СБОРНИК ЗАДАЧ (Ч1. Теория вероятности)

1.1.

Телефонная линия, соединяющая два пункта А и В, отстоящих друг от друга на расстоянии 2 км, порвалась в неизвестном месте. Чему равна вероятность того, что она порвалась не более 450м от пункта А?

1.2.

В облигациях государственных займов номера серий обычно выражаются пятизначными числами. Найти вероятность того, что последняя цифра наудачу взятой выигравшей серии равна 7 (как, например, в серии № 59607)?

1.3.

Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели; вероятность попадания для первого стрелка равна $\mathrm{P}\{\mathrm{A}\} = 0.9$, для второго $\mathrm{P}\{\mathrm{B}\} = 0.8.$ Требуется определить вероятность поражении цели, т. е. вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель.

1.4.

Некоторое количество **n** стрелков независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели; вероятность попадания для каждого стрелка равна P 0. Определить количества стрелков, которое требуется для поражения цели с вероятностью не меньшей $\mathrm{P}.$ Рассчитать **n** для случая $P_0 = 0.004, \quad P = 0.98.$

1.5.

Сколько четырехбуквенных слов (отличающихся хотя бы в одной букве) можно составить из 30-буквенного алфавита при условии: а) любого чередования; б) две буквы в слове должны быть согласными?

1.6.

Алфавит соотношения состоит из двух букв A_1 и A_2 , появляющихся с вероятностями

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = \frac{3}{4}, \ \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) = \frac{1}{4}.$$

А) Сколько разных слов можно составить из таких букв?

Б) Чему равна вероятность всех последовательностей?

1.7.

Некоторое изделие выпускается двумя заводами. При этом объем продукции второго завода в k раз превосходит объем продукции первого. Доля брака у 1-го завода P_1 ,а у второго- P_2 . Изделия, выпущенные заводами за одинаковый промежуток времени, перемешали и в таком виде пустили в продажу. Какова вероятность того, что Вы приобрели изделие со второго завода, если оно оказалось испорченным?

1.8.

Электрические лампочки производятся на двух заводах, причем первый из них поставляет 70 %, а второй 30% всей потребляемой продукции. Из каждых ста лампочек первого завода в среднем 83 стандартных, а из ста лампочек второго завода - лишь 63 стандартных. Куплена 1 лампочка и установлено, что она стандартного качества. Какова после этого наблюдения вероятность того, что эта лампочка изготовлена на втором заводе?

1.9.

Производившиеся в некотором районе многолетние наблюдения показали, что из 100 000 детей, достигших десятилетнего возраста, до 40 лет доживает в среднем 82 277, а до 70 лет – 37 977. Найти вероятность того, что если человек достигнет сорокалетнего возраста, то он доживет и до 70 лет?

1.10.

Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0.9, для второго – 0.85, для третьего – 0.8, для четвертого – 0.75. Найти вероятность того, что в течение некоторого часа ни один из станков не потребует к себе внимания рабочего.

1.11.

Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна: для первого станка 0.9; для второго 0.8 и для третьего 0.85. Найти вероятность того, что в течение некоторого часа, по крайней мере, один из трех станков не потребует внимания рабочего?

1.12.

На испытательном стенде испытывается в определенных условиях 250 приборов. Вероятность того, что в течение часа откажет какой-то определенный из этих приборов, равна 0.004 и эта вероятность одна и та же для всех приборов. Найти вероятность того, что в течение часа откажет хотя бы один из испытываемых приборов.

1.13.

Вытачивается деталь прибора в виде прямоугольного параллелепипеда. Деталь считается удачной, если длина каждого из ее ребер отклоняется от заданного размера не более чем на 0.01 мм. Вероятность отклонений, превышающих 0.01 мм составляет:

по длине $P_1 = 0.08$ по ширине $P_2 = 0.12$ по высоте $P_3 = 0.1$.

Найти вероятность непригодности детали.

1.14.

Охотник, имеющий три патрона, стреляет в цепь до первого попадания (или пока не израсходует все три патрона). Количество израсходованных патронов будет случайной величиной с тремя возможными значениями (1, 2, 3). Найти вероятность этой величины при условии, что вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.8.

1.15.

В урне находится N шаров, из них M белых; испытание заключается в том, что из урны последовательно вынимаются два шара; событие A заключается в том, что первый вынутый шар окажется белым, событие B – в том, что второй вынутый шар окажется белым. Определить вероятность того, что второй вынутый шар окажется белым $(P\{B\})$.

1.16.

В доске имеются отверстия (ячейки) с координатами

$(x_k; y_l)$, где

$k = 1, 2, ..., n;$

$l = 1, 2, ..., m.$

На доску брошен шарик, который может попасть в одну из ячеек. Вероятности попадания шарика в каждую из ячеек приведены в таблице:

$x \diagup y$	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}
...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

Вычислить вероятность попадания шарика в ячейку с абсциссой x_k.

1.17.

