

### Кармазин Сергей Владимирович

Кандидат физико-математических наук, учитель физики МОУ Гимназия г. Фрязино и ЦМИТ «Ноосфера» г. Фрязино Московской области, доцент МФТИ, член ЦПК по физике Всероссийской олимпиады школьников.

## Как кривую превратить в прямую

В предыдущей статье («Потенциал» №6) мы увидели, насколько **полезной** с точки зрения обработки результатов эксперимента является **линейная зависимость одной физической величины от другой**. С ее помощью мы можем оценить не только достоверность выбранной для рассмотрения физической модели, но и качество проведенных измерений. **Линейная зависимость** дает нам возможность **исключить из рассмотрения промахи экспериментатора, определить одну или две неизвестные (измеряемые) величины и оценить погрешность измерения**. А как быть, если, согласно теории, зависимость исследуемых величин друг от друга не является линейной? **Ответ простой – надо попытаться линеаризовать эту зависимость**. Надо посредством математических преобразований, используя различные комбинации, ввести такие новые переменные, которые, с одной стороны, содержат в себе интересующие нас величины, а с другой стороны связаны между собой линейной зависимостью. Рассмотрим несколько примеров, которые поясняют, как эта процедура осуществляется на практике. Начнем с простого.

**Пример 1.** *Имеется источник напряжения, набор резисторов с различными сопротивлениями  $R$  и идеальный вольтметр. Требуется определить ЭДС ( $\varepsilon$ ) источника и его внутреннее сопротивление  $r$ .*

Для решения задачи соберем цепь, представленную на рис. 1.

Будем подключать резисторы с разными  $R$  и измерять напряжение  $U$  на них. Сила тока в цепи

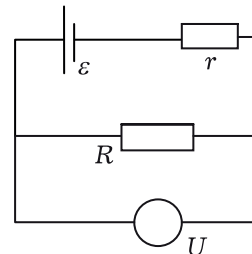


Рис. 1

$I = \varepsilon / (r + R)$ . Следовательно, зависимость  $U(R)$  имеет вид

$$U = IR = \frac{\varepsilon R}{R + r} \quad (1)$$

и не является линейной. Но не все так грустно! Приравняем обратную величину левой части равенства (1) обратной величине его правой части

$$\frac{1}{U} = \frac{r}{\varepsilon} \frac{1}{R} + \frac{1}{\varepsilon} \quad (2)$$

№	R, Ом	U, В	$\frac{1}{R}$ , $\frac{1}{\text{Ом}}$	$\frac{1}{U}$ , $\frac{1}{\text{В}}$
1	3,0	6,75	0,33	0,148
2	4,0	7,20	0,25	0,139
3	5,0	7,50	0,20	0,133
4	6,0	7,71	0,17	0,130
5	7,0	7,88	0,14	0,127
6	8,0	8,00	0,13	0,125
7	9,0	8,10	0,11	0,123

Табл. 1

И, о чудо! Мы видим, что  $\frac{1}{U}$  и  $\frac{1}{R}$  связаны между собой линейной зависимостью вида  $Y = kX + b$ , где угловой коэффициент  $k = \frac{r}{\varepsilon}$ , а константа  $b = \frac{1}{\varepsilon}$ . Зная экспериментальные значения  $U$  и  $R$ , вычисляем их обратные величины. Такие пересчеты удобно проводить в программе Excel. Добавляем в таблицу измерений два новых столбца и записываем в них значения  $\frac{1}{U}$  и  $\frac{1}{R}$  для каждой пары  $U$  и  $R$ . Ниже представлен вариант такой модифицированной таблицы (табл.1), где цветом выделены дополнительные столбцы.

График зависимости  $\frac{1}{U} \left( \frac{1}{R} \right)$  должен быть прямой линией. По точке пересечения этой линии с осью  $\frac{1}{U}$  мы определяем  $\frac{1}{\varepsilon}$ , а ее угловой коэффициент даст нам значение  $\frac{r}{\varepsilon}$ . Теперь нахождение  $\varepsilon$  и  $r$  становится чисто арифметической задачей.

