СБОРНИК ЗАДАЧ (Ч4. Кодирование вероятности)

4.1.

Расшифровать криптограмму, зашифрованную кодами Цезаря:

ЕИФИРРЛМ ФЕИХОЮМ ЗИРЯ НОСРЛОФВ Н ЕИЫИУЦ РСКСЕЮИ ХЦЫНЛ ФХСВОЛ ЕЮФСНС Е ВФОСП РИДИ НГКГССЯ РИ ТОЮОЛ ЦШСЗЛОЛ Е ФГПЦБ ЖОЦДЯ ОГКЦЦЛ.

Указание. Шифр Цезаря состоит в том, что весь алфавит сдвигается на определенное количество букв вправо или влево. Например, алфавит может быть сдвинут на одну букву влево, т. е. в этом случае каждая буква алфавита заменяется предшествующей буквой алфавита (при этом для буквы “А” предшествующей считается буква “Я”). Для расшифровки шифра Цезаря используется чаще всего метод полосок. На каждую полоску наносятся все буквы алфавита. Затем в криптограмме берется одно из слов и полоски с алфавитом прикладываются друг к другу так, чтобы образовать данное слово. Двигаясь вдоль полосок, находится среди строк единственное осмысленное сочетание букв, которое и служит расшифровкой данного слова. Одновременно находится величина сдвига.

4.2.

Записать для десятичного числа 999 равномерный двоичный код, двоично-десятичный (с весами 8,4,2,1) и код Грея.

4.3.

Записать для десятичного числа 513 равномерный двоичный код, двоично-десятичный (с весами 8,4,2,1) и код Грея.

4.4.

Закодировать двоичными кодами Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерным двоичным кодом семь сообщений с вероятностями:

$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2 = 1/4 = 0.25;$
$\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_4 = \boldsymbol{P}_5 = 1/8 = 0.125;$
$\boldsymbol{P}_6 = \boldsymbol{P}_7 = 1/16 = 0.0625.$

Найти среднюю длину каждого из полученных кодов, выяснить, каков выигрыш по сравнению с равномерным кодированием.

4.5.

Закодировать двоичными кодами Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерным двоичным кодом десять сообщений с вероятностями:

$$P_1 = P_2 = 0.22;$$
$$P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 0.1;$$
$$P_7 = P_8 = P_9 = P_{10} = 0.04.$$

Определить их основные характеристики. Выяснить каков выигрыш по сравнению с равномерным кодированием.

4.6.

Закодировать двоичными кодами Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерным двоичным кодом сигналы: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$,вероятности которых заданы таблицей:

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
P_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Найти среднюю длину каждого из полученных кодов. Определить количество информации, приходящиеся на один символ для каждого кода.

4.7.

Закодировать двоичными кодами Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерным двоичным кодом девять сообщений с вероятностями : 1/3, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/27, 1/27, 1/27. Определить их основные характеристики. Выяснить, каков выигрыш по сравнению с равномерным кодированием.

4.8.

Закодировать двоичными кодами Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерным двоичным кодом десять сообщений с вероятностями : 0.2; 0.15; 0.1; 0.1; 0.05; 0.05; 0.15; 0.05; 0.1; 0.05. Определить их основные характеристики. Выяснить, каков выигрыш по сравнению с равномерным кодированием.

4.9.

Закодировать двоичными кодами Шеннона-Фано Хаффмана и равномерным двоичным кодом 12 сообщений с вероятностями: 1/5; 1/10; 1/10; 1/15; 1/15; 1/10; 1/30; 1/30; 1/5; 1/30; 1/30; 1/30. Определить их основные характеристики. Выяснить, каков выигрыш по сравнению с равномерным кодированием.

4.10.

Закодировать двоичными кодами Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерным двоичным кодом сообщения

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10}$, вероятности появления которых,

$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = P_7 = P_8 = P_9 = P_{10} = 0.1.$ Определить их основные характеристики. Выяснить, каков выигрыш по сравнению с равномерным кодированием.

4.11.

Построить двоичные коды Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерный двоичный код для ансамбля сообщений с вероятностями: 0.25; 0.25; 0.125; 0.125; 0.0625; 0.0625; 0.0625; 0.0625 и определить их основные характеристики.

4.12.

Построить двоичные коды Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерный двоичный код для ансамбля сообщений с вероятностями : 0.18; 0.17; 0.16; 0.15; 0.1; 0.08; 0.05; 0.05; 0.04; 0.02 и определить их основные характеристики.

