ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция №2

Основные методы оптимизации

Дисциплина: Методы оптимизации и организации энерго- и ресурсосберегающих химико-технологических систем

Лектор: Киргина Мария Владимировна
к.т.н., доцент отделение Химической инженерии
Инженерной школы природных ресурсов

март
2018

План лекции

- Методы отыскания оптимума
- Оптимизация методом дифференциального исчисления
- Поиск оптимума численными методами
- Оптимизация перебором
- Метод сканирования
- Метод дихотомии
- Метод золотого сечения

Методы отыскания оптимума

Методы отыскания оптимума:

1. **Аналитические методы:**
   применяются когда возможно продифференцировать целевую функцию и искать экстремум исходя из условия равенства нулю производных.
2. **Численные, или поисковые методы:**
   для применения необходимо, чтобы целевая функция была вычислимой: должен быть известен алгоритм, по которому можно рассчитать значение критерия оптимальности при заданных значениях факторов.
3. **Экспериментальная оптимизация:**
   применяются когда целевая функция невычислима, т.е. вид функции неизвестен. В таких случаях планируется и реализуется эксперимент так, чтобы в результате достигнуть района оптимума.

Оптимизация методом дифференциального исчисления

Целевая функция задана формулой:

$$F = F(x_1, x_2, ..., x_m)$$

Классический метод отыскания экстремума – **решение системы**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \\ \dots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Решение системы:

$$x_{1\,опт}, x_{2\,опт}, ..., x_{n\,опт}$$

Оптимальные значения факторов

Совокупность оптимальных факторов – **оптимальный режим**.

Оптимизация методом дифференциального исчисления

Необходимо убедиться, что полученные значения действительно оптимальны:

1. действительно ли решение системы определяет экстремум (может определять седловую точку, или точку перегиба);
2. получен ли экстремум нужного знака (максимум/минимум);
3. если система имеет несколько решений, то какое из них отвечает **глобальному оптимуму**, а какие – **локальным.** *Если зависимость имеет несколько максимумов, то глобальным будет тот из них, который выше всех остальных; остальные будут локальными;*
4. все ли ограничения соблюдаются в точке экстремума.

Поиск оптимума численными методами

Применяются когда:

1. в точке экстремума **отсутствуют производны**е (например изменение целевой функции носит дискретный характер);
2. целевая функция в точке экстремума дифференцируема, но она задана таким образом, что **продифференцировать ее в общем виде не удается**, т.к. функция задана не формулой, а алгоритмом вычисления при заданных значениях аргументов (факторов);
3. имеется принципиальная возможность записать и продифференцировать целевую функцию, но соответствующие **вычисления слишком громоздки**.

Поиск оптимума численными методами

Алгоритм в общем виде:

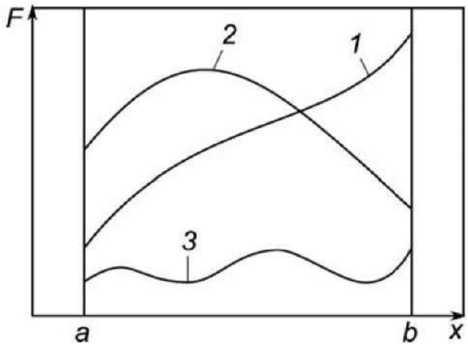
1. Вычисляется ряд значений целевой функции при различных значениях факторов;
2. Сопоставление значений целевой функции показывает, в каком направлении нужно двигаться в пространстве факторов, чтобы приблизиться к оптимуму.

Не дают теоретически точных значений координат оптимума – координаты оптимума с задаваемой точностью

Поиск оптимума численными методами

Методы направленного поиска – происходит продвижение в области факторного пространства в сторону искомого экстремума.

Направленный поиск дает надежный результат, если функция **унимодальна** – в допустимой области имеет только один экстремум нужного знака.



Функция 1 – унимодальна;
Функция 2 – унимодальна если ищем максимум, и неунимодальна при поиске минимума;
Функция 3 – неунимодальна.

Поиск оптимума численными методами

Методы направленного поиска способны привести в точку одного из экстремумов, но не позволяют:

- ✓ установить, **единственный** ли это экстремум;
- ✓ г**лобальный** ли это экстремум *(экстремальный для всей области)* или **локальный** *(другие точки могут оказаться выше в случае максимума или ниже для минимума).*

Если *F* зависит от одного фактора → **Одномерный поиск**

Если *F* зависит от нескольких факторов → **Многомерный поиск**

Оптимизация перебором

- ✓ Применяется, если число возможных вариантов конечно.

Рассчитывается целевая функция для всех возможных вариантов и выбирается наибольшее/ наименьшее значение.

Метод сканирования

✓ Применяется к непрерывным функциям.

Пример:

1. Ищется максимум функции от одного фактора $\boldsymbol{x}$ – **одномерное сканирование.**
2. Задаемся пределами изменения фактора $\boldsymbol{x}$ от $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – **ограничения**.
3. Интервал **[*a*, *b*]**, на котором ищется экстремум целевой функции – **интервалом неопределенности**.

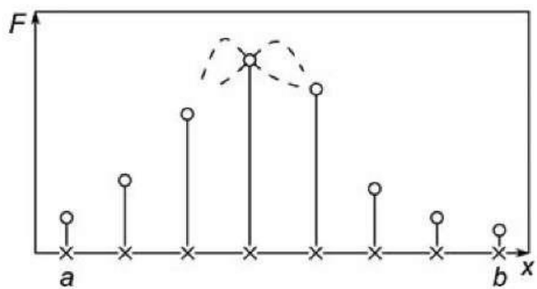
Задача поиска экстремума сводится к сужению интервала неопределенности.

