ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция №4

Многокритериальная оптимизация

Дисциплина: Методы оптимизации и организации энерго- и ресурсосберегающих химико-технологических систем

Лектор: Киргина Мария Владимировна
к.т.н., доцент отделение Химической инженерии
Инженерной школы природных ресурсов

март
2018

План лекции

- Проблема оптимальности в многокритериальных задачах
- Постановка задачи многокритериальной оптимизации
- Арбитражные решения
- Целевое программирование
- Метод весовых коэффициентов
- Метод приоритетов
- Многокритериальное линейное программирование

Проблема оптимальности в многокритериальных задачах

- Качество решения оценивается по многим критериям;
- Объективно неизвестно, какое решение лучше, если критериев много и/или они «конфликтующие».

Необходимо искать компромиссное решение, учитывающее важность каждой целевой функции.

Эффективное (оптимальное по Парето) решение.

Проблема оптимальности в многокритериальных задачах

- ✓ Свойством эффективности должно обладать любое решение, претендующее на то, чтобы его назвали оптимальным.

Проблема выбора единственного решения:
парето-оптимальных решений может быть много.

Способы выбора решения из парето-оптимальных:

1. Метод целевого программирования;
2. Теория арбитражных схем;
3. Многокритериальное линейное программирование.

Постановка задачи многокритериальной оптимизации

1. Пусть X обозначает множество допустимых решений в некоторой задаче, $x \in X$ – допустимое решение.
2. Предположим, что каждое решение $x \in X$ оценивается по n критериям ($n \geq 2$).
3. Пусть, $H_i(x)$, $x \in X$ – вещественная функция, значениями которой являются оценки решения $x \in X$ по критерию i, $i = \overline{1, n}$.
4. Тогда вектор $H_i(x) = (H_1(x), \ldots, H_i(x), \ldots, H_n(x))$, $x \in X$ – набор оценок решения $x \in X$ по всем критериям.
5. Степень предпочтительности решения $x \in X$ возрастает с возрастанием компонент вектора H, т.е. чем больше значение $H_i(x)$, тем лучше решение x по критерию i, $i = \overline{1, n}$.

Постановка задачи многокритериальной оптимизации

Решение *x ∈ *X* называется парето-оптимальным (оптимальным по Парето, эффективным), если не существует другого решения *x* ∈ *X*, для которого:**

$$H_i(x) \geq H_i(x^*),\ i = \overline{1,n}$$

Если *x ∈ *X* – парето-оптимальное решение, то не существует другого решения *x* ∈ *X*, которое превосходит *x** хотя бы по одному критерию, а по остальным критериям не хуже.**

Постановка задачи многокритериальной оптимизации

Параметр	Daewoo Nexia	Kia Rio	Opel Corsa	Skoda Fabia	VW Pointer
Дизайн	75	105	130	120	105
Внешность	40	55	65	60	50
Интерьер	35	50	65	60	55
Эргономика	100	120	125	125	130
Место водителя	40	55	60	75	55
Обзорность	60	65	65	50	75
Динамика	205	220	210	210	205
Разгонная динамика	65	70	55	55	55
Тормозная динамика	75	75	75	70	80
Управляемость	65	75	80	85	70
Ездовой комфорт	140	165	155	155	145
Плавность хода	55	65	60	60	60
Акустический комфорт	45	55	50	50	40
Микроклимат	40	45	45	45	45
Комфорт салона	90	145	140	130	100
Пассажирские места	45	45	55	45	30
Багажник	45	55	45	45	40
Трансформация салона	0	45	40	40	30

Сравнительный анализ 5 марок автомобилей по 20 критериям

Модель Daewoo Nexia по всем критериям не лучше модели Kia Rio. Оставшиеся четыре модели нельзя сравнить между собой, поскольку по ряду критериев лучше одни модели, а по другим – другие. Выбор любого из этих типов автомобилей (кроме Daewoo Nexia) является оптимальным по Парето решением.

Постановка задачи многокритериальной оптимизации

Множество всех эффективных (парето-оптимальных) решений называется **эффективным множеством**.

- ✓ **Достоинством** концепции эффективного решения является то, что эффективные решения существуют в практически значимых классах задач.
- ✓ **Недостаток** понятия парето-оптимального решения состоит в том, что оно, как правило, не позволяет найти единственного решения проблемы, можно получить лишь множество эффективных решений.

Арбитражные решения

1. Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации Имеем множество возможных оценок:

$$H(X) = \ H(x), x \in X$$

2. Пусть $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{X}$ – некоторое допустимое решение, которое будем интерпретировать как ***«консервативное»***, подлежащее улучшению при решении данной многокритериальной задачи.
3. Значение векторного критерия в точке $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{X}$ будем называть точкой ***«статус-кво»***.

$$H(x_0) = \ H_1(x_0), ..., H_i(x_0), ..., H_n(x_0) \ , x \in X$$

Точка «статус-кво» интерпретируется как набор оценок некоторого допустимого решения, выбранного из каких либо соображений в качестве начального приближения к оптимальному.

