СБОРНИК ЗАДАЧ (Ч2. Энтропия и количество информации)

2.1

Определить энтропию системы, состояние которой описывается прерывной случайной величиной X с рядом распределения:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P_i	0.01	0.01	0.01	0.01	0.96

2.2.

Определить максимальную возможную энтропию сообщения, состоящего из пяти букв, причем, общее количество букв в алфавите равно 32.

2.3.

Имеются два дискретных источника информации, заданные матрицами:

$$\begin{Vmatrix} X \\ P \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Y \\ Q \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{Vmatrix}.$$

Определить какой источник обладает большей энтропией в случае, если:

а) $p_1 = p_2$,

$q_1 = q_2 = q_3$;

б) $p_1 = q_1$

$p_2 = q_2 + q_3$

2.4.

На выходе двоичного источника информации элементы “0” и “1” появляются с вероятностями соответственно P и 1-P. При каком значении P энтропия источника максимальна? Построить график H(P) для двоичного источника.

2.5.

Дискретный источник информации задан матрицей:

$$\begin{Vmatrix} X \\ P \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{8}{15} \end{Vmatrix}.$$

Вычислить его среднюю неопределенность и сравнить полученное значение с энтропиями следующих конечных схем:

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} \frac{x_2}{x_2 + x_3} & \frac{x_3}{x_2 + x_3} \\ q_1 & q_2 \end{Vmatrix}.$$

Показать на этом примере свойство аддитивности энтропии.

2.6.

Найти энтропию биноминального распределения

$$m(\xi_i = k) = \begin{cases} 0 & -\infty < x_i < 0, \\ C_m^k p^k (1-p)^{m-k} & 0 \le x_i \le m, \\ 0 & m < x_i < \infty. \end{cases}$$

2.7.

Проверить свойство аддитивности энтропии на примере источника $\begin{Vmatrix} X \\ P \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{Vmatrix}$.

2.8.

Записать соотношение между энтропиями

$$H(x),\ \ H(y),\ \ H(\frac{x}{y}),\ \ H(\frac{y}{x}),$$

$$H(x,y),\ \ H(\frac{x}{y_i}),\ \ H(\frac{y}{x_i}).$$

2.9.

Имеется две системы X и Y, объединяемые в одну (X,Y), вероятности состояний системы (X,Y) заданы таблицей:

x_i / y_j	x_1	x_2	x_3	r_j
y_1	0.1	0.2	0	0.3
y_2	0	0.3	0	0.3
y_3	0	0.2	0.2	0.4
p_i	0.1	0.7	0.2	

Определить полные условные энтропии H(Y | X) и H(X | Y).

2.10.

Сигнал формируется в виде двоичного кода с вероятностями появления символов «1» и «0», равными соответственно:

$$P(x_1) = 0.6;$$
$$P(x_0) = 0.4.$$

Появление любого из символов связано условными вероятностями:

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_0 / \boldsymbol{x}_1) = 0.1 -$ вероятность того, что после 1 будет 0

$P(x_1 / x_0) = 0.9 -$ вероятность того, что после 0 будет 1

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1 / \boldsymbol{x}_1) = 0.9 -$ вероятность того, что после 1 будет 1

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_0 / \boldsymbol{x}_0) = 0.1 -$ вероятность того, что после 0 будет 0

Найти энтропию сигнала.

2.11.

Имеются два дискретных источника с независимыми и равновероятными элементами: двоичный и троичный. На выходе первого источника зафиксированы два символа, на выходе второго – три. Чему равна неопределенность полученной последовательности букв, образованной парами символов первого источника и тройками символов второго источника ?

2.12.

Имеются два дискретных троичных источника с независимыми элементами. На выходе каждого источника появляются сообщения одинаковой длины - по 15 элементов. Количество различных элементов в сообщении каждого источника постоянно. Сообщение каждого источника отличаются только порядком элементов. Зафиксированы два типичных сообщения; 021202120212021 – первого источника и 012101201101201 – второго. Элемент какого источника несет в среднем большее количество информации?

2.13.

Найти энтропию геометрического распределения: $$p(x_i = k) = \begin{cases} 0, & -\infty \le x_i \le 0 \\ p(1-p)^{k-1}, & 0 < x_i < \infty. \end{cases}$$

2.14.

