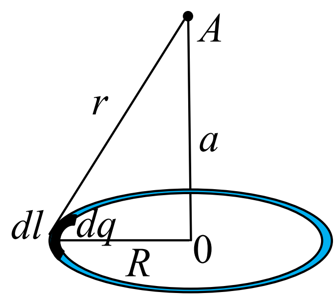
$$\varphi = k\frac{q}{l}\ln\frac{l + a}{a} = 9\cdot 10^9\frac{10^{-9}}{0,1}\ln\frac{0,1 + 0,2}{0,2} = \frac{9}{0,1}\ln 1,5 = 36,5B.$$

Примечание: Если $a \to \infty$, то получим кулоновский потенциал $\varphi = k\frac{q}{l}\ln\frac{l + a}{a} = k\frac{q}{l}\ln\left(1 + \frac{l}{a}\right) \approx k\frac{q}{l}\frac{l}{a} = k\frac{q}{a}$. Если в задаче при стремлении расстояния к бесконечности не получается кулоновский потенциал, то решение неверно.

Задача 8. Тонкое кольцо радиуса R равномерно заряжено с линейной плотностью заряда τ. Найти потенциал в центре кольца и на расстоянии a от центра.

Решение.

Разделим мысленно кольцо на бесконечные малые элементы. Т. к. кольцо очень тонкое, то все точки каждого элемента будут находится от центра кольца на одном и том же расстоянии R. Заряд dq, находящийся на бесконечно малом элементе длиною dl, можно считать точечным. Потенциал $d\varphi$, создаваемый точечным зарядом dq в центре, будет равен



$$d\varphi = k\frac{dq}{R}. \tag{1}$$

Выразим dq через линейную плотность заряда τ ($dq = \tau\ dl$) и подставим в формулу (1)

$$d\varphi = k\frac{\tau dl}{R}.$$

По принципу суперпозиции весь потенциал в центре равен

$$\varphi = \int d\varphi = k\int_0^{2\pi R}\frac{\tau dl}{R} = k\frac{\tau 2\pi R}{R} = k\tau 2\pi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tau 2\pi = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}.$$

Интегрирование проводилось по всей длине кольца.

Потенциал $d\varphi$, создаваемый точечным зарядом dq в точке A**,** будет равен

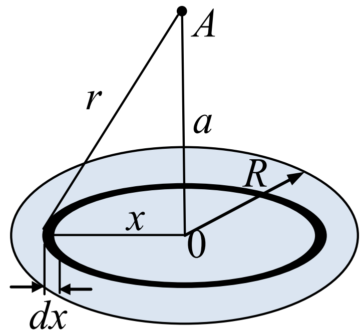
$$d\varphi = k\frac{\tau dl}{r}, \tag{2}$$

где r – расстояние от элемента до точки A, которое легко определяется по теореме Пифагора $r = \sqrt{R^2 + a^2}$, подставляя это выражение в формулу (2), проинтегрировав это выражение получим

$$\varphi = \int d\varphi = k\int_0^{2\pi R}\frac{\tau dl}{r} = k\frac{\tau 2\pi R}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau 2\pi R}{r} = \frac{\tau R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2 + a^2}}.$$

Задача 9. Тонкий диск радиуса R равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ. Найти потенциал в точке A, лежащей на оси диска на расстоянии a от него. Ось диска перпендикулярна плоскости диска и проходит через центр диска.

Решение.



Поскольку в задаче ничего не сказано о среде, окружающей диск, можно считать, что диск находится в вакууме и принять $\varepsilon = 1$. Разобьем диск на концентрические бесконечно тонкие кольца шириной dx каждое. На чертеже выделено одно кольцо радиуса x. Бесконечно малая площадь dS бесконечно тонкого кольца шириною dx будет равна $dS = 2\pi x dx$, находящийся на нем заряд $dq = \sigma dS = 2\pi x\, \sigma dx$, он создает в точке A потенциал $d\varphi$

$$d\varphi = k\frac{dq}{r} = k\frac{2\pi\sigma x dx}{r},$$

где r – расстояние от тонкого кольца до точки A, которое легко определяется по теореме Пифагора $r = \sqrt{x^2 + a^2}$, тогда потенциал создаваемый кольцом

$$d\varphi = k\frac{2\pi\sigma x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Применяя принцип суперпозиции полей, находим, что потенциал в точке A, создаваемый полем всего диска, равен

$$\varphi = \int d\varphi = k2\pi\sigma\int_0^R \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Известно, что интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2} - a$, тогда потенциал диска

$$\varphi = 2k\pi\sigma\left[\sqrt{a^2 + x^2} - a\right]\Big|_0^R = 2k\pi\sigma\left[\sqrt{a^2 + R^2} - a - \sqrt{a^2 + 0} + a\right] =$$
$$= 2k\pi\sigma\left[\sqrt{a^2 + R^2} - a\right].$$

Или если расписать k получим потенциал диска $\boxed{\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{a^2 + R^2} - a\right]}$.

Связь напряженности и потенциала

Задача 10. Определить разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от равномерно заряженной бесконечной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ.

Решение.

Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости, найденная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, определяется по формуле $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Используем связь напряженности и потенциала $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}\,\varphi$. Так как поле везде постоянно, и не зависит от расстояния, то $E=-\dfrac{d\varphi}{dx}$. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости, равна

$$d\varphi=-Edx,$$

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{x_1}^{x_2}Edx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dx=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2-x_1).$$

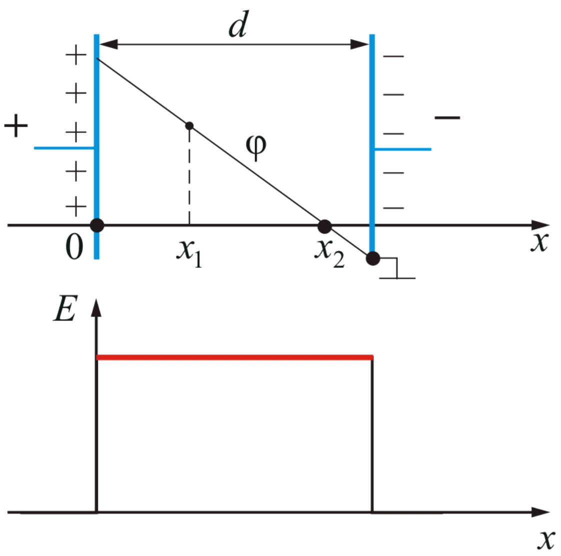
Задача 11. Определить разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и $-\sigma$.

Решение.

Напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями, найденная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, где $\sigma=q/S$ – поверхностная плотность заряда. Так как напряженность связана с потенциалом $E=-\dfrac{d\varphi}{dx}$, то

$$d\varphi=-Edx. \tag{1}$$

Теперь, чтобы получить выражение для разности потенциалов между любыми двумя точками, находящимися на расстояниях x_1 и x_2 между плоскостями, проинтегрируем выражение (1):



$$\int_1^2 d\varphi=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2}dx;$$

$$\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_2-x_1)$$

или $$\varphi_1-\varphi_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_2-x_1).$$

При $x_1 = 0$ и $x_2 = d$, разность потенциалов между плоскостями

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}.$$

На рисунке изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от расстояния между плоскостями.

Задача 12. Определить разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от оси бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра с линейной плотностью заряда τ.

Решение.

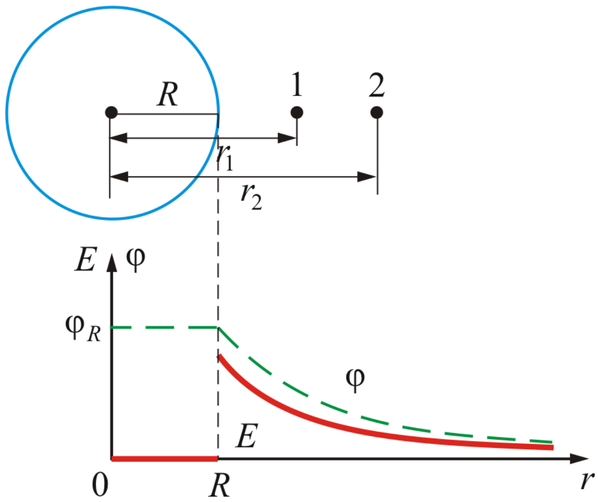
С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что напряженность поля равна

$$E = \begin{cases} 0 \ - \ \text{внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов,} \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{или} \quad \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 Rl} \ \text{на поверхности цилиндра}, \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{или} \quad \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 rl} \ \text{вне цилиндра,} \end{cases}$$

где $\tau = \dfrac{q}{l}$ – линейная плотность заряда.

Тогда, т. к. $d\varphi = -Edr$; $\int_1^2 d\varphi = -\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\dfrac{dr}{r}$, отсюда следует разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2 будет равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$



$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{R} = \text{const} - \ \text{внутри и на поверхности цилиндра } (r \le R), \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R} \quad - \text{вне цилиндра } \ (r > R). \end{cases}$$

На рисунке изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от r. (Здесь и далее E – изображена сплошной линией, а φ – пунктирной).

Задача 13. Определить разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда $+\tau$ и $-\tau$.

Решение.