Арбитражные решения

Арбитражной схемой называется правило φ, которое каждому множеству возможных оценок $H(X)$ и каждой точке «статус-кво» $H(x_0)$ ставит в соответствие единственную пару:

$$H^*, x^* = \varphi\ H(X), H(x_0)$$

где $x^* \in X$, $H^* = H(x^*)$,
x* – **оптимальное решение**.

Решение, полученное в соответствии с выбранной арбитражной схемой, называется **арбитражным решением**.

Две наиболее распространенные арбитражные схемы:

- ✓ Метод главного критерия;
- ✓ Арбитражная схема Нэша.

Целевое программирование

В основе **метода целевого программирования** для решения многокритериальных задач лежит упорядочение критериев (целей) **по степени важности**.

Исходная задача решается путем последовательного решения ряда задач с одной целевой функцией таким образом, что решение задачи с менее важной целью не может ухудшить оптимального значения целевой функции с более высоким приоритетом.

Целевое программирование

Основное отличие целевого программирования:

- многие цели формализуются не как целевые функции, а как **ограничения** в другой более общей модели.

С этой целью вводятся:

- предполагаемые количественные значения целевых функций;
- переменные отклонения которые характеризуют степень достижения поставленных целей для данного решения.

Целевое программирование

Пример:

- ✓ НПЗ производит **прямогонный бензин (ПБ)** и **бензин АИ-92**.
- ✓ **Бензин АИ-92** производится из **прямогонного бензина**.
- ✓ Суточный запас **ПБ** ограничен **40 тоннами**.
- ✓ Для производства **1 тонны ПБ** требуется **1,2 часа**, для производства/ **1 тонны АИ-92** – **4 часа**.
- ✓ Суточные возможности по производству ограничены **240 часами**.
- ✓ После производства все продукты проходят контроль в лаборатории. Для контроля **1 тонны ПБ** требуется **0,5 часа**, **1 тонны АИ-92** – **1 час**.
- ✓ НПЗ обладает оборудованием, которое позволяет проводить контроль в течение **81 часа**.
- ✓ Удельная прибыль от продажи **ПБ** оставляет **200$**, **АИ-92** – **500$**.

цель 1 – получить прибыль, равную **40 000$**;
цель 2 – ограничить (минимизировать) общее время лабораторного контроля продуктов.

Целевое программирование

Задача максимизации прибыли НПЗ:

Максимизировать прибыль:

$$\max(200x_1 + 500x_2)$$

при ограничениях:

$x_2 \leq 40$ – запас **ПБ**;

$1{,}2x_1 + 4x_2 \leq 240$ – время производства;

$0{,}5x_1 + 1x_2 \leq 81$ – время контроля;

$x_1, x_2 \geq 0$

Целевое программирование

Для цели 1 введем две переменные отклонения:

d_1^-	***«недостаточная»*** переменная, которая показывает на сколько объем прибыли меньше величины **40 000$;**
d_1^+	***«избыточная»*** переменная, которая показывает, на сколько объем прибыли превосходит величину **40 000$.**

Переменная d_1^- отвечает за степень достижения первой цели, если d_1^- = 0, то цель достигнута. Если min d_1^- – величина положительная, то цель недостижима.

Тогда можно записать **целевое (мягкое) ограничение**:

$$200x_1 + 500x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40000$$

$$d_1^- \geq 0, d_1^+ \geq 0$$

Целевое программирование

Для цели 2 введем две переменные отклонения:

d_2^-	***«недостаточная»*** переменная, которая показывает на сколько время контроля меньше **81 часа**;
d_2^+	***«избыточная»*** переменная, которая показывает, на сколько время контроля превосходит **81 час**.

Переменная d_2^+ отвечает за степень достижения второй цели, если d_2^+ = 0, то цель достигнута. Если min d_2^+ – величина положительная, то цель недостижима.

Тогда можно записать **целевое (мягкое) ограничение**:

$$0,5x_1 + 1x_2 + d_2^- - d_2^+ = 81$$

$$d_2^- \geq 0, d_2^+ \geq 0$$

Целевое программирование

Гибкость выбора значений для «недостаточных» и «избыточных» переменных позволяет целевому программированию достичь компромиссного решения.

Методы целевого программирования:

- ✓ метод весовых коэффициентов;
- ✓ метод приоритетов.

Метод весовых коэффициентов

В методе **весовых коэффициентов** единственная целевая функция формализуется как взвешенная сумма исходных частных целевых функций.