**Пример 2.** Необходимо найти ускорение  $a$  каретки на наклонной плоскости. Каретка каждый раз стартует от упора с нулевой начальной скоростью в одинаковых условиях (рис. 2). Первый датчик постоянно расположен на небольшом фиксированном расстоянии от места старта в точке с координатой  $X_0$  и обеспечивает запуск секундомера в момент прохождения каретки мимо него. Предполагается, что каретка всегда проходит мимо этого датчика с одинаковой скоростью  $X_0$ . В момент прохождения кареткой

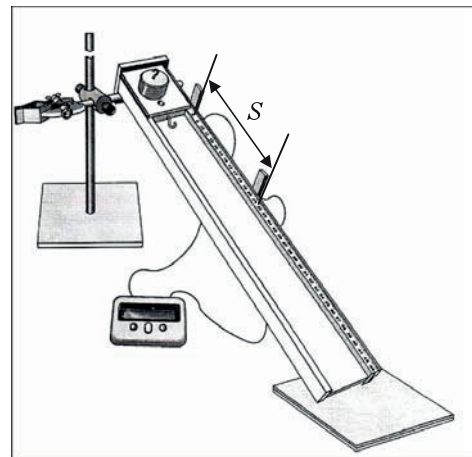


Рис. 2



второго датчика, расположенного в точке с координатой  $X$ , секундомер выключается. Исследуем зависимость времени  $t$  движения каретки между датчиками от расстояния  $S$  между ними.

Зависимость перемещения  $S$  от времени при равноускоренном движении имеет вид  $S = X - X_0 = V_0 t + \frac{at^2}{2}$ . Следовательно, зависимость  $S(t)$  является квадратичной. Для ее линеаризации достаточно обе части последнего равенства разделить на  $t$ . В результате получаем соотношение

$$\frac{S}{t} = V_0 + \frac{a}{2}t, \quad (3)$$

которое представляет собой линейную зависимость средней скорости  $\frac{S}{t}$  от времени  $t$ .

Уточним некоторые детали выполнения этого экспериментального задания. В работе [1] отмечается, что для подтверждения линейности исследуемой зависимости желательно получить как минимум пять экспериментальных точек. Следовательно, мы должны устанавливать второй датчик не менее пяти раз в различных местах наклонной плоскости по всей ее длине, задавая, тем самым, пять различных значений  $S$ . Имеет ли смысл получить большее количество экспериментальных точек? Имеет, но в пределах разумного. Если максимальное расстояние от первого датчика до конца наклонной плоскости 30–35 см, то сделать измерения в 10–12 точках вполне целесообразно, это уменьшит случайную погрешность определения ускорения. Но делать их через каждый

сантиметр и получить 30 экспериментальных точек слишком трудоемко и к существенному повышению точности измерения уже не приведет.

Измерение времени  $t$  для каждого  $S$  следует проводить не менее 5–10 раз. В таблицу заносится среднее арифметическое полученных значений. Дело в том, что много случайных факторов влияет на время соскальзывания каретки. Прежде всего, оно зависит от технологии ее запуска, от степени прижатия каретки к упору и самой наклонной плоскости в начальный момент, от направления движения руки, которая отпускает каретку. Перечисленные факторы определяют разброс начальной скорости  $V_0$ , с которой каретка проходит мимо первого датчика. *Вспоминаем: в каждом эксперименте очень много нюансов!* Кроме того, на характер движения существенное влияние оказывают пылинки, соринки, микрокапли влаги на наклонной плоскости, количество которых в процессе измерений может изменяться. Время соскальзывания, также, сильно зависит от степени прижатия каретки к боковым направляющим выступам наклонной плоскости. Для того, чтобы умень-

№	$S, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$t_{\text{ср}}$	$\frac{S}{t_{\text{ср}}}, \frac{\text{ м}}{\text{ с}}$
		1. 0,33 2. 0,36 3. 0,35 4. 0,31 5. 0,31 6. 0,32 7. 0,37	0,34	0,73

Табл. 2



шить влияние этого эффекта, наклонная плоскость должна быть прочно закреплена, а направление движения каретки должно быть строго перпендикулярно линии касания наклонной плоскости с горизонтальным столом. Не надо, также, забывать, что герконовые или оптоэлектронные датчики обладают определенным разбросом по моменту срабатывания. Наличие всех перечисленных факторов убеждает нас в необходимости многократного измерения времени соскальзывания для каждого  $S$ .

В итоге, таблица измерений в данном эксперименте должна выглядеть следующим образом (табл. 2). Для примера заполнена лишь одна строка таблицы, цветом выделен дополнительный, расчетный столбец, появившийся в результате линеаризации.

Согласно (3), угловой коэффициент графика, построенного в координатах  $(t_{cp}, \frac{S}{t_{cp}})$ , равен половине ускорения  $\frac{a}{2} = \frac{\Delta t_{cp}}{\Delta t_{cp}}$ , а пересечение графиком оси  $\frac{S}{t_{cp}}$  определяет значение начальной скорости  $V_0$ , с которой каретка проходит мимо первого (верхнего) датчика.