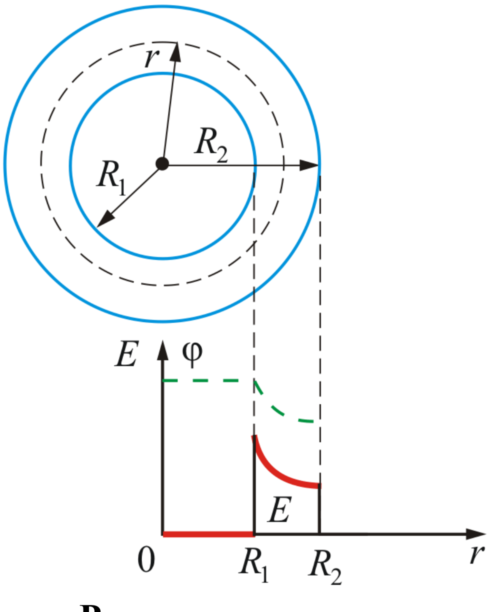
С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что напряженность поля равна

$$E = \begin{cases} 0 \ - \ \text{внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет,} \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} - \text{между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2. \end{cases}$$

Отсюда так же, как и в предыдущем случае (см. задача 12), разность потенциалов будет равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1} = \text{const} - \text{внутри меньшего цилиндра} \quad (r < R_1) \\ \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R_1} - \text{между цилиндрами} \quad (R_1 < r < R_2) \\ 0 \quad - \quad \text{вне} \quad \text{цилиндров.} \end{cases}$$



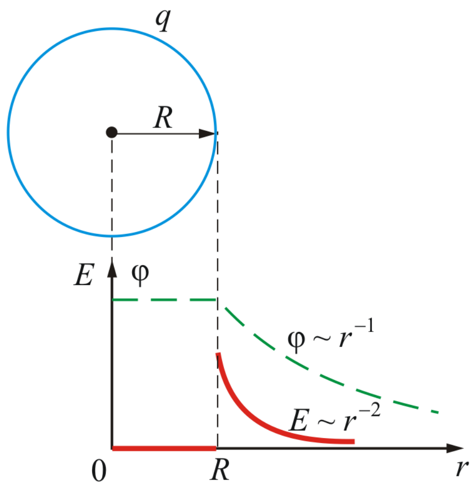
Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем $\varphi = \text{const}$, $E = 0$, между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону, а вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и φ и E равны нулю. На рисунке изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от r.

Задача 14. Определить потенциал как функцию расстояния для поля равномерно заряженной сферической поверхности радиуса R с поверхностной плотностью заряда σ.

Решение.

Рассматривая примеры применения теоремы Остроградского-Гаусса, мы нашли, что напряженность поля сферы определяется формулой: $E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. А т. к. $\mathrm{d}\varphi = -E\mathrm{d}r$, то

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1}^{r_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$



Если принять $r_1 = r$, а $r_2 = \infty$, то потенциал вне сферической поверхности определяется выражением $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, так как напряженность поля внутри сферической поверхности равна нулю. Отсюда имеем

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}=\text{const}-\text{внутри и на поверхности сферы } (r\le R)\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\text{вне сферы } (r>R).\end{cases}$$

Задача 15. Определить потенциал как функцию расстояния для поля равномерно заряженного с объемной плотностью заряда ρ радиуса R.

Решение.

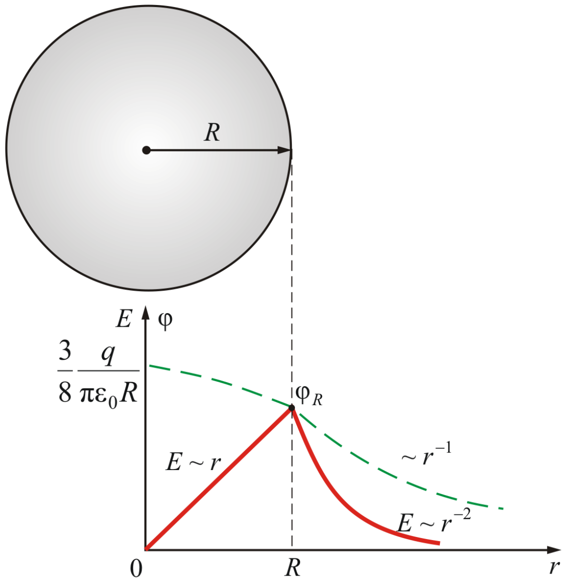
Имеем шар радиусом R с общим зарядом q, т. е. заряженный с объемной плотностью $\rho=\dfrac{3q}{4\pi R^3}$. Напряженность поля объемно заряженного шара радиусом R, с общим зарядом q, вне шара ($r>R$) вычисляется по формуле $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра шара ($r_1>R$, $r_2>R$, $r_2>r_1$), определяется формулой

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1}^{r_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Если принять, что $r_1 = r$, а $r_2 = \infty$, то потенциал вне сферической поверхности определяется выражением $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. В частности, при $r = R$, потенциал поверхности сферы, относительно точки с нулевым потенциалом равен $\varphi(R)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$ (нулевой уровень потенциала нами выбран для точки $r_2=\infty$).

В любой точке, находящейся внутри шара на расстоянии r' от его центра ($r'<R$), напряженность поля определяется формулой $E_r=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^3}r'$. Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1' и r_2' от центра шара равна

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1^1}^{r_2^1}E_r dr=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[(r_1^1)^2-(r_2^1)^2\right].$$



С учетом выбора нулевого уровня потенциала в точке $r_2=\infty$ потенциал любой точки внутри заряженного шара можно найти следующим образом:

$$\varphi=\varphi(R)-\int_R^r E_r dr.$$

После интегрирования, получим

$$\varphi=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}+\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2-r^2).$$

Если учесть, что $\rho=\dfrac{3q}{4\pi R^3}$, то

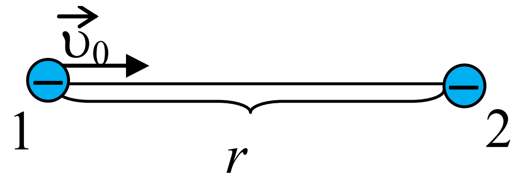
$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}-\text{в центре шара } (r=0)\\[2mm] \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3-\dfrac{r^2}{R^2}\right)-\text{ внутри шара } (r\le R)\\[2mm] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\text{на поверхности и вне шара } (r\ge R).\end{cases}$$

Из полученных соотношений можно сделать следующие выводы:

- *с помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать E и φ от различных заряженных поверхностей.*
- *напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.*
- *потенциал поля –* ***всегда непрерывная функция*** *координат.*

Задача 16. До какого расстояния r могут сблизиться два электрона, если они движутся навстречу друг другу с относительной скоростью $\upsilon_0 = 10^6$ м/с?

Решение.



Так как υ_0 – относительная скорость, то можно считать, что один электрон движется, другой покоится (пусть покоится второй электрон), тогда в точке 1 он создает потенциал $\varphi_2 = \dfrac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Первый электрон движется со скоростью υ_0, значит, обладает кинетической энергией $E_к = \dfrac{m_e\upsilon_0^2}{2}$, эта энергия тратится на работу против кулоновских сил отталкивания $A = qU = q_e\varphi_2 = \dfrac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. По закону изменения кинетической энергии $\Delta E_к = A$, получим

$$\frac{m_e\upsilon_0^2}{2} = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{q_e^2}{2\pi\varepsilon_0 m_e\upsilon_0^2}.$$

$$r = \frac{1{,}6^2 \cdot \left(10^{-19}\right)^2}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{12}} = 5\cdot 10^{-10}\,м.$$

Задача 17. На расстоянии $r_1 = 4$ см от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд $q = 0{,}66$ нКл. Под действием поля заряд приближается к нити до расстояния $r_2 = 2$ см, при этом совершается работа $A = 50$ эрг. Найти линейную плотность заряда на нити.

Решение.

Элементарная работа сил поля по перемещению заряда $dA = q\,dU$, где $dU = -Edr$. Напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной заряженной нитью на расстоянии r от ее оси $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$. Тогда работа

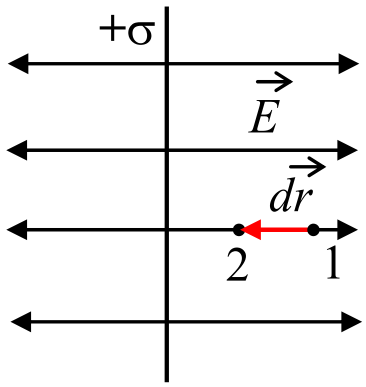
$$A = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{q\tau dr}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}.$$

Из последнего выражения линейная плотность заряда

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_0 A}{q\ln\left(r_1/r_2\right)} = 0,6 мкКл/м.$$

Задача 18. Электрическое поле создано бесконечной плоскостью, заряженной с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10$ нКл/м^2. Какую работу надо совершить для того, чтобы перенести электрон вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 2$ см до расстояния $r_2 = 1$ см.

Решение.



Элементарная работа по перемещению электрона из точки 1 в точку 2 определяется

$$dA = \left(\vec{F}d\vec{r}\right) = Fdr\cos\alpha = Fdr,$$

где $F = qE = -eE$ – электрическая сила, направленная вдоль линий напряженности; dr – элементарное перемещение; α – угол между силой и перемещением, в нашем случае равен нулю, т. к. перемещение идет вдоль линий напряженности.

Бесконечная плоскость создает однородное, постоянное поле, напряженность которого равна $E = \sigma/2\varepsilon_0$. Работа по перемещению электрона вдоль линии напряженности с расстояния r_1 до расстояния r_2 определяется

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} Fdr = -\int_{r_1}^{r_2} eEdr = -e\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} dr = -e\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(r_2 - r_1\right) = e\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(r_1 - r_2\right),$$

$$A = 1,6\cdot 10^{-19}\frac{10^{-8}}{2\cdot 8,85\cdot 10^{-12}}\left(0,02 - 0,01\right) \approx 0,09\cdot 10^{-17} = 9\cdot 10^{-19}\ Дж.$$

Задача 19. Вычислить энергию электростатического поля металлического шара, которому сообщен заряд 100 нКл, если диаметр шара равен 20 см.

Решение.