4.13.

Убедиться на примере, что коды, получаемые по алгоритмам Шеннона-Фано и Хаффмана, являются префиксными, т.е. ни одно из кодовых комбинаций не является началом (префиксом) другой.

4.14.

Построить двоичные коды Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерный двоичный код для ансамбля сообщений с вероятностями: 1/6; 1/6; ... ; 1/6. Определить характеристики кодов.

4.15.

Закодировать двоичными кодами Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерным двоичным кодом сообщения : X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 с вероятностями, соответственно: $P_1 = 0.2$, $P_2 = 0.2$, … $P_5 = 0.2$.
Определить характеристики кодов.

4.16.

Закодировать двоичными кодами Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерным двоичным кодом множество сообщений: X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 имеющих вероятности: $P_1 = P_2 = 0.25$, $P_3 = P_4 = P_5 = 0.15$, $P_6 = 0.05$.

4.17.

Основываясь на алгоритме Хаффмана найти способ непосредственного построения кодового дерева оптимального кода.
Указание. Построение дерева надо начинать не с корня, а с концевых вершин.

4.18.

Построить двоичные коды Шеннона-Фано, Хаффмана и равномерный двоичный код для 9 сообщений с вероятностями : $\begin{matrix} P_1 = 1/4; \;\; P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 1/8; \\ P_6 = P_7 = P_8 = P_9 = 1/16. \end{matrix}$. Определить характеристики кодов.

4.19.

В сообщениях используются символы алфавита A_1, A_2, A_3, A_4 с вероятностями соответственно: 0.45; 0.1; 0.15 и 0.3. Для передачи сообщения по каналу связи могут быть применены два кода. В первом символам алфавита соответствуют символы кода ***a, в, c, d,*** во втором- ***a, d, в, c***. Длительность элементов кода в условных единицах равны: $t_a = 8, t_в = 6, t_c = 5, t_d = 3$ Определить количество информации, передаваемое каждым кодом в единицу времени. Построить оптимальный код.

4.20.

Алфавит передаваемых сообщений состоит из двух букв (A_1, A_2), появляющихся с вероятностями: $P(A_1) = 0.7; \qquad P(A_2) = 0.3$. Определить и сравнить эффективность побуквенного кодирования и кодирования блоками по три буквы методом Шеннона-Фано.

4.22.

Пользуясь алгоритмами Хаффмана и Шеннона-Фано, построить для ансамбля сообщений, поступающих на пульт оператора от системы контроля, оптимальные коды и сравнить их по скорости передачи, если линия связи обеспечивает передачу без искажений m символов в секунду.
Задано:

$$P(A_i) = \left| \begin{matrix} 0.4, & 0.2, & 0.15, & 0.05, & 0.05, & 0.025 \\ 0.025, & 0.025, & 0.025, & 0.025, & 0.025, & 0.025 \end{matrix} \right|$$

m = 1000.

4.23.

Информация о величине измеряемого параметра, который может принимать дискретное множество значений A_i со следующими вероятностями возможных значений: P(Ai) = | 0.4 0.2 0.15 0.15 0.1 |, кодируется и записывается на магнитный носитель. Считывание информации производится через определенный промежуток времени. Вероятность искажения информации на магнитном носителе за время хранения пренебрежимо мала. Учитывая, что аппаратура записи и считывания информации может давать сбои, расшифровать полученное сообщение U = 0011101011001100, если кодирование производилось:
а) по методике Шеннона-Фано;
б) по методике Хаффмана;
в)обычным двоичным кодом.

4.24.

По линии связи передаются сообщения A_i с вероятностью появления:

P(Ai) = | 0.35 0.2 0.25 0. 1 0.025 0.025 0.025 0.025|

Сообщения кодируются по методикам Шеннона-Фано и Хаффмана. Определить максимальное, минимальное и среднее время передачи сообщения для каждого случая кодирования, а также минимальное среднее время передачи, если скорость передачи по линии связи a = 10^5 символов / с.

4.25.

Определить положение одиночной ошибки в искаженном слове 1100011 кода Хемминга длины 7.

4.26.

Пусть 11010011 и 11001111 – искаженные слова расширенного кода Хемминга длины 8. Какое из этих слов содержит одиночную ошибку, а какое- двойную ошибку? В случае одиночной ошибки определить ее положение.

4.27.