Пусть X и Y – два алфавита, Z = X + Y. Чему равна условная энтропия H(Z/X),если: А) X и Y – независимы, Б) X и Y – зависимы; В) X ≡ Y ?

2.15.

Элементы алфавитов X и Y статистически связаны. Известно, что H(x) = 8 бит, H(y) = 12 бит. В каких пределах меняется условная энтропия H(y/x) при изменении H(x/y) в максимальных возможных пределах.

2.16.

Ракеты двух пусковых установок используются для поражения. Ракета, пущенная с первой установки, поражает цель номер 1 с вероятностью 0.5, цель номер 2 с вероятностью 0.3 и дает промах с вероятностью 0.2. Ракета второй установки поражает первую цель с вероятностью 0.3, вторую с вероятностью 0.5 и вероятность промаха равна 0.2. Вероятность выбора первой установки равна 0.4.

Чему равна неопределенность выбора установки, если известно, что:

1. поражена вторая цель; H(X | y2)
2. если произошел промах; H(X | y3)
3. какова неопределенность исхода, если пущена ракета из любой установки (некоторая ракета)?

2.17.

По заданным значениям H(x) и H(y) найти H(x/y), если H(y/x) = 1 бит.

2.18.

Опыт X заключается в случайном выборе целого числа от 1 до 1050. Опыт Y заключается в определении величин остатков от деления этого числа на 5 и на 7 (рассчитать для обеих групп событий в отдельности). Определить энтропии H(X), H(Y), H(X/Y).

2.19.

Дана матрица

$$P(X,Y) = \begin{Vmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{Vmatrix}$$

Определить энтропии:

$H(x),\quad H(y),\quad H(x/y),\quad H(x/y_1),\quad H(y/x_2),\quad H(x,y).$

2.20.

Определить максимальную энтропию телевизионного изображения, содержащего 500 строк по 650 элементов в строке, при условии, что яркость каждого элемента передается восемью квантованными уровнями (уровни не коррелированны).

2.21.

Найти полную условную энтропию квантованного сигнала с распределением P с точностью 1 В. Условные вероятности уровней заданы матрицей $P(x/y)$. Уровни 0 В, 1 В, 2 В.

$$P(x/y)=\begin{vmatrix} 9/11 & 1/8 & 0 \\ 2/11 & 3/8 & 2/9 \\ 0 & 1/2 & 7/9 \end{vmatrix}.$$

2.22.

Избыточность ряда европейских языков лежит в пределах 50-65%. Определить энтропию их алфавитов.

2.23.

Определить дифференциальную энтропию $H_d(x)$ нормального распределения с плотностью вероятности.

$$p(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Как влияет на величину $H_d(x)$ увеличение в два раза

а) среднего $\bar{x}$;

б) дисперсии σ_x^2 ?

2.24.

Вычислить дифференциальную энтропию случайной величины, заданной распределением

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x^2, & 0\le x\le 1, \\ 1, & 1<x. \end{cases}$$

2.25.

Измерительное устройство вырабатывает временные интервалы, распределенные случайным образом в пределах от 100 до 500 мс. Как изменится энтропия случайной величины при изменении точности измерения с 1 мс до 1 мкс?

2.26.

В результате полной деформации управления m самолетов летят произвольными курсами. Управление восстановлено и все самолеты взяли общий курс со средней квадратичной ошибкой, отклонение от курса $\sigma = 3^0$. Найти изменение энтропии, считая, что в первом случае имело место равномерное распределение вероятностей углов, а во втором случае – нормальное.

2.27.

Определить энтропию двумерного равномерного распределения, заданного плотностью:

$$p_{xy}(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0\le x\le 1; \\ 0, & \text{если} \quad 0\le y\le 1. \end{cases}$$

2.28.

Чему равно приращение энтропии ΔH при переходе системы из состояния, характеризуемого среднеквадратичным отклонением σ_1,в состояние, характеризуемое величиной σ_2:
а) для закона нормального распределения координаты;
б) в случае равномерного распределения координаты?

2.29.

Чему равно приращение энтропии ΔH при переходе системы из состояния, характеризуемого среднеквадратичным отклонением σ_1,в состояние, характеризуемое величиной σ_2:
а) нормального распределения координаты;
б) в случае равномерного распределения координаты?