В урне 5 белых и 20 черных шаров. Из урны последовательно вынимаются шары до тех пор, пока не будет вынут белый шар. Вычислить вероятность того, что при этих условиях будет произведено три вынимания, т. е. до первого белого шара будет вынуто 2 черных шара.

1.18.

На двух станках обрабатываются однотипные детали; вероятность брака для станка №1 – 0.03, а для станка №2 – 0.02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей со станка №1 складывается вдвое больше, чем со станка №2. Вычислить вероятность того, что взятая наудачу деталь не будет бракованной.

1.19.

Для посева заготовлены семена пшеницы сорта I,содержащее небольшое количество примесей других сортов - II,III, IV. Возьмем одно из этих зерен. Известно, что вероятность того, что наудачу взятое зерно окажется того или иного сорта, равны: $P(I)=0.96;$ $P(II)=0.01;$ $P(III)=0.02;$ $P(IV)=0.01$

Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен, равна:
1) 0.5-из зерна сорта I;
2) 0.15- из зерна сорта II;
3) 0.2- из зерна сорта III;
4) 0.05- из зерна сорта IV.

Требуется найти, безусловно, вероятность того, что колос будет иметь не менее 50 зерен.

1.20.

Вероятность того, что в некотором производстве изделие удовлетворяет стандарту, равна 0.96. Предлагается упрощенная система испытаний, которая для изделий, удовлетворяющих стандарту, дает положительный результат с вероятностью 0.98, а для изделий, ему не удовлетворяющих – лишь с вероятностью 0.05. Какова вероятность того, что изделия, дважды выдержавшее упрощенное испытание, удовлетворяет стандарту?

1.21.

При исследовании больного имеется подозрение на одно из трех заболеваний: $A_1, A_2, A_{3.}$ Их вероятность в данных условиях равны соответственно: $P(H_1)=\frac{1}{2}, P(H_2)=\frac{1}{6}, P(H_3)=\frac{1}{3}.$ Для уточнения диагноза назначен некоторый анализ, дающий положительный результат с вероятностью – 0.1 в случае заболевания A_1, с вероятностью – 0.2, в случае заболевания A_2, с вероятностью – 0.9, в случае заболевания A_3. Анализ был произведен пять раз и дал четыре раза положительный результат и один раз отрицательный.

Требуется определить, как изменится вероятность появления заболевания после проведения анализов.

(Требуется найти вероятность появления каждого заболевания после проведения анализа: $P(A_1), P(A_2), P(A_3)$.)

1.22.

Работа двигателя контролируется двумя регуляторами. Рассматривается определенный интервал времени t, в течение которого желательно обеспечить безотказную работу двигателя.
Двигатель отказывает:
с вероятностью $q_{12}=0.1-$ при наличии обоих регуляторов;
с вероятностью $q_1=0.25$ – при работе только первого из них;
с вероятностью $q_1=0.3$ – при работе только второго регулятора;
с вероятностью $q_{12}=0.4-$ при отказе обоих регуляторов.
Надежность первого регулятора $-P_1=0.8;$ надежность второго регулятора – $P_2=0.9.$
Все элементы выходят из строя независимо друг от друга.

Найти полную надежность (вероятность безотказной работы) двигателя.

1.23.

При некоторых условиях вероятность появления события A в каждом испытании равна P. Найти вероятность того, что серия из n независимых испытаний даст k появлений и n-k не появлений события A.

1.24.

Волокна хлопка определенного сорта в среднем на 75% имеют длину, меньшую 45 мм, и на 25%-длину большую (или равную 45 мм). Найти вероятность того, что среди трех наудачу взятых волокон двое будут короче, а одно длиннее 45 мм.

1.25.

В результате наблюдений, продолжавшихся многие десятки лет, найдено, что на каждую тысячу новорожденных приходится в среднем 515 мальчиков и 485 девочек. В некоторой семье 6 детей. Найти вероятность того, что среди них не больше двух девочек.

1.26.

Вероятность того, что расход воды на некотором предприятии окажется нормальным (не больше определенного количества литров в сутки), равна $\frac{3}{4}$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 дней расход воды будет нормальным в течение 1, 2, 3, 4, 5, 6 дней.

1.27.

Количество очков, выбиваемых при одном выстреле одним стрелком, имеет закон распределения, представленный рядом распределения:

Очки:	1	2	3
Вероятность:	0	0.2	0.8

Такое же количество очков для другого стрелка имеет закон распределения:

Очки:	1	2	3
Вероятность:	0.2	0.5	0.3

Найти закон распределения для суммы общих очков, выбиваемых стрелками.

1.28.

При сборке точного прибора для наиболее точной подгонки некоторой детали может потребоваться в зависимости от удачи 1, 2, 3, 4 или 5 деталей. Таким образом, количеством X деталей, необходимых для достижения удовлетворенной сборки прибора, есть случайная величина с возможными значениями 1, 2, 3, 4, 5; пусть вероятности этих значений соответственно: 0.07; 0.16; 0.55; 0.21; 0.01. Каким количеством деталей необходимо снабдить сборщика для сборки 20 приборов.

