Методы нелинейного программирования

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Они применяются для оптимизации как детерминированных, так и стохастических процессов.

Общим для данных методов является то, что их используют при решении оптимальных задач с нелинейными функциями цели и ограничениями в виде нелинейных соотношений в форме равенств или неравенств.

Математическая формулировка задачи нелинейного программирования:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_\mathbf{n}\right)$$

где F является количественной оценкой представляющего интерес качества объекта оптимизации.

На независимые переменные можно наложить ограничения в виде равенств:

$\varphi(x_1 \ldots x_n)=0$ или неравенств: $\varphi(x_1 \ldots x_n)\leq 0$.

(Как правило, решения задач нелинейного программирования могут быть найдены только численными методами.)

Методы нелинейного программирования можно охарактеризовать как многошаговые методы или методы последовательного улучшения начального (исходного) решения.

Большинство методов нелинейного программирования основываются на движении в **n** – мерном пространстве в направлении оптимума.

При этом, из некоторого исходного или промежуточного состояния $x^{(k)}$ осуществляется переход в следующее состояние $x^{(k+1)}$ на величину шага $\rightarrow \Delta x^{(k)}$, т.е. $x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$.

В случае максимального (минимального) значения должно выполняться условие:

$F(x^{k+1})>F(x^{x})max$

$F(x^{k+1})<F(x^{x})min$

В данной группе методов при оптимизации используется информация, получаемая при сравнительной оценке величины критерия оптимальности в результате выполнения очередного шага Это численные методы поиска экстремума функции.

В зависимости от числа факторов можно выделить два случая поиска оптимума:

1. ***Одномерный поиск, когда функция F зависит от одного фактора***

$$F=F(x)$$

2. ***Многомерный поиск, когда факторов больше одного***

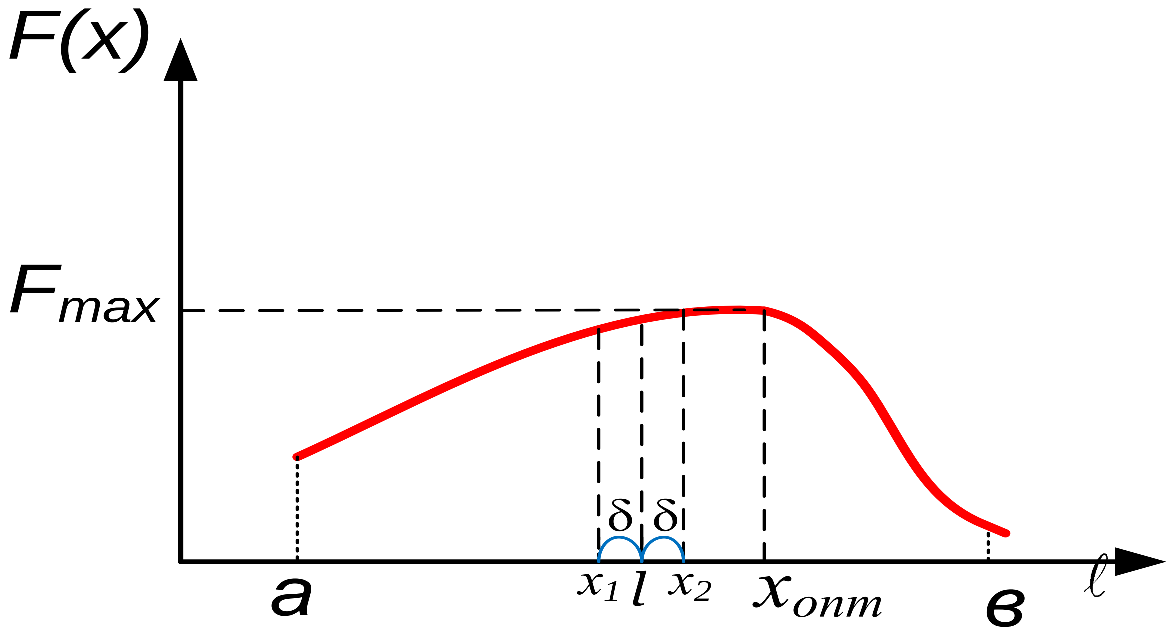
$$F=F(x_1,x_2\ldots x_n)$$

Одномерный поиск оптимума.