В следующих примерах обсудим только математические аспекты линеаризации ожидаемых зависимостей.

**Пример 3.** В вашем распоряжении имеются весы, линейка и несколько образцов одного и того же одножильного провода. Часть изоляции на этих образцах удалена. Сами образцы и оставшиеся на них

куски изоляции имеют различную длину. Требуется определить погонную массу (массу единицы длины) металлической жилы данного провода  $\mu_m$  и погонную массу его изоляции  $\mu_i$ . Снять изоляцию с провода не получится, она очень прочно к нему приклеена.

Определим с помощью весов массу  $M$  каждого образца. Линейкой измерим его длину  $L$  и длину изоляции на этом отрезке  $l$ . Очевидно, что масса  $M$  равна сумме масс металлической жилы и массы пластиковой изоляции

$$M = \mu_m L + \mu_i l \quad (4)$$

Эта зависимость не является линейной, так как и первое, и второе слагаемые в правой части (4) различны для различных образцов, (ни одно из них не является константой). Однако, если разделить (4) на  $l$ ,

$$\frac{M}{l} = \mu_m \frac{L}{l} + \mu_i \quad (5)$$

то  $\frac{M}{l}$  становится линейной функцией

аргумента  $\frac{L}{l}$ . При этом, погонная

плотность металлической жилы  $\mu_m$  является угловым коэффициентом, а  $\mu_i$  – точкой пересечения оси  $\frac{M}{l}$

графиком этой функции. Таблица измерений в этом эксперименте для каждого образца должна содержать три значения измеряемых величин ( $M$ ,  $L$ ,  $l$ ) и два значения вычисляемых величин  $\frac{M}{l}$  и  $\frac{L}{l}$ .

Построение графика, по горизонтальной оси которого отложено безразмерное отношение  $\frac{L}{l}$ , а по вертикальной ве-



личина  $\frac{M}{l}$ , позволит определить искомые значения  $\mu_{II}$  и  $\mu_M$ .

**Пример 4.** В баке находится некоторое количество  $m_x$  холодной воды. Начальная температура холодной воды  $t_x$  нам известна. В бак через расходомер начинает медленно наливаться горячая вода, которая быстро перемешивается с водой, уже там находящейся. Исследуется зависимость установившейся температуры  $t_y$  от массы поступившей в бак горячей воды  $m_T$ . Необходимо определить температуру горячей воды  $t_T$  и начальную массу холодной воды  $m_x$ .

Запишем уравнение теплового баланса. Количество тепла, отданное горячей водой, равно количеству тепла, полученному холодной водой  $c_B m_T (t_T - t_y) = c_B m_x (t_y - t_x)$ , где  $c_B$  – удельная теплоемкость воды. Отсюда получаем нелинейную зависимость  $t_y(m_T)$

$$t_y = \frac{m_T t_T + m_x t_x}{m_x + m_T} \quad (6)$$

Очевидно, что при  $m_T = 0$   $t_y = t_x$ , а при очень большом количестве горячей воды ( $m_T \gg m_x$ )  $t_y$  стремится к  $t_T$ .

Линеаризация зависимости (6) не столь очевидна, как в предыдущих примерах. Мы достигнем нашей цели, если вычтем из левой и правой части уравнения (6) температуру холодной воды  $t_x$ . В результате получим

$$t_y - t_x = \frac{m_T (t_T - t_x)}{m_x + m_T} \quad (7)$$

Приравняем обратные величины левой и правой части равенства (7) и почленно поделим получившуюся дробь на ее знаменатель

$$\frac{1}{t_y - t_x} = \frac{m_x + m_T}{m_T (t_T - t_x)} = \frac{1}{m_T} \frac{m_x}{(t_T - t_x)} + \frac{1}{(t_T - t_x)} \quad (8)$$

Теперь  $\left(\frac{1}{t_y - t_x}\right)$  является линейной функцией  $\frac{1}{m_T}$ . Ее график пересекает вертикальную ось в точке  $\left(\frac{1}{t_T - t_x}\right)$ , что позволяет при известной  $t_x$  найти  $t_T$ . По коэффициенту наклона  $\frac{m_x}{(t_T - t_x)}$  легко определить массу холодной воды  $m_x$ . Таким образом, таблица измерений (табл. 3) в этом эксперименте должна содержать два столбца измеряемых величин ( $m_T$  и  $t_y$ ) и два дополнительных столбца вычисляемых величин  $\left(\frac{1}{t_y - t_x}$  и  $\frac{1}{m_T}\right)$ .