Энергия заряженного шара $W = ½\, Q\, \varphi$, где φ – потенциал шара, который равен $\varphi = k\, Q/R$, следовательно энергия шара

$$W = \frac{1}{2}Qk\frac{Q}{R} = \frac{1}{2}k\frac{Q^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R},$$

$$W = \frac{9\cdot 10^9}{2}\frac{\left(10^{-7}\right)^2}{0,1} = 4,5\cdot 10^{-4} = 450 мкДж.$$

Так как поле, созданное заряженным шаром, является неоднородным, то энергия поля распределена неравномерно. Однако объемная плотность энергии будет одинакова во всех точках, отстоящих на равных расстояниях от центра шара, так как поле обладает сферической симметрией.

Задача 20. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 2$ см, разность потенциалов $U = 6$ кВ. Заряд каждой пластины равен 10 нКл. Вычислить энергию поля конденсатора и силу взаимного притяжения пластин.

Решение.

Энергия поля конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^{3}}{2} = 30 \, мкДж.$$

Силы, с которой притягиваются пластины конденсатора, называются ***пондермоторными.*** Эту силу можно вычислить через энергию взаимодействия. При незначительном перемещении одной пластины в поле другой совершается работа

$$dA = -dW = F\,dx \Rightarrow F = -\frac{dW}{dx}.$$

Для того чтобы определить силу, представим энергию конденсатора, зависящую от расстояния:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q}{2}\frac{q}{C} = \frac{q^2}{2}\frac{x}{\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

продифференцируем и получим выражение для силы

$$F = -\frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

знак минус означает, что пластины притягиваются, а модуль этой величины – есть искомая сила. Зная емкость плоского конденсатора, определим

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \;\Rightarrow\; \varepsilon\varepsilon_0 S = Cd,$$

$$F = \frac{q^2}{2Cd} = \frac{q}{2d}\frac{q}{C} = \frac{qU}{2d},$$

$$F = \frac{10 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^{3}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 15 \cdot 10^{-4} \, H = 1{,}5 \, мН.$$

Проверь себя

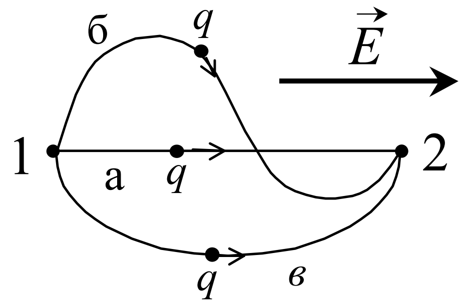
1. Расстояние от точечного заряда увеличили в **3 раза.** При этом *потенциал поля точечного заряда …*

   1) Увеличился в 3 раза. 2) Увеличился в 9 раз.

   3) Уменьшился в 3 раза. 4) Уменьшился в 9 раз.

   Ответ 3.

2. Точечный заряд q перемещается в электрическом поле из точки 1 в точку 2 поочередно по трем различным траекториям. При этом электрическое поле совершает максимальную работу в случае перемещения заряда по траектории:



   1) 1 – а – 2 2) 1 – б – 2.

   3) 1 – в – 2.

   4) во всех трех случаях работа электрического поля по перемещению заряда одинакова.

3. При увеличении напряжения между пластинами плоского конденсатора в **4** раза, *энергия электрического поля* заряженного конденсатора

   1) увеличится в 4 раза 2) уменьшится в 4 раза

   3) увеличится в 16 раз 4) уменьшится в 16 раз

4. *Энергия заряженного и отключенного от источника напряжения плоского конденсатора* при уменьшении расстояния между его пластинами в ***2*** раза и введении между пластинами диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ***ε = 4***

   1) *увеличится в **2** раза* 2) *увеличится в **8** раз*

   3) *уменьшится в **2** раза* 4) *уменьшится в **8** раз*

ТЕМА 4. ДИЭЛЕКТРИКИ

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое поляризованность? Что характеризует вектор поляризации?
2. Каков физический смысл диэлектрической проницаемости вещества? Выведите связь между диэлектрической проницаемостью и и восприимчивостью вещества.
3. В чем различие поляризации диэлектрика с полярными и неполярными молекулами?
4. Что такое вектор электростатического смещения? Что он характеризует?
5. Сформулируйте теорему Гаусса для электростатического поля в диэлектрике.
6. Как меняется поле на границе диэлектриков?

Основные формулы

- Дипольный момент

$$\vec{p} = q\vec{l},$$

где $\vec{l}$ – плечо диполя, вектор, проведенный от отрицательного заряда диполя к его положительному заряду.

- Вектор поляризации

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V},$$

где ΔV – бесконечно малый объем диэлектрика, $\sum \vec{p}_i$ – сумма дипольных моментов, заключенных в этом объеме молекул.

- Связь вектора поляризации с напряженностью поля

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E},\ \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость (зависит от природы диэлектрика), $\vec{E}$ – напряженность поля внутри диэлектрика.

- Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью χ

$$\varepsilon = 1 + \chi.$$

- Напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике связана с напряженностью E_0 внешнего поля соотношением
$$E=E_0/\varepsilon.$$
- Теорема Гаусса для вектора $\boldsymbol{D}$
$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{свобод}.$$
- Поверхностная плотность связанных зарядов σ′
$$\sigma' = P\cos\alpha = P_n,$$

где P_n – проекция вектора поляризации на нормаль к поверхности, на которой выступают заряды.

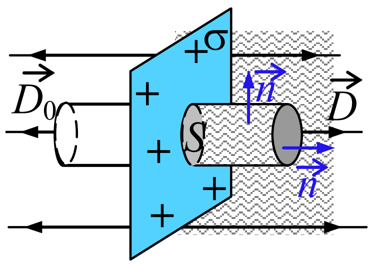
- Дивергенция поля вектора $\vec{P}$ равна с обратным знаком объемной плотности связанного заряда ρ' в той же точке
$$div\vec{P} = -\rho'.$$

Значения диэлектрической проницаемости ε, измеренные в постоянном электрическом поле при комнатной температуре, для различных веществ

Вещество	ε	Вещество	ε
Вакуум	1,0000	Бумага	3 – 7
Воздух	1,0006	Крахмал	12
Вода	81	Молоко коровье	66
Керосин	2	Кровь	85
Масло растительное	2 – 4	Вещество мозга	85 – 90
Масло трансформаторное	2,2	Зрительный нерв	89
Слюда	7	Белок яичный	72
Стекло	6 – 10	Эбонит	3
Парафин	2	Фарфор	5

Задача 1. Бесконечная пластина заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м^2. С одной стороны пластины воздух, а с другой – масло ($\varepsilon = 2$). Определить напряженность поля в воздухе и масле.

Решение:



Поскольку справа и слева среда разная, то определим сначала вектор электрического смещения **D**, а затем, зная связь между напряженностью **E** и электрическим смещением **D**, определим напряженность поля в разных средах. Обозначим за **D_0** – вектор электрического смещения в воздухе, а **D** – в масле, причем **D_0** = ε_0 **E_0**, **D** = $\varepsilon\varepsilon_0$ **E_0**, где **E_0** – напряженность поля в воздухе. Запишем теорему Гаусса для вектора **D**

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{свобод}.$$

В качестве гауссовской поверхности выберем цилиндр, расположенный как указано на рисунке, тогда поток вектора **D** будет определяться только потоком через торцы цилиндра, а через боковую поверхность он будет равен нулю (т. к. $\vec{D}d\vec{S}_{бок} = DdS_{бок}\cos 90^0 = 0$)

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = D_0 S + DS = \left(D_0 + D\right)S = \left(\varepsilon_0 E_0 + \varepsilon_0\varepsilon E_0\right)S. \tag{1}$$

Суммарный заряд определим через поверхностную плотность зарядов

$$q_{свобод} = \int_S \sigma dS = \sigma S\,. \tag{2}$$

Приравняем правые части (1) и (2) уравнения, получим

$$\left(\varepsilon_0 E_0 + \varepsilon_0\varepsilon E_0\right)S = \sigma S,$$

$$\left(1+\varepsilon\right)\varepsilon_0 E_0 = \sigma \Rightarrow \boxed{E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\left(1+\varepsilon\right)}}.$$

Напряженность поля в воздухе

$$E_0 = \frac{10^{-8}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\left(1+2\right)} \approx 377\cdot 10^{-4}\cdot 10^{4} = 377\,{}^{В}\!/_{м}.$$

Напряженность поля в масле

$$\boxed{E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\left(1+\varepsilon\right)\varepsilon} = 188{,}5\,{}^{В}\!/_{м}.}$$

Задача 2. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком (фарфор, $\varepsilon = 5$), объем V которого равен 100 см^3. Поверхностная плотность заряда σ на пластинах конденсатора равна 8,85 нКл/м^2. Вычислить работу A, которую необходимо совершить для того, чтобы удалить диэлектрик из конденсатора. Трением пренебречь.

Решение.

Работа A, которую необходимо совершить для того, чтобы удалить диэлектрик из конденсатора – это работа внешних сил, которая равна изменению энергии системы:

$$A = \Delta W = W_2 - W_1, \qquad (1)$$

где W_2 – энергия поля конденсатора в конечном состоянии (без диэлектрика); W_1 – энергия поля в начальном состоянии (с диэлектриком).

Энергию в данном случае удобно выразить через заряд Q на пластинах. Подставив в равенство (1) выражения $W_2 = Q^2/(2C_2)$ и $W_1 = Q^2/(2C_1)$, получим

$$A = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right). \qquad (2)$$

Заряд на пластинах конденсатора определим через поверхностную плотность зарядов $Q = \sigma S$, емкость конденсатора в начальном $C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$ и конечном выражении $C_2 = \varepsilon_0 S/d$, подставим эти выражения в (2), получим

$$A = \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left(\frac{d}{\varepsilon_0 S} - \frac{d}{\varepsilon_0 \varepsilon S}\right) = \frac{\sigma^2 S^2 d}{2\varepsilon_0 S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\sigma^2 S d}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\sigma^2 V}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

$$A = \frac{8{,}85^2 \cdot 10^{-18} \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-22} \cdot 0{,}8}{2 \cdot 10^{-12}} = 3{,}54 \cdot 10^{-10} = 354\ \textit{пДж}.$$

Задача 3. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком (слюдой, $\varepsilon = 7$). Площадь пластин конденсатора равна 50 см^3. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на слюде, если пластины конденсатора притягивают друг друга с силой 1 мН.