МЕТОД ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ (МЕТОД ДИХОТОМИИ)

Простейшими методами нахождения экстремума функции одной переменной является метод деления отрезка пополам (дихотомия).

Рассмотрим поиск максимума на отрезке (a,b) с заданной степенью погрешности ε.



Разделим отрезок [a,b] пополам (т. l)ℓ.

Рассчитаем значение функции в этой точке F=F (l).

Затем произвольно выбираем малое приращение х (δ) и откладываем его слева или справа относительно т. l:

$$x_1 = l + \delta;$$

$$x_2 = l - \delta,$$

Рассчитываем значения функции в двух новых точках $F(x_1)$ и $F(x_2)$ и сравниваем их. Если $F(x_1)<F(x_2)$ (так как это показано на рис.), то максимум находится в правой стороне отрезка. Выбираем отрезок $[x_1, b]$, а отрезок $[a, x_1]$ отбрасываем (на этой половине отрезка максимума нет).

Точку a перенесем в точку x_1 и вновь рассматриваем отрезок $[a, b]$. Если же $F(x_1) > F(x_2)$, то выбрали бы отрезок $[a, x_2]$. После выбора той или иной половины отрезка, задача возвращается к исходным позициям. Опять задан отрезок $[a, b]$, на котором надо найти максимум. Поэтому проводим следующий цикл расчета, подобный предыдущему. Процедура вычислений повторяется, пока не выполнится условие:

$$b - a \le \varepsilon.$$

Метод «золотого сечения».

Поиск оптимума с помощью метода «золотого сечения»основан на делении отрезка на 2 части, при этом отношение длины всего отрезка к большей его части равно отношению большей его части к меньшей.

Разделим отрезок на две части m и l- m

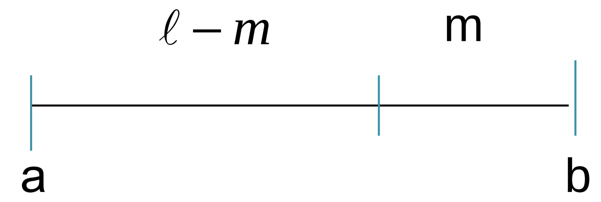
m – меньшая часть;
ℓ ***-m – большая;***

$$\frac{\ell}{\ell-\mathbf{m}}=\frac{\ell-\mathbf{m}}{\mathbf{m}};$$

$$\ell\mathbf{m}=(\ell-\mathbf{m})^2;$$

$$\ell\mathbf{m}=\ell^2-2\ell\mathbf{m}+\mathbf{m}^2=0;$$

$$\mathbf{m}^2-3\ell\mathbf{m}+\ell^2=0;$$



Решаем квадратное уравнение относительно m.

$$\mathbf{m}=\frac{3\ell}{2}-\sqrt{\left(\frac{3\ell}{2}\right)^2-\ell^2}=\frac{3\ell}{2}-\frac{\sqrt{9\ell^2-4\ell^2}}{2};$$

$$\frac{\sqrt{5\ell^2}}{2}\cdot\frac{3\ell-\ell\sqrt{5}}{2}=\frac{\ell\left(3-\sqrt{5}\right)}{2};$$

$$\mathbf{m}=\frac{\ell\left(3-\sqrt{5}\right)}{2};$$

$m=0.382\ell = (1-0.618)\ell$;

$\ell - m=0.618\ell$; «Золотое сечение»