1.29.

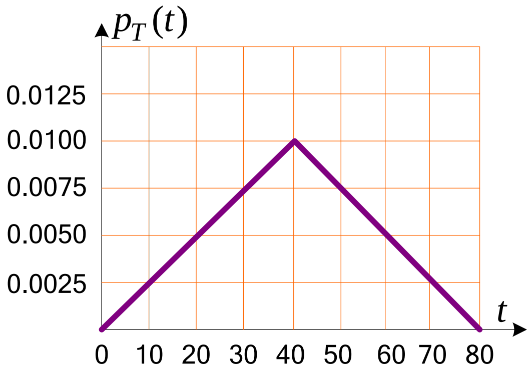
Производятся независимые испытания, в каждом из которых с вероятностью 0.8 может произойти некоторое событие А. Испытания производятся до первого появления события А; общее количество испытаний не превосходит четырех. Определить среднее количество произведенных испытаний.

1.30.

Некоторая площадка имеет форму квадрата, сторона которого по данным аэрофотосъемки равна 350 м. Качество аэрофотосъемки определяется тем, что ошибка в 0 м имеет вероятность 0.42, ± 10 м имеет вероятность 0.16, $\pm$ 20 м имеет вероятность 0.08, $\pm$ 30 м имеет вероятность 0.05. Найти среднее значение площади площадки.

1.31.

Эксперимент состоит в измерении температуры в заданном объеме. Плотность вероятности температуры t задана графиком $P_T(t)$



Определить вероятность события, что температура заключена в пределах:

а) $t_1 \le t \le t_2,\ где\ t_1 = 20^0 C,\ t_2 = 30^0 C;$

б) $t > 80^0 C;$

в) $t > 50^0 C;$

г) $t < 40^0 C.$

1.32.

На станке изготовляется некоторая деталь. Оказывается, что ее длина представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону со средним значением 20 см, дисперсией 0.2 см. Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 19.7 см и 20.3 см?

1.33.

Стрельба ведется из точки О вдоль прямой ОХ. Средняя дальность полета снаряда равна 1200 м. Предполагая, что дальность полета Н распределена по нормальному закону со средним квадратичным уклонением 40 м. Найти, какой процент выпущенных снарядов даст перелет от 60 до 80 м.

1.34.

Из урны, в которой лежит 20 черных и 4 белых шара, вынимаются 5 шаров. Найти распределение вероятностей количества ξ вынутых белых шаров.

1.35.

Из урны, в которой лежит 20 черных и 4 белых шара, последовательно вынимаются шары до тех пор, пока не будет вынут черный шар. Найти распределение количества ξ вынутых при этом белых шаров, т. е. количества белых шаров, вынутых до первого черного шара.

1.36.

Найти плотность распределения сумм двух независимых величин с равномерным распределением вероятностей в интервале (-1; +1).

1.37.

Точка случайно попадает на окружность с равномерным распределением вероятностей по длине дуги. Найти распределение вероятностей длины проекции этой точки на диаметр.

1.38.

Кубики изготовляются с некоторой погрешностью. Считая, что линейные размеры кубиков имеют нормальное распределение вероятностей $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,

найти распределение вероятностей их объемов (υ).

1.39.

Два лица, А и В, условились встретиться в определенном месте между 0 и 1 часами. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Определить вероятность Р встречи лиц А и В.

1.40.

Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение для распределения количества ξ очков.

Количество очков:	1	2	3	4	5	6
Вероятность:	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1.41.

Найти математическое ожидание количества белых шаров в испытании по схеме задачи 1.34.

Указание. Представить ξ в виде суммы характеристических случайных величин, связанных с каждым выниманием шара.

1.42.

Найти центр и дисперсию распределения Пирсона $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ C_1 x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{при} \quad x > 0 (\alpha > 0, \beta > 0) \end{cases}$.

Указание. Воспользоваться интегрированием по частям или основным свойством гамма – функции.

1.43.

Найти коэффициент асимметрии биноминального распределения частоты μ_n

Указание. Вычислить сначала третий центральный момент для характеристической величины λ:

$M(\lambda - p)^3 = (1-p)^3 p + (0-p)^3 q = pq(q-p),$ затем воспользоваться теоремой сложения для центральных моментов третьего порядка.

1.44.

Доказать, что коэффициент асимметрии распределения Пирсона

$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ C_1 x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{при} \quad x > 0 (\alpha > 0, \beta > 0) \end{cases}$ вдвое больше так называемого коэффициента вариации $C_\upsilon = \frac{\sigma(\xi)}{M\xi} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Указание. При вычислении центрального момента $M(\xi - a)^3$ **выразить** его через начальные моменты.

1.45.

Вычислить центральный момент четвертого порядка для общего нормального распределения вероятностей.
Указание. Заменить x - *a* = tσ и проинтегрировать по частям.