Решение.

Напряженность поля в диэлектрике можно найти по принципу суперпозиции полей

$$E = E_0 - E',$$

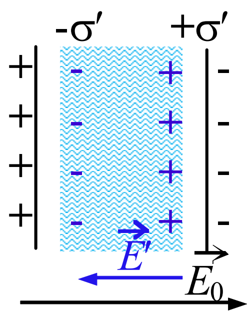
где E_0 – напряженность поля, созданная пластинами конденсатора, E' – напряженность поля связанных зарядов на поверхности слюды, E – напряженность поля в слюде. Здесь учли, что напряженность связанных зарядов противоположно направлена напряженности поля пластин. Поле в диэлектрике всегда меньше поля в вакууме в ε раз, т. е. напряженность поля в слюде $E = E_0/\varepsilon$, тогда

$$E_0/\varepsilon = E_0 - E',$$
$$E' = E_0 - E_0/\varepsilon = E_0\,(1 - 1/\varepsilon),$$
$$k4\pi\sigma' = k4\pi\sigma\,(1 - 1/\varepsilon),$$
$$\sigma' = \sigma\,(1 - 1/\varepsilon). \qquad (1)$$

Пластины конденсатора притягиваются с силой F, которая связана с напряженностью поля пластин: $F = E_0\,q$, где q – заряд пластин, который равен $q = \sigma\,S$, а $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$. Тогда сила $F = \sigma^2 S/\varepsilon_0$, выразим поверхностную плотность зарядов σ и подставим в (1):

$$\sigma = \sqrt{\frac{F\varepsilon_0}{S}}, \quad \boxed{\sigma' = \sqrt{\frac{F\varepsilon_0}{S}}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Задача 4. Эбонитовая ($\varepsilon = 3$) плоскопараллельная пластина помещена в однородное электрическое поле напряженностью 2 МВ/м. Грани пластины перпендикулярны линиям напряженности. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на гранях пластины.



Решение.

При помещении пластины в электрическое поле в ней происходит перераспределение зарядов, таким образом, что на её противоположных гранях появляются отрицательные и положительные связанные заряды (см. рисунок), которые образуют электрическое поле с напряженностью E'. Напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$ в пластине находится по принципу суперпозиции полей:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{E}_0,$$

где $\boldsymbol{E}'$ – вектор напряженности электрического поля, созданного связанными зарядами; $\boldsymbol{E}_0$ – вектор напряженности внешнего электрического поля.

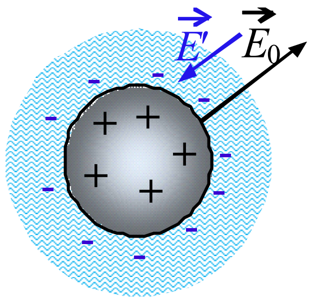
В проекциях на горизонтальное направление получим:

$$E = E_0 - E',$$
$$E' = \sigma'/\varepsilon_0.$$

Поле в диэлектрике всегда меньше поля в вакууме в ε раз, т. е. напряженность поля в пластине $E = E_0/\varepsilon$, тогда

$$E_0/\varepsilon = E_0 - \sigma'/\varepsilon_0,$$
$$\sigma'/\varepsilon_0 = E_0 - E_0/\varepsilon,$$
$$\sigma' = E_0\varepsilon_0(1 - 1/\varepsilon).$$
$$\sigma' = \pm 11{,}8 \text{ мкКл/м}^2.$$

Задача 5. Проводящий шар с равномерно распределенным зарядом 399 мкКл помещают в однородный изотропный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 10$. Определить поляризованный заряд на границе диэлектрика с шаром.



Решение.

При помещении шара в диэлектрик на его поверхности появляются отрицательные связанные заряды $-q'$, эти заряды создают поле напряженностью E'. Напряженность электрического поля шара, помещенного в диэлектрик определим по принципу суперпозиции полей:

$$E = E_0 - E', \tag{1}$$

где E_0 – напряженность поля, создаваемая шаром, имеющим заряд q, $E_0 = k\dfrac{q}{r^2} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; E' – напряженность поля, создаваемая связанным зарядом $-q'$, $E' = k\dfrac{q'}{r^2} = \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Поле в диэлектрике всегда меньше поля в вакууме в ε раз, т. е. $E = E_0/\varepsilon$, тогда, подставляя в (1), получим

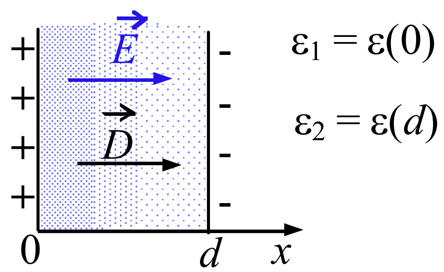
$$E_0/\varepsilon = E_0 - E',$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

$$\frac{q}{\varepsilon} = q - q',$$

$$q' = q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = 359{,}1\,\text{мкКл}.$$

Задача 6. Обкладки плоского конденсатора имеют разноименные заряды по 90 нКл. Между обкладками находится диэлектрик, его относительная диэлектрическая проницаемость меняется по закону $\varepsilon = \varepsilon(x)$, от $\varepsilon_1 = 45$ у положительной обкладки и до $\varepsilon_2 = 3$ – у отрицательной. Определить суммарный связанный заряд q', возникающий во всем объеме диэлектрика.



Решение.

$$q' = \int_V \rho' dV,$$

$$div\vec{P} = -\rho',$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho',$$

$$D = \varepsilon_0 E + P,\ D = \varepsilon\varepsilon_0 E,\ \Rightarrow\ P = D - \varepsilon_0 E = D - \varepsilon_0 \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon(x)} = D - \frac{D}{\varepsilon(x)}.$$

$$\oint_S \left(\vec{D} d\vec{S}\right) = q,\ DS = q,\ D = \frac{q}{S}.$$

$$P = \frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right),$$

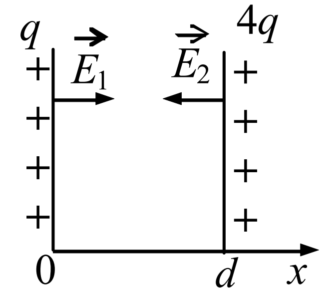
$$-\rho' = \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right)\right),$$

$$q' = -\int \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right)\right) S dx = -\frac{q}{S} S \int \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right) dx = -q\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right),$$

$$q' = -q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon(x)}\right)\Bigg|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} = -q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) = q\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

$q' = 28$ нКл.

Задача 7. На одной из пластин плоского воздушного конденсатора емкостью $C = 82$ пФ находится заряд $q_1 = 198$ нКл, а на другой – в 4 раза больший заряд. Заряды имеют одинаковые знаки. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора.



Решение.

Для определения разности потенциалов между пластинами конденсатора воспользуемся связью между напряженностью и потенциалом:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,\varphi, \tag{1}$$

поскольку напряженность направлена вдоль оси X (1) запишем в виде:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}\ \Rightarrow\ d\varphi = -E dx,$$

тогда разность потенциалов

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_d} d\varphi = -\int_0^d E dx,$$

$$\varphi_d - \varphi_0 = -\int_0^d E dx \ . \qquad (2)$$

Напряженность поля между пластинами определим по принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где E_1 и E_2 – напряженность, созданная первой и второй пластиной, соответственно. В проекциях на ось X

$$E = E_1 - E_2,$$

$$E = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{4q_1}{2\varepsilon_0 S} = -\frac{3q_1}{2\varepsilon_0 S},$$

подставим полученный результат в (2)

$$\varphi_d - \varphi_0 = -\int_0^d \left(-\frac{3q_1}{2\varepsilon_0 S} \right) dx = \frac{3q_1}{2} \frac{d}{\varepsilon_0 S}.$$

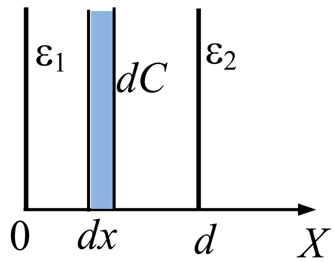
Поскольку емкость плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$, получим разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{3q_1}{2C} = 362 B.$$

Задача 8. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость ε которого изменяется в перпендикулярном направлении по линейному закону от ε_1 до ε_2, причем, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Площадь каждой обкладки S, расстояние между ними d. Найти емкость конденсатора и объёмную плотность связанных зарядов как функцию ε.

Решение.

Выберем ось X по направлению возрастания диэлектрической проницаемости ε.



Величина диэлектрической проницаемости на расстоянии x от пластины определяется из соотношения

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x = a + bx,$$

где $a = \varepsilon_1$, $b = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}$.