Метод сканирования

4. Выбирается целое число ***q*** – число значений целевой функции, которое придется рассчитывать.
5. Находиться интервал ***Δ****x*:

$$\Delta x = \frac{b-a}{q-1}$$

6. От точки ***a*** до точки ***b*** откладываются интервалы ***Δx****.* Концы каждого интервала – **узлы***.*



Метод сканирования

7. В каждом узле рассчитывается ***F(x)***.
8. За максимум принимается наибольшее из полученных значений.
9. К концу расчета интервал неопределенности **δ** составит **2Δ***x*:

$$\delta = 2\frac{b-a}{q-1}$$

Определяет эффективность метода: для достижения малого значения δ величина *q* должна быть велика.

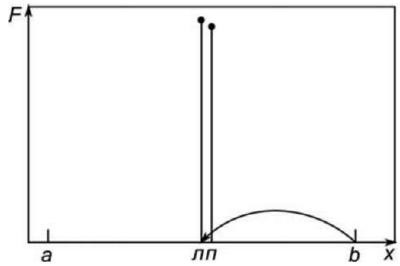
Метод сканирования

Сканирование с переменным шагом: сократив интервал неопределенности, поиск продолжается внутри этого интервала, уменьшая ***Δx*** **(метод тяжелого шарика).**

- ✓ Сканированием можно исследовать функции более чем одного фактора – сеть узлов на плоскости или в пространстве.

Метод дихотомии

1. Ищем максимум на отрезке **[*a*, *b*]**.
2. Разделим отрезок пополам (точка ***л***). Рассчитаем ***F(л).***



3. Выберем малое приращение фактора, равное **е**, и поставим на отрезке правую точку ***п* = *л* + *е***.
4. Рассчитаем ***F(п).*** *Т.к.* ***F(л)*** **>** ***F(п)***, то **максимум находится в левой половине отрезка**.

Метод дихотомии

5. Отбрасываем правую половину отрезка (на ней максимума нет). Для этого правый конец (точку ***b***) перенесем в точку ***л*** и обозначим ее буквой ***b***.
6. Проводиться следующий цикл расчета – **итерационный алгоритм**.
7. Необходимо задать **правило останова**, определяющее, когда можно прекращать расчет, считая, что полученная точность уже достаточна.

$$\delta = b - a \leq e$$

Метод золотого сечения

Отрезок длины ***l*** делится на две части ***m*** и ***l – m*** так, чтобы меньшая часть относилась к большей, как большая ко всему отрезку:

$$\frac{m}{l-m} = \frac{l-m}{l}$$

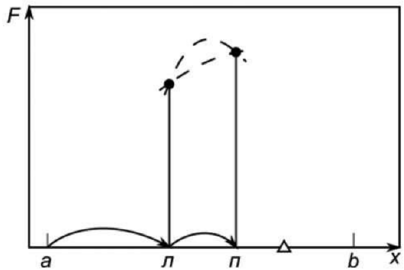
$$m \approx 0,382l,$$

$$l-m \approx 0,618l,$$

$$m \approx 0,618(l-m)$$

Метод золотого сечения

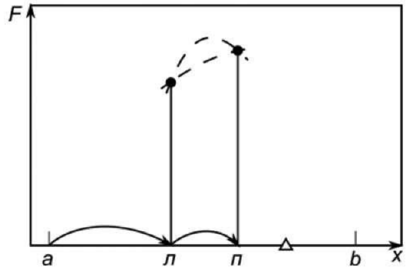
1. Рассмотрим отрезок ***[a, b]***, на котором требуется найти максимум. Делим отрезок слева и справа в соответствии с пропорцией золотого сечения и получаем точки ***л*** и ***п.***



2. Рассчитываем ***F(л)*** и ***F(п).***

Метод золотого сечения

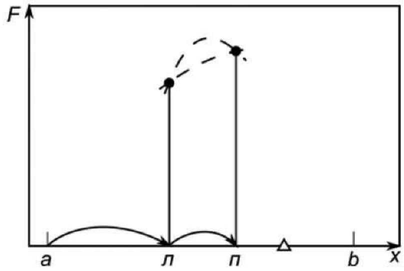
3. Расстояние между точками ***л*** и ***п*** не мало и вероятность того, что точка экстремума попадет между ними, достаточно велика.



4. Если ***F(п) > F(л)***, нельзя сказать, в какой из трех частей отрезка окажется максимум – может быть в средней части отрезка, или в правой. Но в левой части *максимума быть не может.* Поэтому его можно отбросить.
5. Переносим левый конец отрезка в точку ***л***, назвав ее ***а.*** Получаем новый отрезок ***[a, b].***

Метод золотого сечения

6. Но на этом отрезке уже есть точка ***п***, в которой рассчитано значение функции, причем эта точка, отсекавшая от предыдущего большего отрезка справа ~38,2%, отсекает от нового, уменьшенного отрезка справа ~61,8%, т.е. и на новом отрезке она является **точкой золотого сечения**.



7. На новом этапе расчета называем ее ***л***, на уменьшенном отрезке поставим не две точки для расчета ***F***, а только одну – правую *(треугольник)*.

Метод золотого сечения

На каждом этапе расчета, кроме самого первого, мы должны рассчитывать *F* только в одной точке, что повышает эффективность метода.

Правило останова: $\delta = b - a \le e$

Эффективность метода:

- ✓ при ***q*** **< 4** → эффективность метода золотого сечения ниже, чем метода дихотомии;
- ✓ при ***q*** **= 10 – 20** → эффективность обоих методов близка;
- ✓ при ***q*** **> 20** → метод золотого сечения заметно эффективнее.

q – число расчетов целевой функции.

$$\delta = (b - a)_{исх} \cdot 0{,}618^{q-1}$$