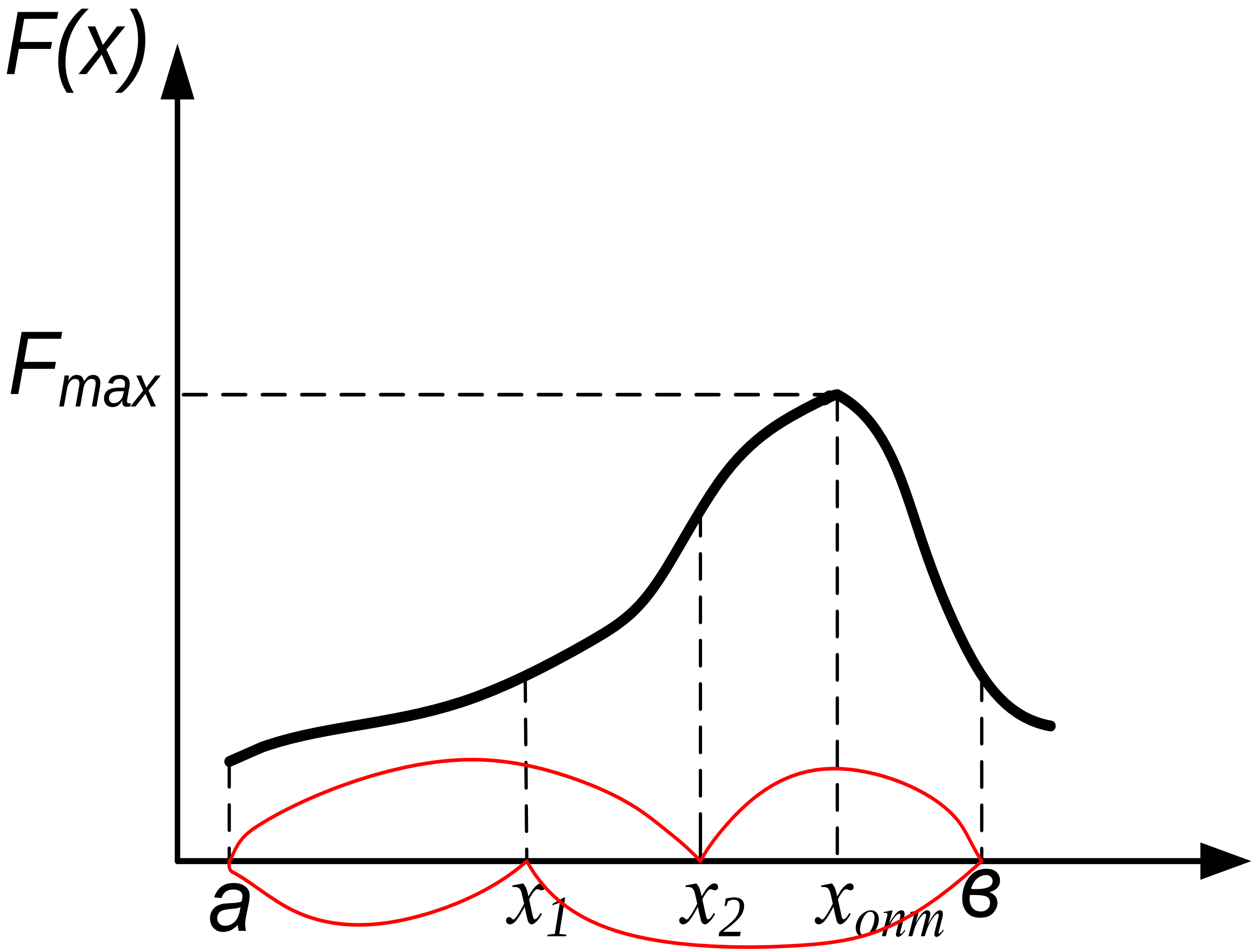
Рассмотрим отрезок (a,b), на котором нужно найти максимум. Поиск максимума начинаем с деления отрезка слева и справа в отношении «золотого сечения», получаем точки x_1 и x_2:

$$x_1=a+0.382(b-a);$$

$$x_2=b-0.382(b-a).$$

В этих точках вычисляются значения функции $F(x_1)$ и $F(x_2)$ и определяется новый интервал, на котором локализован экстремум

ℓ ℓ



F(x)
Fmax
a
x1
x2
xопт
в

На отрезке [a, x_1] максимума быть не может (если функция унимодальна), поэтому эту часть отрезка отбрасываем, переносим т. a в т. x_1 и рассматриваем новый отрезок [a, b]. На этом отрезке уже есть точка (x_2), в которой рассчитано значение F(x_2).

Точка x_2 отсекла от прежнего отрезка справа 38,2%,

Отсекает от нового (меньшего) 61,8%. Таким образом, и на новом отрезке т. x_2 является точкой золотого сечения. Теперь ее можно назвать точкой x_1 и добавить на уменьшенном отрезке только одну т. x_2. Данная процедура

Продолжается до достижения заданной степени точности:

$$|b-a| \le \varepsilon.$$

Таким образом, на каждом этапе расчета, кроме первого, необходимо рассчитывать значение функции F только в одной точке, что повышает эффективность метода.

Метод сканирования.