№	$m_T$ , кг	$t_y$ , °C	$\frac{1}{t_y - t_x}$ , °C	$\frac{1}{m_T}$ , кг

Табл. 3

**Пример 5.** В схеме, изображенной на рис. 3, потенциометр с полным сопротивлением  $R_0$  подключен к идеальному источнику напряжения  $U_0$ . Необходимо теоретически и экспериментально исследовать зависимость напряже-



ния  $U_R$  на выходе потенциометра при подключенном резисторе  $R_1$  от напряжения  $U_V$  на выходе потенциометра без резистора  $R_1$ , а также определить величину отношения  $\frac{R_1}{R_0}$ . Для того, чтобы изменять  $U_V$  необходимо, естественно, вращать ручку потенциометра.

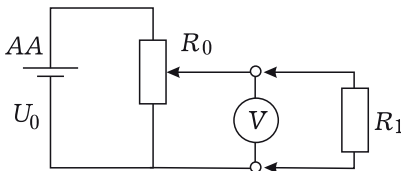


Рис. 3

Сначала получим теоретическую зависимость  $U_R$  от  $U_V$ . Представим потенциометр в виде двух последовательно включенных резисторов. Сопротивление нижней по схеме части потенциометра (от движка до контакта, соединенного с минусом батарейки) обозначим  $R_x$ . Тогда сопротивление верхней части потенциометра равно  $R_0 - R_x$ . Из закона Ома следует, что  $U_V = \frac{U_0}{R_0} R_x$ , соответственно

$$R_x = \frac{U_V U_0}{U_0} \quad (9)$$

При подключении к вольтметру резистора  $R_1$  сопротивление нижней части схемы становится равным сопротивлению параллельно включенных  $R_1$  и  $R_x$ , а напряжение  $U_R$  равно

$$U_R = \frac{U_0 \frac{R_x R_1}{R_x + R_1}}{R_0 - R_x + \frac{R_x R_1}{R_x + R_1}} \quad (10)$$

Подставляя  $R_x$  из (9) в (10) получаем искомую зависимость  $U_R(U_V)$

$$U_R = \frac{R_1 U_0^2 U_V}{R_1 U_0^2 + (R_0 U_0 U_V - R_0 U_0^2)} \quad (11)$$

Весьма занятно проанализировать, как изменяется график нелинейной функции  $U_R(U_V)$  в зависимости от величины параметра  $R_1$ . Предоставляем вам возможность сделать это самостоятельно. Измерение  $U_R$  при различных  $U_V$  и фиксированных  $R_1$  и  $R_0$  даст нам набор экспериментальных точек, по которым мы сможем построить график и сравнить его с теоретическим.

Теперь вспомним, что согласно заданию, необходимо еще определить величину отношения  $\frac{R_1}{R_0}$ .

Если бы в нашем распоряжении был омметр, мы бы могли измерить  $R_1$  и  $R_0$  непосредственно. Но у нас есть только вольтметр. Поэтому придется вытаскивать искомое отношение из выражения (11). Если в нем числитель и знаменатель разделить на  $R_0$ , то получим линейное уравнение относительно  $\frac{R_1}{R_0}$ . Чтобы его решить, достаточно один раз измерить  $U_R$  при любом  $U_V$ , (но не слишком близко к крайним положениям потенциометра, потому что на краях диапазона  $U_R$  всегда равно  $U_V$ , и (11) превращается в тождество). Од-



нако, в экспериментальной физике мы ничего не делаем однократно!

Для определения  $\frac{R_1}{R_0}$  следует воспользоваться всеми экспериментальными точками, всей зависимостью (11) целиком. А для этого ее надо линеаризовать! Сначала приравняем обратные величины левой и правой части равенства (11)

$$\frac{1}{U_R} = \frac{R_1}{U_V} + \frac{R_0}{R_1 U_0} - \frac{R_0 U_V}{R_1 U_0^2}$$

и перенесем  $\frac{1}{U_V}$  в левую часть уравнения

$$\left( \frac{1}{U_R} - \frac{1}{U_V} \right) = \frac{R_0}{R_1 U_0} - \frac{R_0}{R_1 U_0^2} U_V \quad (12)$$

График линейной зависимости  $\left( \frac{1}{U_R} - \frac{1}{U_V} \right)$  от  $U_V$  пересекает вертикальную ось в точке  $\frac{R_0}{R_1 U_0}$ .

