

Лабораторная работа

Тема: Нахождение кратчайшего пути в графе с ребрами произвольной длины.

Введение

Задача о кратчайшем пути на графе в общем виде может быть сформулирована следующим образом. Дан неориентированный граф $G = (X, U)$. Каждому ребру этого графа приписано некоторое число $l(u) \geq 0$, называемое длиной ребра. В частных случаях $l(u)$ может быть расстоянием между вершинами, соединяемыми ребром u , временем или стоимостью проезда по этому ребру и т. п. При этом любая цепь μ будет

характеризоваться длиной, определяемой соотношением $l(\mu) = \sum_{i=1}^m l(u_i)$.

Задание: для произвольных вершин a и b графа G найти путь μ_{ab} , причем такой, чтобы его полная длина была наименьшей.

Методические указания

В сложном графе путь, проходящий через наименьшее число вершин, нередко имеет большую длину, чем некоторые обходные пути.

Процесс приписывания индексов для такого вида графов заключается в следующем:

1. Каждая вершина x_i помечается индексом λ_i . Первоначально конечной вершине x_0 приписывается индекс $\lambda_0 = 0$. Для остальных вершин предварительно полагаем

$$\lambda_i = \infty \quad (i \neq 0).$$

2. Ищем такую дугу (x_i, x_j) , для которой

$$\lambda_j - \lambda_i > l(x_i, x_j),$$

и заменяем индекс λ_j индексом

$$\lambda_{j'} = \lambda_j + l(x_i, x_j) < \lambda_j.$$

Продолжаем этот процесс замены индексов до тех пор, пока остается хотя бы одна дуга, для которой можно уменьшить λ_j .

3. Сформулируем следующее правило для нахождения кратчайшего пути.

Пусть $x_n = a$ – начальная вершина с индексом λ_n . Ищем вершину x_{p1} , такую, что

$$\lambda_n - \lambda_{p1} = l(x_{p1}, x_n).$$

Далее ищем вершину x_{p2} :

$$\lambda_{p1} - \lambda_{p2} = l(x_{p2}, x_{p1})$$

и т. д., до тех пор, пока не дойдем до конечной вершины

$$x_{p, k+1} = x_0 = b.$$

4. Путь

$$\mu_0 = (x_n, x_{p1}, \dots, x_{pk}, x_0),$$

длина которого равна λ_n , является кратчайшим.

5. Пример. Метод нахождения кратчайшего пути проиллюстрирован на примере карты дорог, представленной в виде графа на рис1. Цифры у ребер указывают время проезда по каждой из дорог.

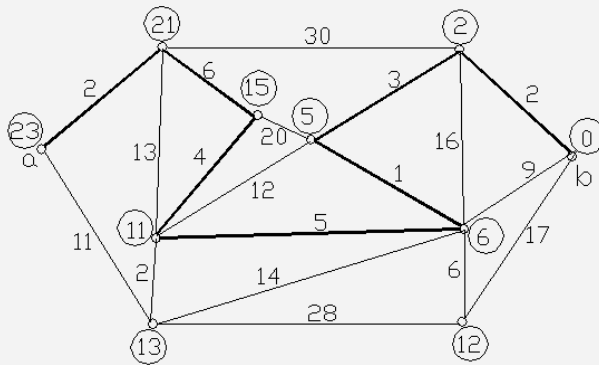


Рис.1

Индексы вершин указывают время проезда от данной вершины до конечной. Кратчайший путь из вершины *b* в *a* выделен на графе более яркими линиями.

Данная задача решается с помощью программы, разработанной на языке Си, которая приведена в теоретическом разделе данного модуля. Результат решения выдается в виде двух таблиц: 1- матрица исходных данных; 2 – матрица кратчайших расстояний.