Метод сканирования заключается в последовательном просмотре значений критерия оптимальности в ряде точек и нахождении среди них такой точки, в которой критерий оптимальности (F) имеет оптимальное (max или min) значение.
Применяется данный метод к непрерывным функциям. Сканированием можно исследовать как функцию одной, так и нескольких переменных.

Рассмотрим одномерное сканирование – поиск максимума функции одной переменной.

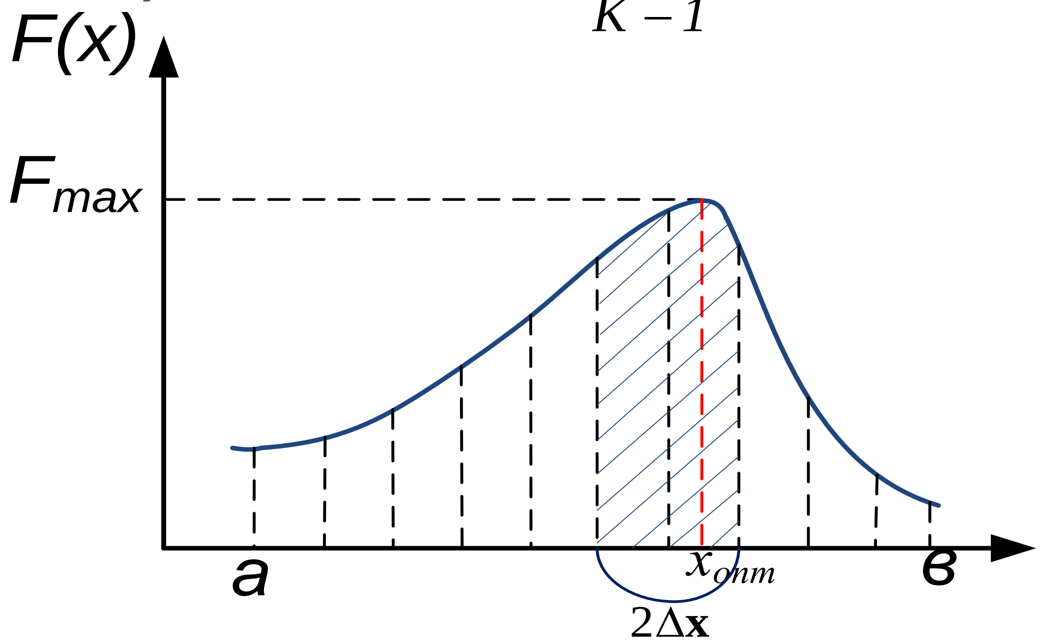
Итак, имеем интервал (отрезок) $[a,b]$, на котором требуется отыскать экстремум целевой функции. Его называют *интервал неопределенности функции.*

Таким образом, в одномерном случае задача поиска экстремума сводится к сужению интервала неопределенности.

Выберем целое число K значений целевой функции, которое необходимо рассчитать.

Рассчитаем интервал Δx.

$$\Delta x = \frac{B - A}{K - 1};$$



Отложим от точки a до b интервал Δx. В каждой точке рассчитаем значение F(x). Принимаем за максимум наибольшее из полученных значений. К концу расчета интервал неопределенности составит 2Δx. Максимум может находиться либо справа, либо слева от полученной наилучшей точки.

Новый интервал неопределенности - $\delta = \dfrac{2(b-a)}{k-1}$

Новый интервал снова разбивается на интервалы величиной

Δx $\left(\Delta x = \dfrac{b-a}{k-1}\right)$ ***в каждой точке рассчитываются значения F и выбирается экстремальное и т.д. Поиск продолжается до тех пор, пока***

$$|b-a| \leq \varepsilon.$$

Многомерный поиск оптимума

При оптимизации технологических процессов необходимость многомерного поиска оптимума возникает достаточно часто.

На основе входных параметров формируется критерий оптимальности и выбирается метод многомерного поиска оптимума целевой функции:

$$F=F(x_1,x_{2,}\ldots,x_n).$$

Рассмотрим один из наиболее часто применяемых методов многомерной оптимизации: ***метод покоординатного спуска.***

Покоординатный спуск

Рассмотрим поиск минимума целевой функции для случая с двумя факторами:

$$F=F(x_1, x_2).$$

В качестве начального приближения в двумерном пространстве выбираются координаты начальной точки поиска:

x_1^0 и x_2^0 - значения, от которых начинается поиск оптимума.