$U_0$  мы можем измерить непосредственно и, следовательно, можем определить величину  $\frac{R_1}{R_0}$ . В

данном примере таблица экспериментальных значений должна содержать два столбца измеряемых величин ( $U_V$  и  $U_R$ ), и столбец вы-

числяемой величины  $\left( \frac{1}{U_R} - \frac{1}{U_V} \right)$ .

Особо обратим внимание на то, что в примерах 1,4,5 задача линеаризации решалась путем перехода к равенству обратных величин левых и правых частей соответствующих уравнений. Этот один из основных приемов, приводящих к заветной цели!

**Пример 6.** Очень часто в физике величины  $X$  и  $Y$  связаны показательной функцией

$$Y = A b^{kX} \quad (13)$$

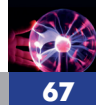
где  $A$  и  $k$  – константы, а  $b$  – основание степени, которое чаще всего равно числу  $e \approx 2,718$ . В этом случае зависимость (13) называется экспоненциальной и ее иногда записывают в виде  $Y = A \exp(kX)$ . Например, так изменяется во времени  $t$  заряд  $q$  на конденсаторе емкостью  $C$  при его разряде через резистор с

сопротивлением  $R$ ,  $q = q_0 e^{-\frac{t}{CR}}$ , где  $q_0$  – заряд на конденсаторе в момент времени  $t = 0$ . Аналогично ведет себя температура нагретого тела при его остывании в контакте со средой, температура которой поддерживается постоянной. Скорость лодки после выключения двигателя будет убывать по такому же закону, если сила сопротивления ее движению в воде прямо пропорциональна ее скорости. Зависимость любой физической величины от времени всегда будет экспоненциальной с отрицательным показателем экспоненты, если скорость изменения физической величины пропорциональна самой этой физической величине. Линеаризация экспоненциальной зависимости заключается в ее логарифмировании

$$\ln Y = \ln A + kX. \quad (14)$$

Угловым коэффициентом графика линейной зависимости  $\ln Y(X)$  определяется значение константы  $k$ , а точка пересечения с вертикальной осью – значение константы  $A$ .

В экспериментальной физике всегда для нахождения неизвестных величин, определяющих показательную функцию вида (13), необхо-



дим построение графика в **полулогарифмическом масштабе** (по одной оси откладывается логарифм какой-либо физической величины, а по другой – физическая величина, от которой этот логарифм зависит).

В качестве примера рассмотрим зависимость удельного сопротивления стекла от температуры. В отличие от электронов в металле, катионы щелочных металлов в стекле не могут двигаться свободно: чтобы «перескочить» в новое место, катион должен обладать энергией большей, чем энергия активации  $W_a$ . Удельное сопротивление материала  $\rho$  обратно пропорционально концентрации подвижных носителей заряда, следовательно, согласно закону Больцмана

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{W_a}{kT}\right), \quad (15)$$

где  $\rho_0$  – постоянный коэффициент,  $T$  – температура,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Для нахождения энергии активации  $W_a$  необходимо снять зависимость удельного сопротивления от температуры  $\rho(T)$ . Прологарифмировав (15), получаем

$$\ln \rho = \ln \rho_0 + \frac{W_a}{k} \frac{1}{T},$$

и угловой коэффициент графика линейной зависимости  $\ln \rho \left( \frac{1}{T} \right)$  после умножения его на  $k$  определяет значение  $W_a$ .

**Пример 7.** Предположим, что физические величины  $X$  и  $Y$  связаны между собой степенной функцией

$$Y = AX^b \quad (16)$$

и нам нужно определить показатель степени  $b$ . В этом случае, после логарифмирования (16) получаем  $\ln Y = \ln A + b \ln X$ , и искомая константа  $b$  является угловым коэффициентом графика линейной зависимости  $\ln Y (\ln X)$ , построенного в **двойном логарифмическом масштабе**.

Итак, мы убедились в моществе и неизбежности использования линейной функции в экспериментальной физике. Вместе с тем, математические способы линеаризации различных теоретических зависимостей не всегда являются очевидными. Они требуют определенного навыка, которым необходимо овладеть для успешного выполнения экспериментальных заданий.

## Литература

1. «Культура построения графиков на олимпиадах по физике». [www.4ipho.ru/dokumenty/](http://www.4ipho.ru/dokumenty/)