Определить дифференциальную энтропию усеченного нормального распределения с функцией плотности:

$$p_x(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{X})^2}{2\sigma_x^2}}, X_m < x \le X_M, \\ 0 \quad \text{Вне интервала} \quad (X_m, X_M). \end{cases}$$

2.30.

Точность выдерживания курса летательного аппарата под действием управляющих команд изменилась с 3’ до 10’ при равномерном распределении ошибки выдерживания курса. До какой величины пришлось бы изменить среднеквадратичное отклонение точности выдерживания курса, если бы его ошибка была распределена по нормальному закону, чтобы обеспечить такое же изменение энтропии, как и в первом случае.

2.31.

Определить при каком соотношении между шагами квантования Δ_H и Δ_P квантование энтропии величин будут распределены по нормальному и равномерному законам равны?
Примечание: $N = 64,\ P_1 = \dfrac{4}{64},\ P_2 = \dfrac{60}{64}$.

2.32.

Определить количество информации по Фишеру для смещенного нормального распределения с функцией плотности

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}.$$

2.33.

На шахматной доске в одной из клеток произвольным образом поставлена фигура. Априори все положения фигуры на доске одинаково вероятны. Определить количество информации, получаемой от сообщения, в какой именно клетке находится фигура.

2.34.

В условиях примера 3.33 определить частную информацию от сообщения, что фигура находится в одной из угловых клеток доски.

2.35.

Определить среднее количество информации I(x,y), если матрица системы передачи информации P(X,Y) имеет вид:

$$P(X,Y)=\begin{Vmatrix}1/9 & 1/9 & 1/9\\ 1/9 & 1/9 & 1/9\\ 1/9 & 1/9 & 1/9\end{Vmatrix}.$$

2.36.

Определить среднее количество информации I(X,Y) в системе, описываемой матрицей:

$$P(X,Y)=\begin{Vmatrix}1/8 & 1/8 & 1/8\\ 1/8 & 0 & 1/8\\ 1/8 & 1/8 & 1/8\end{Vmatrix}.$$

2.37.

Определить количество информации, содержащееся в сообщении:
а) впервые встреченного лица А: “Сегодня мой день рождения”;
б) выясняющего лица, является ли сегодняшний день днем рождения, впервые встреченного лица А.

2.38.

По цели может быть произведено n независимых выстрелов; вероятность поражения цели при каждом выстреле P = 0.2. После k-го выстрела $(1 \le k < n)$ производится разведка, сообщающая, поражена или не поражена цель, если она поражена, стрельба по ней прекращается. Определить R из того условия, чтобы количество информации, доставляемые разведкой, должно быть максимальным.

2.39.

Некто задумал любое целое число X от единицы до восьми : $1 \le X \le 8,$ а нам предлагается угадать его, поставив минимальное количество вопросов, на каждое из которых дается ответ “да” или “нет”. Определить информацию, заключенную в сообщении, какое число задумано.

2.40.

Система стабилизации платформы гироскопа, компенсирующая случайные возмущения, имеет два дискретных датчика A и B, измеряющих углы α и β во взаимно перпендикулярных плоскостях. Сигналы X и Y с датчика A и B поступают через импульсный элемент на вычислительное устройство через интервалы времени Δt . Датчики имеют количество уровней квантования, соответственно, m_x и m_y. Система работает в течении времени T. Матрица совместных вероятностей имеет вид:

$$P(X,Y)=\begin{Vmatrix}0.12 & 0.10 & 0.08 & 0.05 & 0.03\\ 0.02 & 0.04 & 0.12 & 0.04 & 0.02\\ 0.03 & 0.05 & 0.08 & 0.10 & 0.12\end{Vmatrix}.$$

Числовые данные: $m_x = 3,\ m_y = 5,\ \Delta t = 0.3,\ T = 30\ c.$

Определить количество информации, поступающее в вычислительное устройство за все время работы и за 1 с.

2.41.

Вычислить эпсилон-энтропию непрерывного нормального процесса при заданной средней квадратической ошибке измерения на выходе источника.

2.42.