К проверкам кода Хемминга длины 7 добавим (не меняя длины кода) общую проверку на четность: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0$. Сколько слов удовлетворяет данному соотношению и следующим проверочным соотношением: $S_1 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0$; $S_2 = a_2 + a_3 + a_6 + a_7 = 0$; $S_3 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 0$, которые позволяют либо установить, что ошибки нет, либо однозначно указать ее место.

4.28.

Найти минимальное кодовое расстояние для кода, состоящего из трех кодовых слов:
{00000, 00111, 01101, 11010}.

4.29.

Найти минимальное кодовое расстояние для кода, состоящего из трех кодовых слов:
{00000, 00111, 01101, 11010}.

4.30.

Определить корректирующую способность кода, имеющего следующие разрешенные кодовые комбинации: 00000, 01110, 10101, 11011.

4.31.

Для кодирования сообщений, передаваемых по каналу связи, необходимо 11 двоичных символов. С целью повышения помехоустойчивости кода, количество символов в сообщении увеличивают на 4. Определить долю обнаруживаемых и не обнаруживаемых данным кодом ошибок. Как изменится соотношения между ними при увеличении количества избыточных символов до 5 и 6?

4.32.

Оценить наиболее возможное количество разрешенных комбинаций n-значного двоичного кода, обладающего способностью исправлять взаимно независимые ошибки кратности S и менее, если n=10; а) S=1; б) S=3.

4.33.

Построить двоичный групповой код, исправляющий все одиночные ошибки и позволяющий закодировать 30 различных сообщений. Найти порождающую и проверочную матрицы.

4.34.

Кодирование символов, используемых для помехоустойчивого кодирования, равно 15. Построить двоичный групповой код, исправляющий все одиночные и двоичные ошибки. Найти порождающую и проверочную матрицы. Записать кодовые комбинации для $\mathrm{A}_{10} = 10, \mathrm{A}_{14} = 14, \mathrm{A}_7 = 7$, если кодирование в информационных разрядах производится двоичным кодом на все сочетания.

4.35.

Получена комбинация $\mathrm{F}^* = \mathrm{x}^6 + \mathrm{x}^4 + \mathrm{x}^2 + 1$, закодированная циклическим кодом. Образующий полином $\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 + 1.$ Проверить наличие ошибок в кодовой комбинации.

4.36.

Выбрать порождающий многочлен циклического кода, исправляющего одиночные ошибки и позволяющего передать 2000 сообщений.

4.37.

Выбрать порождающий многочлен циклического кода, исправляющего одиночные ошибки и позволяющего передавать 1000 сообщений.

4.38.

Правило формирования кодовых комбинаций группового кода задано в виде общего кодового слова:

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,\ \ a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5,\ \ a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5,\quad a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_5 \quad a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4).$$

Найти основные параметры кода: $n,\ k,\ d_{\min}$; порождающую и проверочную матрицы. Записать кодовые комбинации для $\mathrm{A} = 20$, если кодирование в информационных разрядах производится двоичным кодом на все сочетания.

4.39.

Построить циклический код обнаруживающийся двойные и исправляющий одиночные ошибки, если количество сообщений, передаваемых по каналу связи, равно 15. Кодирование в информационных разрядах производится двоичным кодом на все сочетания.

4.40.

Циклический код порожден многочленом $q(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1.$ Покажите, что длины кодовых комбинаций этого кода равна 15. Определить порождающую и проверочную матрицы.

4.41.

Количество сообщений, передаваемых по каналу связи, равно 1800. Построить циклический код, обнаруживающий все ошибки кратности 1, 2 и 3. Кодирование в информационных разрядах производится двоичным кодом на все сочетания.

4.42.

Найти порождающий многочлен циклического кода, исправляющего все одиночные и двойные ошибки и позволяющего закодировать семь различных сообщений.

4.43.

Для $n = 15$ построить циклический код, исправляющий одиночные и двойные ошибки, определить его основные параметры.

4.44.

Для обнаружения неисправностей прибора производится ряд проверок, результаты которых выражаются нулем (отсутствие неисправностей) или единицей (наличие неисправностей). Связь между проверками и неисправностями задается при помощи следующей таблицы:

Проверка	Неисправности			
	H_1	H_2	H_3	H_4
x_1	0	1	0	0
x_2	0	0	1	0
x_3	1	0	1	0
x_4	0	0	0	1
x_5	0	1	1	0

Составить последовательность из минимального количества проверок и нарисовать кодовое дерево системы проверок.