Выбираются величины шагов движения по параметрам: h_1 и h_2 и малые значения: ε_1 *и* ε_2. *Выбор этих величин определяется физическим смыслом задачи.*

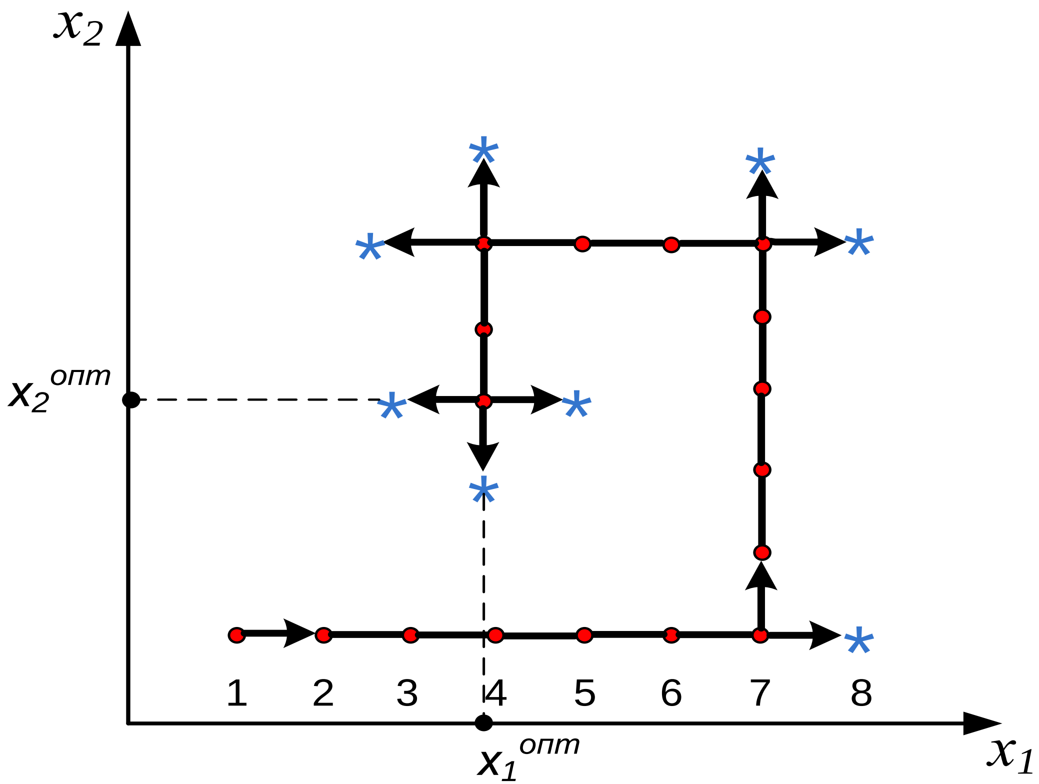


Схема движения к оптимуму методом покоординатного спуска:

• – *шаг в нужном направлении;* * – *неудачный шаг*

Рассчитываем значение функции в начальной точке $F(x_1^0, x_2^0)$ – точка 1. Зафиксируем координату x_2 =const и начинаем движение вдоль оси x_1 с шагом h_1 в сторону уменьшения функции цели. Движение продолжается до тех пор, пока наблюдается уменьшение функции (на рис. – это точки 2, 3, …, 7):

$$F_{i+1} < F_i \ .$$

В точке 8 получаем значение F большее, чем в точке 7. Поэтому возвращаемся в точку 6, фиксируем координату x_1 (x_1^7 =const) и движемся вдоль оси x_2 с шагом h_2 до тех пор, пока уменьшается функция цели:

$$F_{i+1} < F_i$$

.

После очередного неудачного шага ($F_{i+1} > F_i$.) меняем координату, по которой идет поиск минимума функции, и вновь продолжаем движение

Процесс последовательно продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность локализации экстремума, т.е. если шаг по каждому параметру приводит к возрастанию функции цели (поиск минимума), а величина шага меньше или равна заданной степени точности, то расчет прекращается:

$$h_1 \leq \varepsilon_1,$$
$$h_2 \leq \varepsilon_2.$$

В том случае, если эти условия не выполняются, движение продолжается из лучшей точки с уменьшенной величиной шагов.