Найдем теперь ёмкость плоского конденсатора. Для этого конденсатор представим как систему из последовательно включенных плоских конденсаторов, расстояние между пластинами которых dx. Ёмкость одного такого конденсатора dC

$$dC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon(x) S}{dx}.$$

Так как полученная система представляет собой n последовательно включенных конденсаторов, то их общая ёмкость найдется следующим образом:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{dC_i}$$

или

$$C^{-1} = \int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_0 \varepsilon(x) S} = \frac{1}{b\varepsilon_0 S} \int_0^d \frac{d(a+bx)}{a+bx} = \frac{1}{b\varepsilon_0 S} \ln \frac{a+bd}{a} = \frac{d}{\varepsilon_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S} \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S}{d \ln \varepsilon_2 / \varepsilon_1}.$$

Теперь найдем объёмную плотность связанных зарядов ρ'. Известно, что

$$div\vec{P} = -\rho',$$

в нашем случае, т. к. поле меняется только вдоль оси X

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho',$$

где P – модуль вектора поляризованности диэлектриков, который равен

$$P(x) = \varepsilon_0 (\varepsilon(x) - 1) E(x). \tag{1}$$

Найдем зависимость напряженности электрического поля между пластинами конденсатора, как функцию расстояния от одной из пластин. Для этого рассчитаем зависимость напряжения $U(x)$, полагая, что потенциал одной из пластин равен нулю

$$U(x) = \int_0^d dU(x), \tag{2}$$

где $dU(x)$ – разность потенциалов между пластинами конденсатора ёмкостью dC

$$dU(x)=\frac{q}{dC(x)}=\frac{q\cdot dx}{\varepsilon_0\varepsilon(x)S}=\frac{q\cdot dx}{\varepsilon_0(a+bx)S},$$

подставляя в (2), получим

$$U(x)=\int_0^x\frac{q}{\varepsilon_0 S}\frac{dx}{(a+bx)}=\frac{q}{\varepsilon_0 Sb}\ln(a+bx).$$

Напряженности электрического поля между пластинами конденсатора, равна

$$E(x)=-\frac{dU(x)}{dx}=-\frac{q}{\varepsilon_0 S}\frac{x}{(a+bx)},$$

$$\rho'=-\frac{dP}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(-\frac{q}{\varepsilon_0 S(a+bx)}(a+bx-1)\varepsilon_0\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{S}\left(1-\frac{1}{a+bx}\right)\right)=-\frac{q}{S}\frac{b}{\left(a+bx\right)^2}=-\frac{q}{S}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}\frac{1}{\varepsilon^2(x)}.$$

Задача 9. В центре диэлектрического шара радиусом 3 см, относительная диэлектрическая проницаемость которого равна 35, помещен заряд 25 нКл. Шар окружен безграничным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью 9. Определить поверхностную плотность связанных зарядов.

Решение.

Вектора ***D*** и ***E*** направлены по радиусу, связанные заряды будут образовываться на границе раздела двух диэлектриков. Так как сторонних зарядов возникать не будет, то граничные условия для вектора электрического смещения ***D***, следующие

$$D_{1n}=D_{2n} \text{ или } D_1=D_2,$$

а для вектора поляризованности ***P*** имеем следующие граничные условия

$$P_{2n}-P_{1n}=-\sigma' \text{ или } \sigma'=P_{1n}-P_{2n}. \quad (1)$$

Связь между векторами ***D, P*** и ***E***

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}+\vec{P}, \text{ (здесь учли, что } \vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\text{)}$$

поскольку поля симметричны относительно центра, а вектора все направлены по радиусу, можно записать

$$D = \frac{D}{\varepsilon} + P \Rightarrow P = D - \frac{D}{\varepsilon} = D\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Подставим полученное выражение для поляризованности в (1)

$$\sigma' = D_1\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) - D_2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = D\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right),$$

$$\sigma' = D\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right). \tag{2}$$

Электрическое смещение найдем по теореме Гаусса

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{свобод}.$$

Здесь вектора ***D*** и ***n*** сонаправлены, а замкнутая поверхность совпадает с самим шаром, т. к. связанный заряд возникает на границе шара и диэлектрика, поэтому получим

$$DS = q \Rightarrow D = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi R^2},$$

подставим полученный результат в (2)

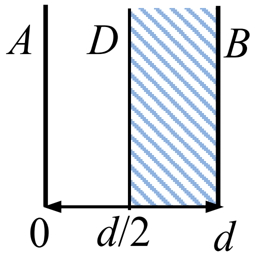
$$\sigma' = \frac{q}{4\pi R^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Задача 10. Как изменится ёмкость плоского воздушного конденсатора, если между его обкладками поместить стеклянную пластину ($\varepsilon = 6$), толщина которой равна половине расстояния между обкладками (см. рисунок)?

Решение.

Обозначим: C_0 – ёмкость конденсатора АВ до введения стеклянной пластины, C – ёмкость конденсатора АВ после введения стеклянной пластины.

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \text{ т. к. для воздуха } \varepsilon \cong 1$$



После введения стеклянной пластины конденсатор AB можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора AD и DB. Ёмкость *C* конденсатора AB после введения стеклянной пластины можно найти по формуле для последовательного соединения конденсаторов.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{AD}} + \frac{1}{C_{DB}} \Rightarrow C = \frac{C_{AD} \cdot C_{DB}}{C_{AD} + C_{DB}} \qquad (1)$$

Находим C_{AD} и C_{DB}. Конденсатор AD – воздушный конденсатор, для него $\varepsilon \cong 1$, электроемкость конденсатора AD

$$C_{AD} = \frac{\varepsilon_0 S}{d/2} = \frac{2\varepsilon_0 S}{d} = 2C_0.$$

Между обкладками конденсатора DB диэлектрик (стекло) и электроемкость конденсатора DB

$$C_{DB} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d/2} = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = 2\varepsilon C_0.$$

Подставим значение емкостей конденсаторов AD и DB в (1)

$$C = \frac{2C_0 2\varepsilon C_0}{2C_0 + 2\varepsilon C_0} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} C_0.$$

Отсюда,

$$\frac{C}{C_0} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}, \ \frac{C}{C_0} = \frac{2 \cdot 6}{6+1} = 1{,}7 \ \text{или} \ C = 1{,}7C_0.$$

Задача 10. Конденсатор ёмкостью 3 мкФ заряжен до разности потенциалов 300 В, конденсатор ёмкостью 2 мкФ – до 200 В. Оба конденсатора соединены после зарядки параллельно одноименными полюсами. Какая разность потенциалов установится на обкладках конденсаторов после их соединения?

Решение.

Делаем чертеж. После параллельного соединения конденсаторов разность потенциалов U между обкладками будет одной и той же для обоих конденсаторов. Ёмкость батарей *C* из двух параллельно соединенных конденсаторов

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2}{U}.$$

С другой стороны $C = C_1 + C_2$.

Следовательно,

$$C_1 + C_2 = \frac{q_1 + q_2}{U},$$

$$U = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}. \qquad (1)$$

Находим заряды q_1 и q_2, находящиеся на обкладках конденсаторов C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{q_1}{U_1};\ C_2 = \frac{q_2}{U_2}$$

Отсюда

$$q_1 = C_1U_1,\ q_2 = C_2U_2.$$

Подставим в (1)

$$U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2},$$

$$U = \frac{3\cdot10^{-6}\cdot300 + 2\cdot10^{-6}\cdot200}{(3+2)\cdot10^{-6}} = 260B.$$

Задача 11. Плоский воздушный конденсатор имеет емкость *C* и заряжен до разности потенциалов *U*. Какую работу *A* надо совершить, чтобы вдвое увеличить расстояние между его обкладками?

Решение.

Согласно закону сохранения энергии, работу можно найти как разность энергий поля конденсатора в начальном и конечном состояниях

$$A = W_2 - W_1.$$

Первоначальная энергия конденсатора

$$W_1 = \frac{C_1U^2}{2},$$

где емкость конденсатора $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1}$.

Конечная энергия конденсатора

$$W_2 = \frac{C_2U^2}{2}.$$

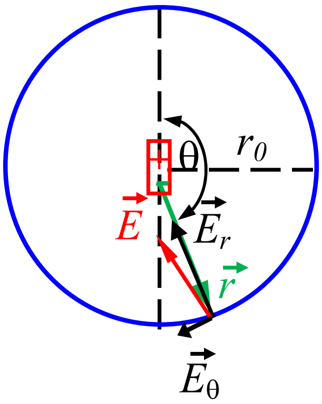
Ёмкость конденсатора изменилась, т. к. изменилось расстояние между обкладками, и стала равной

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{2d_1} = \frac{C}{2}.$$

Тогда

$$W_2 = \frac{C}{2}\frac{U^2}{2} = \frac{CU^2}{4},$$

$$A = \frac{CU^2}{4} - \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2}{4}.$$



Олимпиадная задача 12. Тонкое непроводящее кольцо радиуса r_0 расположено в вертикальной плоскости. В плоскости кольца в его центре помещен электрический диполь, ось которого направлена вертикально, а электрический дипольный момент равен p_e, а модуль плеча $l << r_0$ (см. рис.). Если рассматриваемая точка поля находится на кольце, то какими формулами определяются проекции E_r и E_θ вектора $\boldsymbol{E}$ напряженности поля диполя на полярный радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ и на вектор, проведенный в этой точке поля перпендикулярно $\boldsymbol{r}$ в сторону возрастания полярного угла θ (см. рис.)?

Решение.

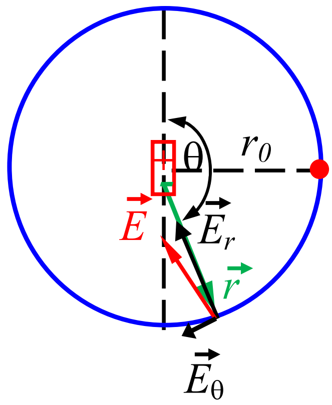
Напряженность электрического поля диполя можно рассматривать по его потенциалу $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e \cos\theta}{r^2}$, где p_e – модуль электрического момента диполя, r – расстояние от диполя, θ – полярный угол между осью диполя и направлением в точку наблюдения. Пользуясь взаимосвязью между потенциалом и напряженностью электростатического поля, найдем проекции E_r и E_θ вектора $\boldsymbol{E}$ напряженности поля диполя на полярный радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ и на вектор, проведенный в этой точке поля перпендикулярно $\boldsymbol{r}$ в сторону возрастания полярного угла θ (см. рис.)