Если **цель 1** приоритетнее **цели 2**, взвешенная функция будет иметь вид:

$$\min(P_1 d_1^- + P_2 d_2^+)$$

при ограничениях:

$$x_2 \le 40; \; 1{,}2x_1 + 4x_2 \le 240; \quad x_1, x_2 \ge 0$$

$$200x_1 + 500x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40000$$

$$0{,}5x_1 + 1x_2 + d_2^- - d_2^+ = 81$$

$$d_1^- \ge 0, d_1^+ \ge 0, d_2^- \ge 0, d_2^+ \ge 0$$

Метод весовых коэффициентов

Если **цель 1** приоритетнее **цели 2**, взвешенная функция будет иметь вид:

$$\min(P_1 d_1^- + P_2 d_2^+)$$

здесь:

$$P_1 > P_2 \geq 0$$

веса критериев в **агрегированном (взвешенном) критерии**.

Недостатком *данного метода является субъективность задания весовых коэффициентов, однако разработаны методы, понижающие значение субъективного фактора при их выборе.*

Метод приоритетов

В **методе приоритетов** ***n*** частных целевых функций ранжируются в порядке важности, затем поочередно решаются задачи с одной целевой функцией, начиная с задачи, имеющей наивысший приоритет, и заканчивая задачей, имеющей минимальный приоритет.

В процессе решения последовательных задач решение задачи с целевой функцией, имеющей более низкий приоритет, не может ухудшить полученные ранее решения задач, имеющих более высокий приоритет.

Многокритериальное линейное программирование

Многокритериальное линейное программирование основано на построении всего множества парето-оптимальных решений и его графическом представлении.

Данный подход можно применять к ***задачам с малым числом критериев*** $n = 2$ или ***задачам с двумя переменными***.

В первом случае находится эффективная граница множества возможных оценок, во втором – эффективная граница множества возможных решений.

После построения эффективной границы (кривой) проблема сводится к выбору одного из недоминируемых решений.

В случае линейной задачи имеет смысл выбирать только из ***эффективных экстремальных решений***.

Многокритериальное линейное программирование

Необходимо оптимизировать решение по двум критериям:

- ✓ максимизировать краткосрочную прибыль H_1;
- ✓ максимизировать долгосрочную прибыль H_2.

т.е. имеем задачу:

$$\max H_1(x_1, x_2) = \max(300x_1 + 500x_2)$$

$$\max H_2(x_1, x_2) = \max(x_1 + 4x_2)$$

при ограничениях:

$$x_2 \le 40$$

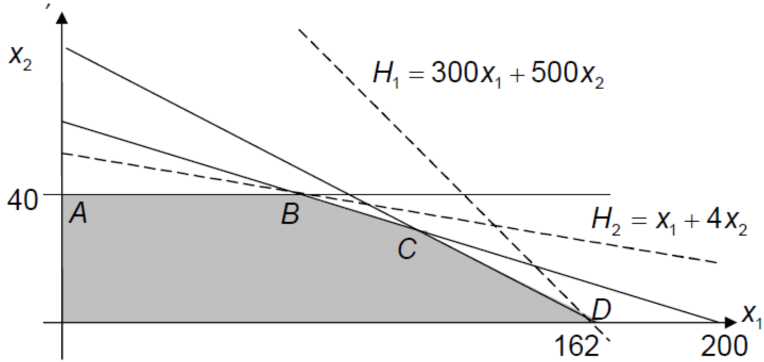
$$1{,}2x_1 + 4x_2 \le 240$$

$$0{,}5x_1 + 1x_2 \le 81$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Многокритериальное линейное программирование

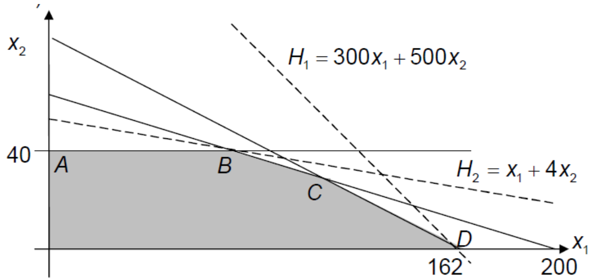
Изобразим графически множество допустимых решений задачи:



Точка ***D*** – **оптимальное решение задачи по первому критерию**.
Точка ***B*** – **оптимальное решение по второму критерию**.

Множество эффективных (парето-оптимальных) точек представляет собой линию, состоящую из отрезков ***BC*** и ***CD***.

Многокритериальное линейное программирование



Недоминируемыми экстремальными решениями являются точки ***B***, ***C*** *и* ***D***, значения целевых функций в этих точках приведены в таблице:

Экстремальная точка	Целевая функция H_1	Целевая функция H_2
B (66,7;40)	40000	226,7
C (105;28,5)	45750	219
D (162;0)	48 600	162