Физическая система X может находится в одном из четырех состояний с вероятностями соответственно : $P_1 = 0.1; P_2 = 0.2; P_3 = 0.4;$

$P_4 = 0.3.$

При наблюдении за системой X состояния X_1 и X_2 неразличимы. Сообщение о системе X указывает на то, что находится ли она в одном из состояний X_1, X_2 или же в одном из состояний X_3, X_4. Получено сообщение, указывающее, в каком из состояний X_1, X_2 или X_3, X_4 находится система X. Определить количество информации несомое сообщением.

2.43.

В урне 3 белых и 4 черных шара. Из урны вынуто 4 шара, три из них оказались черными, а один – белым. Определить количество информации, содержащееся в наблюдаемом событии B по отношению к событию A – следующий вынутый шар будет черным.

2.44.

Найти энтропию непрерывной системы X, все состояния которой на участке (α, β) одинаково вероятны:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & при \quad \alpha < x < \beta, \\ 0 \quad при \quad x < \alpha & или \quad x > \beta. \end{cases}$$

2.45.

Найти энтропию системы X, состояния которой распределены по нормальному закону:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

2.46.

Состояние самолета характеризуется тремя случайными величинами: высотой H, модулем скорости V и углом θ, определяющим направление полета. Высота самолета распределена с равномерной плотностью вероятностей на участке (h_1, h_2); скорость V – по нормальному закону с математическим ожиданием υ_0 и среднеквадратичным отклонением $\sigma = \sigma_\upsilon$; угол θ – с равномерной плотностью на участке $[0, \pi]$. Величины H, V, θ – независимы. Найти энтропию положения самолета.

2.47.

Даны значения H(x) и H(y). В каких пределах может меняться I(x,y) при изменении H(x, y) от минимального до максимального возможных значений ?

2.48.

Определить среднюю взаимную информацию между двумя буквами алфавита, если известно, что средняя энтропия алфавита равна 5 бита энтропия на пару букв равняется 8.3 бит.

2.49.

Определить количество информации, которое содержится в сообщении о том, что сумма выпавших очков на двух игральных костях равна семи.

2.50.

Вычислить среднее количество информации $I(X/y_2)$ о переданных сообщениях $X = x_i,\ (i = 1, 2, 3)$, доставляемое принятым сообщением y_2 ансамбля $Y = y_i,\ (i = 1, 2, 3)$ если система передачи описывается матрицей: $P(x, y) = \begin{vmatrix} 0.05 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 \\ 0.05 & 0 & 0.3 \end{vmatrix}$.

2.51.

Радиостанция может работать на длине волны – λ_1 (событие A_1) или на – λ_2 (событие A_2), в импульсном (событие B_1) или в непрерывном (событие B_2) режимах. Вероятности совместных событий имеют следующие значения:

$P(A_1B_1) = 0.7; \qquad P(A_1B_2) = 0.15;$

$P(A_2B_1) = 0.05; \qquad P(A_2B_2) = 0.1.$

Вычислить количество информации, получаемое относительно режима работы станции, если станет известна длина волны станции.

2.52.

Для повышения достоверности каждое сообщение может передаваться по каналу связи k раз, причем вероятность неискаженного прохождения сигнала при каждой передачи P=0.2. После k повторений $(1 \le k \le N)$ решающее устройство сравнивает все k принятых сигналов и при их совпадении выносит решение о правильном приеме, после чего на передающий конец поступает команда о прекращении посылки данного сообщения и об отправлении следующего.

Определить значение коэффициента дублирования k из условия максимума количества информации, обеспечиваемой решающим устройством?

2.53.

Лектор произносит в среднем около сорока шести буквенных слов в минуту. Рассматривая его как источник дискретных сигналов, определить его производительность. Для простоты принять, что все буквы алфавита равновероятны и статистически независимы.

2.54.

Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону. Она измеряется с погрешностью Z, также подчиняющейся нормальному распределению. Выходной величиной является случайная величина Y=X+Z. Чему равно количество информации I(X, Y), поступающие в единицу времени, если X и Z независимы, $\overline{X} = \overline{Z} = 0, \quad \sigma_x^2 = 16, \quad \sigma_z^2 = 9$?

2.55.

На отрезке (0,1) выбираются случайным образом, независимо друг от друга, две точки U и V; каждая из них распределена на этом отрезке с равномерной плотностью. В результате опыта одна из точек легла правее, другая – левее. Какое количество информации о положении правой точки дает значение положения левой ?