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_e\cos\theta}{r^3}, \quad E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e\sin\theta}{r^3}.$$

Если рассматриваемая точка находится на кольце, то

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_e\cos\theta}{r_0^3}, \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e\sin\theta}{r_0^3}.$$

Олимпиадная задача 13. Тонкое непроводящее кольцо радиуса r_0 расположено в вертикальной плоскости. В плоскости кольца в его центре помещен электрический диполь, ось которого направлена вертикально, а электрический дипольный момент равен p_e, а модуль плеча $l << r_0$ (см. рис.). По кольцу может скользить без трения маленькая бусинка с зарядом $q > 0$ и массой m. Первоначально бусинку удерживают ($\upsilon_0 = 0$) в точке пересечения перпендикуляра, восстановленного к плечу l диполя из его середины, и кольца, как показано на рисунке.



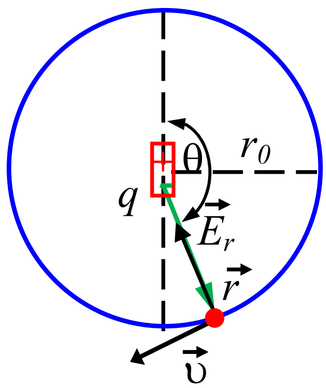
Если бусинку отпустить, она начинает двигаться под действием силы электрического поля диполя. Определить выражение для проекции нормального ускорения $a_n(\theta)$ и тангенциального ускорения $a_\tau(\theta)$ бусинки в зависимости от полярного угла θ между осью диполя и направлением в точку наблюдения, а также выражение для модуля ее полного ускорения $a(\theta)$. (Считать, что сила тяжести много меньше электрической силы).

Решение.

Учтем ответ на предществующее задание

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_e\cos\theta}{r^3}.$$

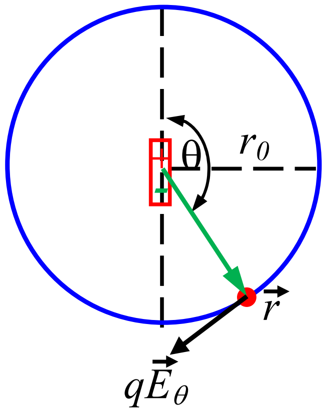
Тогда проекция действующей на бусинку силы на напрвление полярного радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ равна $F_r = qE_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_e q\cos\theta}{r^3}$, $F_r < 0$ при углах $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ и направлена к диполю (см. рис.).



Следовательно, выражение для проекции нормального ускорения $a_n(\theta)$ в зависимости от полярного угла θ между осью диполя и направлением в точку наблюдения имеет вид $a_n(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_e\cos\theta}{mr_0^3}$.

Учтем ответ на предществующее задание $E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e\sin\theta}{r_0^3}$. Тогда проекция тангенсальной (касательной) составляющей силы, действующей на заряженную бусинку, равна $F_\tau = qE_\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e q\sin\theta}{r^3}$.

Отсюда видно,что проекция $F_\tau > 0$ при углах $\dfrac{\pi}{2} \le \theta < \pi$ и направлена по касательной к траектории движения в сторону возрастания полярного угла θ (см. рис.).



Проекция $F_\tau < 0$ при углах $\pi < \theta \le \dfrac{3\pi}{2}$ направлена по касательной к траектории движения в сторону убывания полярного угла θ; $F_\tau = 0$ при угле $\theta = \pi$. Следовательно, выражение для проекции тангенциального ускорения $a_\tau(\theta)$ в зависимости от полярного угла θ между осью диполя и направлением в точку наблюдения имеет вид $a_\tau(\theta) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e q\sin\theta}{m r_0^3}$.

Используем выражение для проекции: $a_\tau(\theta) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e q\sin\theta}{m r_0^3}$ и $a_n(\theta) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\cos\theta}{m r_0^3}$. Получаем выражение для модуля полного ускорения $a(\theta)$ в зависимости от полярного угла θ между осью диполя и направлением в точку наблюдения

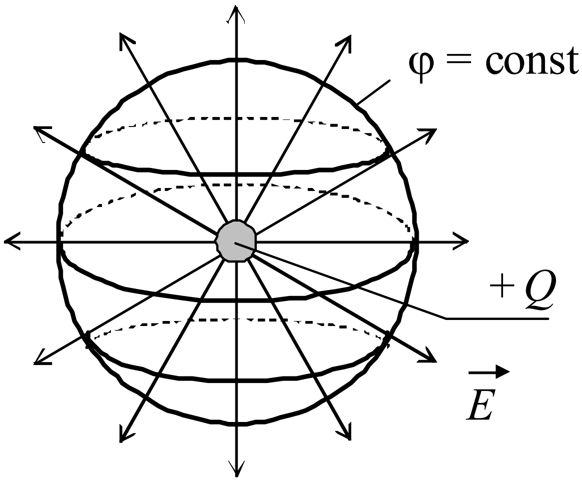
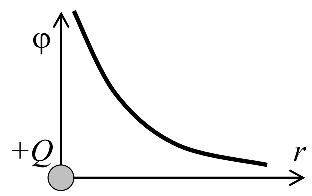
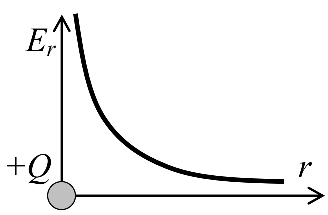
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e q\sin\theta}{m r_0^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_e q\cos\theta}{m r_0^3}\right)^2} \Rightarrow$$

$$a(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e q}{m r_0^3}\sqrt{3+\cos^2\theta}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

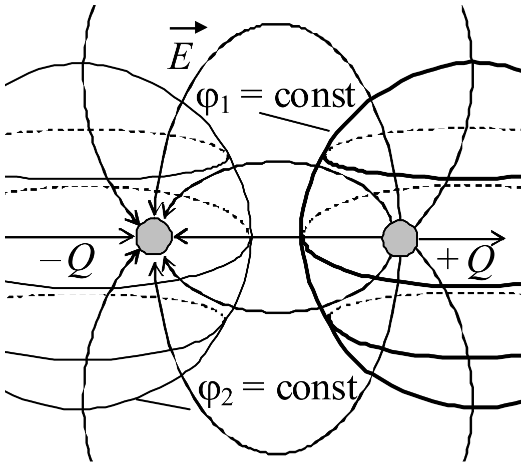
В таблице приведены аналитические выражения и графики напряженности и потенциала для некоторых заряженных тел. Расположение тел в выбранной системе координат также приведено на графиках. (В таблице: r – координаты в полярной системе координат; x – координата в декартовой системе координат. E_r – радиальная проекция напряженности электрического поля; E_x – x-компонента (проекция) напряженности электрического поля. В записи потенциала константа C выбирается так, чтобы на бесконечности потенциал был равен нулю.)

Таблица

Точечный заряд Q
Эквипотенциальные поверхности и силовые линии 
Тело расположено в начале координат. В радиальном направлении:
 Потенциал: $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} + C$
 Напряженность: $E_r = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$, $E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$

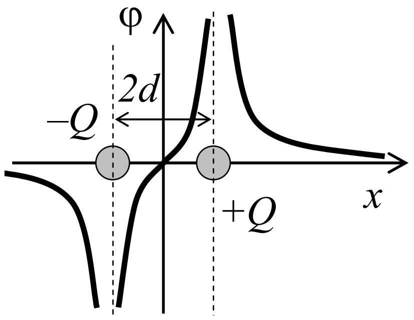
Диполь (два точечных заряда Q и $-Q$, расположенных на расстоянии $2d$)

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии



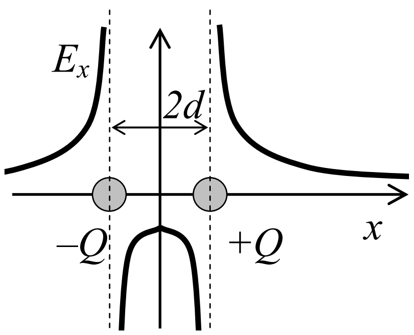
Тела расположены вдоль оси OX симметрично относительно начала координат. Вдоль оси OX:

Потенциал:



$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{d}{x^2 - d^2} + C & \text{при } x > d \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{(-x)}{x^2 - d^2} + C & \text{при } |x| < d \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{(-d)}{x^2 - d^2} + C & \text{при } x < -d \end{cases}$$

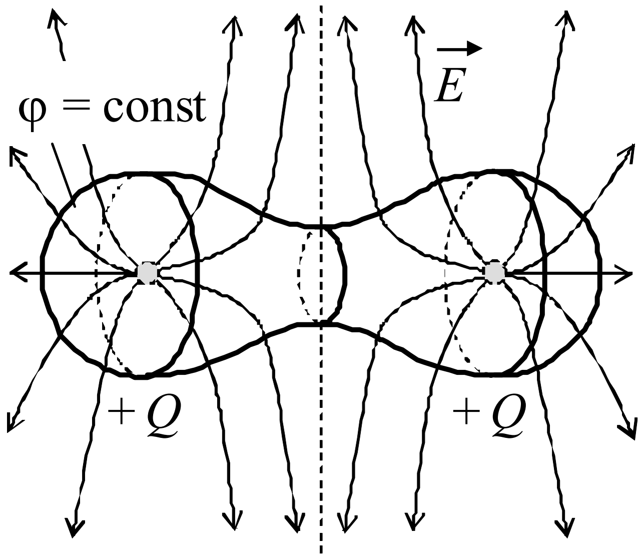
Напряженность: $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$,



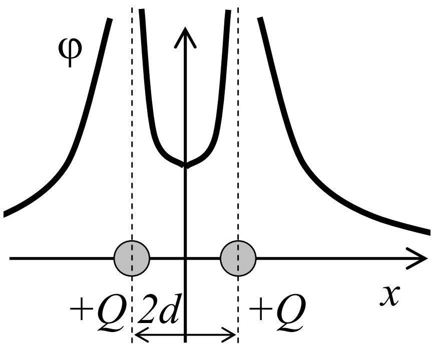
$$E_x = \begin{cases} \dfrac{Q}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{xd}{(x^2 - d^2)^2} & \text{при } x > d \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{(-x^2 - d^2)}{(x^2 - d^2)^2} & \text{при } |x| < d \\ \dfrac{Q}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{(-xd)}{(x^2 - d^2)^2} & \text{при } x < -d \end{cases}$$

Два одинаковых точечных заряда Q, расположенных на расстоянии $2d$

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии

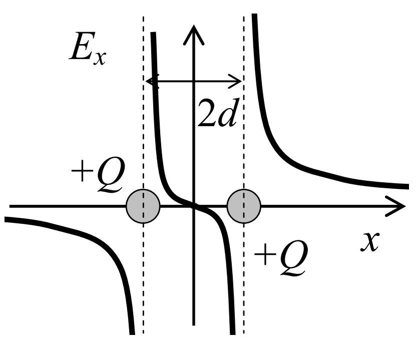


Тела расположены вдоль оси OX симметрично относительно начала координат. Вдоль оси OX:



Потенциал:

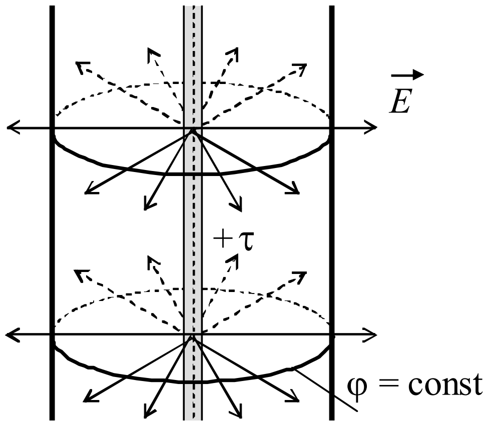
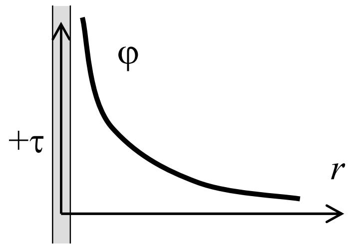
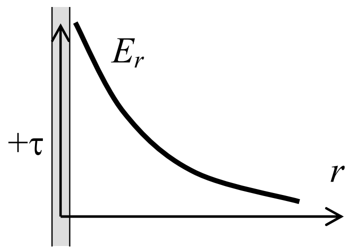
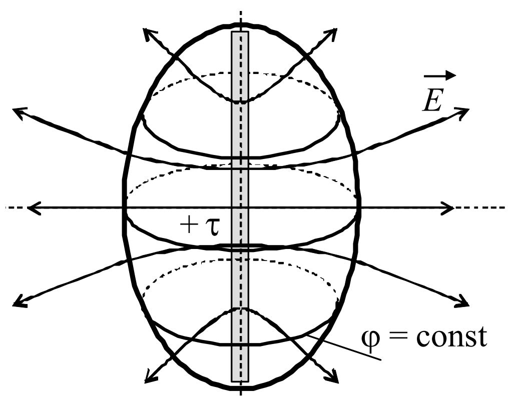
$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{2\,|\,x\,|}{x^2 - d^2} + C & \text{при } |\,x\,| > d \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{(-2d)}{x^2 - d^2} + C & \text{при } |\,x\,| < d \end{cases}$$

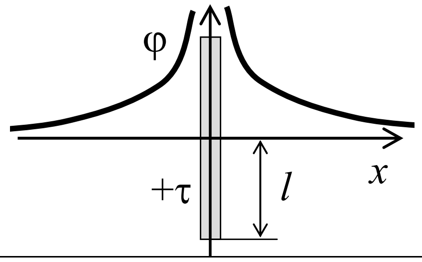


Напряженность: $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$,

$$E_x = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \dfrac{(x^2 + d^2)}{(x^2 - d^2)^2} & \text{при } x > d \\[2ex] \dfrac{Q}{\pi\varepsilon_0} \dfrac{(-xd)}{(x^2 - d^2)^2} & \text{при } |\,x\,| < d \\[2ex] \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \dfrac{(-x^2 - d^2)}{(x^2 - d^2)^2} & \text{при } x < -d \end{cases}$$

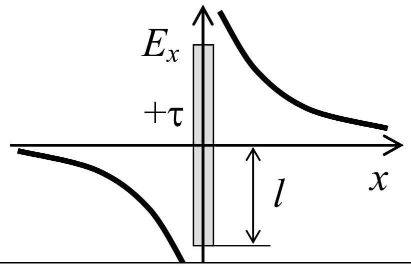
Бесконечно длинная бесконечно тонкая **нить** (**стержень**) с линейной плотностью заряда τ

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии  	
Тело расположено в начале координат. В радиальном направлении перпендикулярно нити:	
 	Потенциал: $\varphi = -\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C$
 	Напряженность: $E_r = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r},\ E_r = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$
Бесконечно тонкий **стержень** (**нить**) длиной $2l$ с линейной плотностью заряда τ	
Эквипотенциальные поверхности и силовые линии  	
Ось OX направлена вдоль оси симметрии, перпендикулярной стержню. Начало координат совпадает с серединой стержня. Вдоль оси OX:	



Потенциал:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{l+\sqrt{x^2+l^2}}{-l+\sqrt{x^2+l^2}}\right)+C$$

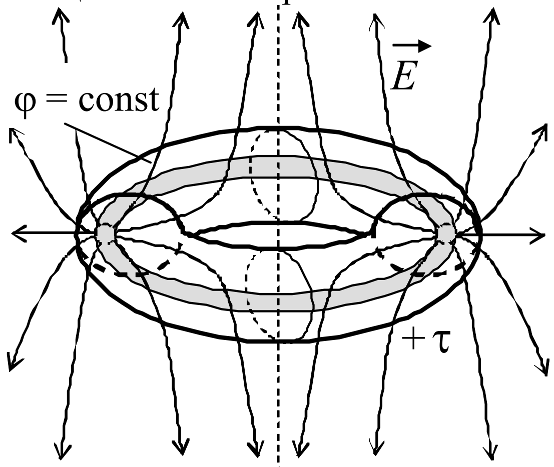


Напряженность: $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$,

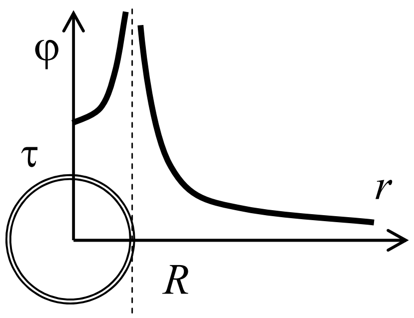
$$E_x = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{l}{x\cdot\sqrt{x^2+l^2}}$$

Бесконечно тонкое **кольцо** радиуса R с линейной плотностью заряда τ

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии



Начало координат совпадает с центром кольца. В радиальном направлении в плоскости кольца:



Потенциал:

$$\varphi = \frac{\tau R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\alpha}}+C$$

Точная зависимость $\varphi(r)$ выражается через специальные (эллиптические) функции. После разложения в ряд можно получить следующие приближенные зависимости:

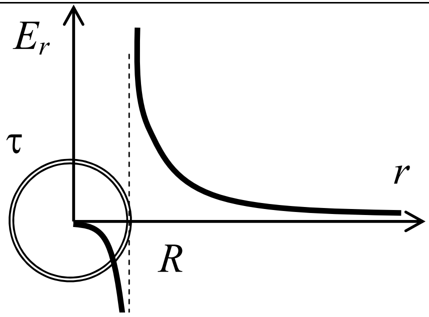
при $r < R$ (внутри кольца) $\varphi \approx \dfrac{\tau}{2\varepsilon_0}\left(1+0{,}23\dfrac{r^2}{R^2}+0{,}31\dfrac{r^4}{R^4}\ldots\right)+C$

при $r > 2R$ (снаружи от кольца)

$$\varphi \approx \frac{\tau}{2\varepsilon_0}\left(\frac{rR}{r^2-R^2}-0{,}66\frac{r^3R^3}{(r^2-R^2)^3}+0{,}48\frac{r^5R^5}{(r^2-R^2)^5}\ldots\right)+C$$

Частный случай, потенциал в центре кольца ($r = 0$):

$$\varphi = \frac{\tau R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha}} + C = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\alpha + C = \frac{\tau}{2\varepsilon_0} + C$$



Напряженность: $E_r = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$.

Точная зависимость $E_r(r)$ также выражается через специальные (эллиптические) функции. После разложения в ряд можно получить следующие приближенные зависимости:

при $r < R$ (внутри кольца) $E_r \approx \dfrac{-\tau}{4\varepsilon_0 R}\left(\dfrac{r}{R} + \dfrac{r^3}{R^3} + 2{,}91\dfrac{r^5}{R^5}...\right)$

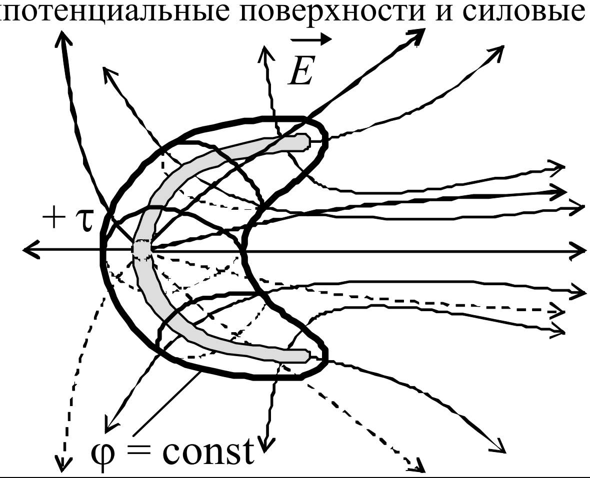
при $r > 2R$ (снаружи от кольца)

$$E_r \approx \frac{\tau}{2\varepsilon_0 R}\left(\frac{r^2R^2}{(r^2 - R^2)^2} - 0{,}95\frac{r^4R^4}{(r^2 - R^2)^4} + 0{,}61\frac{r^6R^6}{(r^2 - R^2)^6}...\right)$$

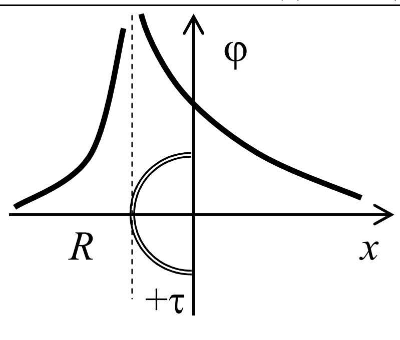
Частный случай, напряженность электрического поля в центре кольца ($r = 0$): $E_r = 0$.

Бесконечно тонкое **полукольцо** радиуса R с линейной плотностью заряда τ

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии



Ось OX направлена вдоль оси симметрии полукольца. Начало координат совпадает с центром полукольца. Вдоль оси OX:



Потенциал:

$$\varphi = \frac{\tau R}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2xR\cos\alpha}} + C$$

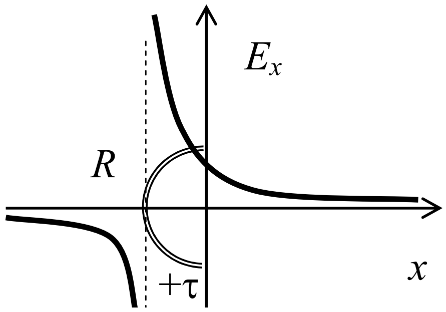
Точная зависимость $\varphi(x)$ выражается через специальные (эллиптические) функции. После разложения в ряд можно получить следующие приближенные зависимости:

при $x < -2R$ $\varphi \approx \dfrac{-\tau}{4\varepsilon_0}\left(\dfrac{R}{x+R} + 0{,}39\dfrac{R^2}{(x+R)^2} + 0{,}10\dfrac{R^3}{(x+R)^3}\ldots\right) + C$

при $x > -R$ $\varphi \approx \dfrac{\tau}{4\varepsilon_0}\left(\dfrac{R}{x+R} + 0{,}39\dfrac{xR^2}{(x+R)^3} + 0{,}35\dfrac{x^2R^3}{(x+R)^5}\ldots\right) + C$

Частный случай, потенциал в центре кольца ($r = 0$):

$$\varphi = \frac{\tau R}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{d\alpha}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2xR\cos\alpha}} + C = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} d\alpha + C = \frac{\tau}{4\varepsilon_0} + C$$



Напряженность: $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$.

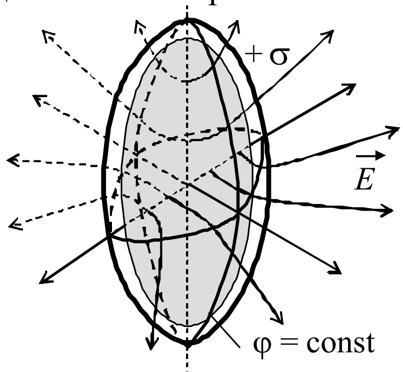
Точная зависимость $E_x(x)$ также выражается через специальные (эллиптические) функции. После разложения в ряд можно получить следующие приближенные зависимости:

при $x < -2R$ $E_x \approx \dfrac{-\tau}{4\varepsilon_0 R}\left(\dfrac{R^2}{(x+R)^2} + 0{,}77\dfrac{R^3}{(x+R)^3} + 0{,}29\dfrac{R^4}{(x+R)^4}\ldots\right)$

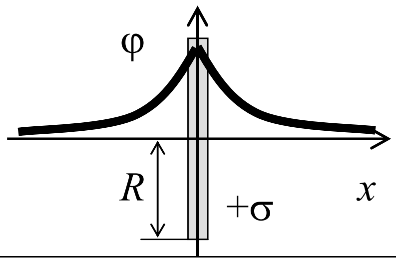
при $x > -R$ $E_x \approx \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(\dfrac{R^2}{(x+R)^2} + 1{,}2\dfrac{xR^2}{(x+R)^3} + 0{,}96\dfrac{x^2R^2}{(x+R)^4}\ldots\right)$

Диск (**круглая пластина**) радиусом R с поверхностной плотностью заряда σ

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии

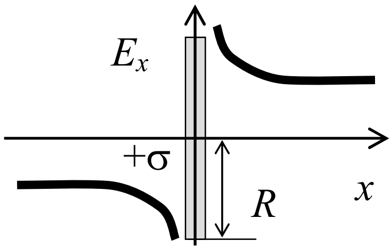


Ось OX направлена перпендикулярно плоскости диска. Начало координат совпадает с центром диска. Вдоль оси OX:



Потенциал:

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-x + \sqrt{x^2 + R^2}\right) + C & \text{при } x > 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(x + \sqrt{x^2 + R^2}\right) + C & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

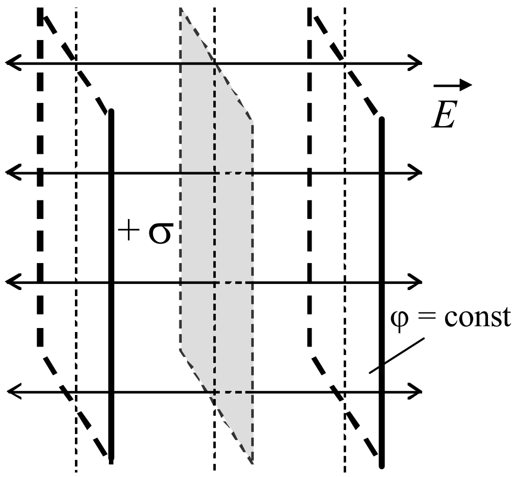


Напряженность: $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$,

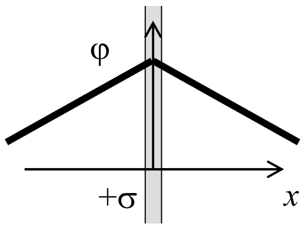
$$E_x = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \dfrac{\left(-x + \sqrt{x^2 + R^2}\right)}{\sqrt{x^2 + R^2}} & \text{при } x > 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \dfrac{\left(-x - \sqrt{x^2 + R^2}\right)}{\sqrt{x^2 + R^2}} & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Бесконечная **плоскость** с поверхностной плотностью заряда σ

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии

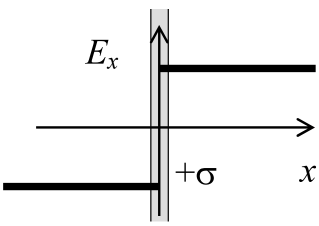


Плоскость расположена в начале координат. Ось OX перпендикулярна заряженной плоскости. Вдоль оси OX:



Потенциал:

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x| + C$$

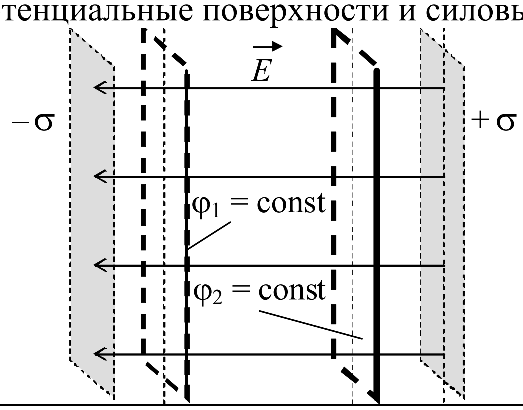


Напряженность: $E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$,

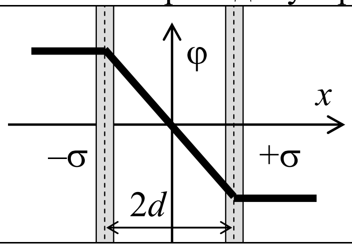
$$E_x = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{при } x > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Две бесконечные **плоскости**, расположенные на расстоянии $2d$
с поверхностными плотностями заряда σ и – σ

Эквипотенциальные поверхности и силовые линии

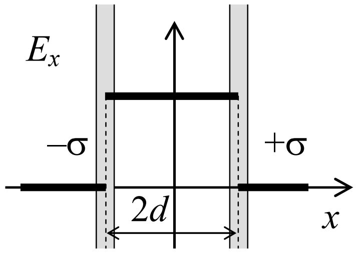


Плоскости расположены симметрично относительно начала координат. Ось ОХ перпендикулярна заряженный плоскостям. Вдоль оси ОХ:



Потенциал:

$$\varphi = \begin{cases} \pm C & \text{при} \, |x| > d \\ -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} x + C & \text{при} \, |x| < d \end{cases}$$



Напряженность: $E_x = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$,

$$E_x = \begin{cases} 0 & \text{при} \, |x| > d \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & \text{при} \, |x| < d \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний. 2000. 352 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики: в 3 т. Т. 3. – М.: Наука, 2003.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс общей физики. – М.: Высшая школа, 1999.
4. Трофимова Т.И. Курс общей физики. Изд-во Академия. 18-е издание. 2010. – 560 с. (1–17 издания)
5. Трофимова Т.И., Фирсов А.В. Курс физики. Задачи и решения. – М.: Академия, 2010.
6. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высшая школа, 1988. – 463 с.
7. Калашников С.Г. Электричество. – М.: Наука, 1987.
8. Мартинсон Л.К., Морозов А.Н., Смирнов Е.В. Электромагнитное поле. – М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2013.
9. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: Физматлит, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МОРЖИКОВА Юлия Борисовна
БЕХТЕРЕВА Елена Сергеевна

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Компьютерная верстка *К.С. Чечельницкая*
Дизайн обложки *А.И. Сидоренко*

Подписано к печати 19.08.2014. Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 5,47. Уч.-изд. л. 4,94.
Заказ 801-14. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru