ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Надежность технических систем

2018

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- отказы ТС*
- ошибки операторов ТС
- внешние негативные воздействия

Отказ* – это нарушение работоспособности

***Работоспособность* – состояние ТС, при котором она способно выполнять свои функции с параметрами, установленными требованиями технической документации.

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- отказ ТС;
- аварийный исход;
- образование поражающих факторов;
- поражение объектов воздействия;
- вторичные поражающие факторы;
- воздействия вторичных факторов;
- поражение.

0…100%

Вероятность

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Основная причина – отказ.

Отказ – случайное события.

Параметры, описывающие случайные события, – случайные величины.

Случайное событие – событие, которое может произойти или не произойти.

Случайная величина – величина, которая при многократных равноточных измерениях (сделанных в одних условиях) может принимать различные числовые значения.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В основе обработки случайных величин

лежат знания

вероятностных закономерностей случайных событий,

являющихся предметом

теории вероятностей.

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Данные знания позволяют построить закономерности изменения численных характеристик, описывающих случайные события.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях науки, техники и технологии:

- теория автоматического управления,
- **теория надежности**,
- теория ошибок наблюдений,
- теория массового обслуживания

и т.д.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Событие

Достоверное событие – событие, которое произойдет при соблюдении определенных условий.

Например, отказ.

Невозможное событие – событие, которое заведомо не может произойти при заданных условиях.

Событие независимые – наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. В противном случае события – *зависимые*.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Не совместные (совместные) события – события, появление одного из которых исключает (не исключает) возможности появления другого.

Пример, отказ и безотказная работа.

Противоположное событие $\bar{A}$ относительно некоторого события А – событие ($\bar{A}$), состоящее в не появлении выбранного события A.

Например, отказ и безотказная работа.

Полная группа событий – совокупность событий, при которой в результате действий должно произойти хотя бы одно из событий этой совокупности.

Например, отказ и безотказная работа.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Генеральная совокупность N – полный набор всех возможных значений, которые может принимать случайная физическая величина.

Выборка объема – набор n значений величин x_i, полученный из генеральной совокупности N.

Можно понимать:

- под выборкой – реально рассматриваемую совокупность значений (x_1, x_2, …, x_i) случайной величины X;
- под генеральной совокупностью – гипотетически существующую совокупность возможных значений.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Цель обработки набора значений величин x_i выборки – определение закономерностей, описывающих генеральную совокупность.

Частотное определение вероятности

Абсолютная частота случайного события A – количество *m* проявления данного события, зафиксированного в объеме данных *n*.

Относительная частота случайного события A:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число появления события A в серии испытаний;

n – общее число проведенных одинаковых испытаний.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

При малом количестве испытаний в серии значения W для разных серий различны – W_k

$$W_k = \frac{m_k}{n}.$$

При большом числе испытаний значения появления события W_k в различных сериях отличаются друг от друга незначительно

$$W_1 = \frac{m_1}{n} \approx W_2 = \frac{m_2}{n} \approx \ldots W_k = \frac{m_k}{n},$$

$$W = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} = P,$$

где P – вероятность появления случайного события A.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Из определения вероятности вытекают свойства:

- вероятность случайного события есть положительное число

$$0 \le P(A) \le 1$$

- вероятность достоверного события

$$P(A)=1.$$

- вероятность невозможного события

$$P(A)=0.$$

Теорема сложения вероятностей

Если события A и B совместны, то вероятность появления одного из них равна сумме их вероятностей минус вероятность их одновременного появления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Вероятность появления одного из двух несовместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Сумма вероятностей двух несовместных противоположных событий, образующих полную группу

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Теорема умножения вероятностей

- зависимые события:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Условная вероятность события A $P(A/B)$ – вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B произошло

- независимые события:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Функция распределения

Многократные равноточные измерения физической величины – выборка x_i.

Истинное значение x_0 измеряемой величины X – неизвестно.

Область значений разбивается на равные интервалы Δx.

Определяется количество измерений, попавших в каждый интервал: m_1 , m_2 , …, m_k.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Для каждого интервала получим значения:

- абсолютной частоты – m_1 , m_2 , …, m_k;
- относительной частоты:

$$W_k = \frac{m_k}{n},$$

где k – порядковый номер интервала;

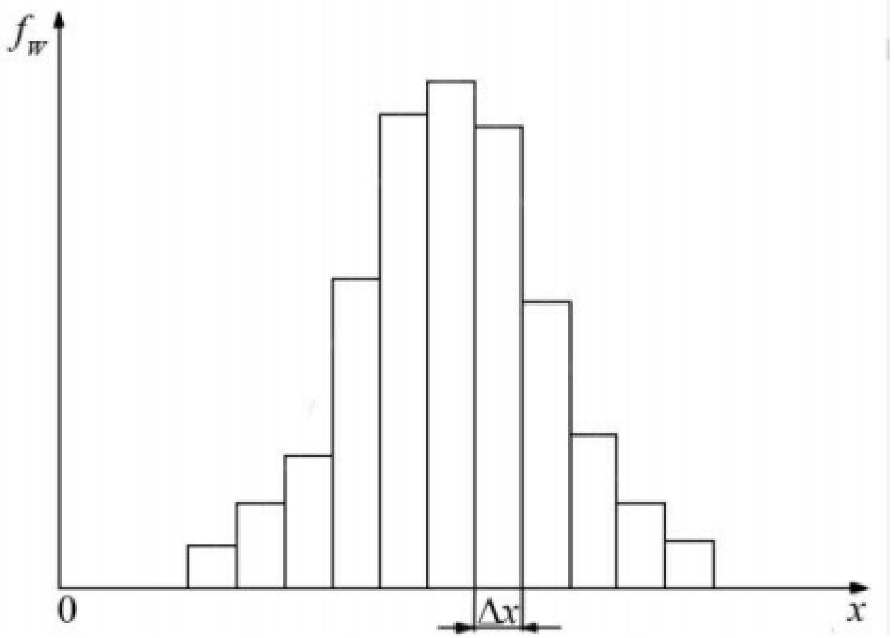
- плотности относительной частоты

$$f_k(x) = \frac{m_k}{\Delta x \cdot n},$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Гистограмма распределения по осям:

- абсцисс – интервалы Δx,
- ординат – значения m_i, W_i или f_W.



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Для каждого числа x в диапазоне изменения случайной величины X существует определенная вероятность $P(X<x)$ того, что X не превышает значения x:

$$F(x)=P(X<x)$$

Вероятность этого события называют *функцией распределения*:

$$F(x)=P(X\leq x).$$

Показывает, какие значения случайной величины наиболее вероятны.

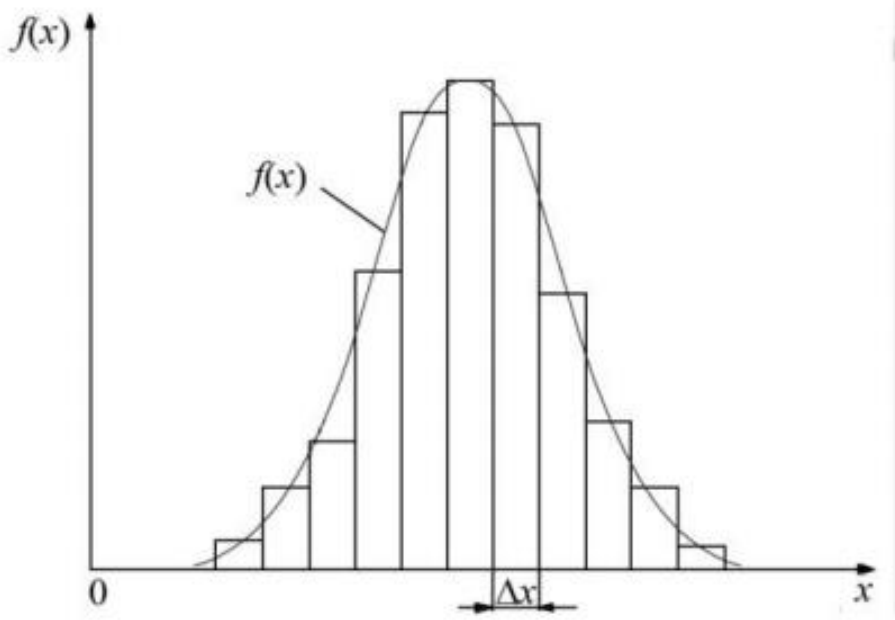
Плотность вероятности

Находится при условии:

- число интервалов $k \to \infty$,
- длина интервала $\Delta x \to 0$.

Плотность вероятности – производная от функции распределения:

$$f(x) = \frac{P(x)}{dx} = \frac{F(x)}{dx}.$$



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

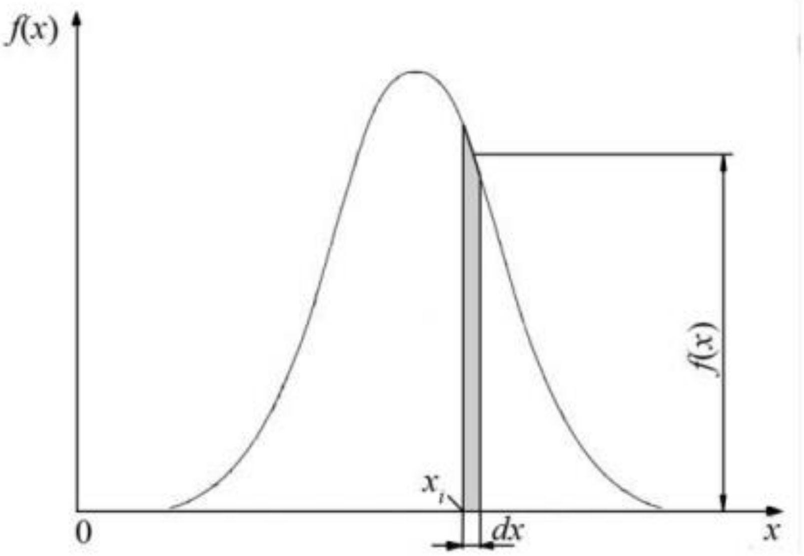
Плотность вероятности (площадь под кривой в интервале $x \in [x_i, x_i + dx]$) позволяет вычислить вероятность попадания случайной величины в данный интервал.

Функция распределения:

$$F(x) = \int_{x_i}^{x_i+dx} f(x)dx.$$

Для интервала бесконечной длины

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

В теории надежности за случайную величину обычно принимают время работы изделия (время до возникновения отказа):

$$x \rightarrow t\text{: } F(x) \rightarrow F(t),\ \ f(x) \rightarrow f(t)$$

Во многих случаях нет необходимости пользоваться функциями $F(t)$ или $f(t)$, достаточно знать числовые характеристики этих кривых.

Числовые характеристики

В теории надежности наиболее распространены:

- среднеарифметическое значение;
- математическое ожидание;
- дисперсия;
- среднеквадратичное отклонение.

Случайная величина:

- дискретная;
- непрерывная.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Математическое ожидание – наиболее вероятное значение случайной величины:

- для дискретных случайных величин

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i;$$

- для непрерывных случайных величин

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Дисперсия – мера отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(x)$:

- для дискретных случайных величин

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(x))^2\cdot p_i;$$

- для непрерывных случайных величин

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x_i-M(x))^2\cdot f(x)dx$$

Среднеквадратичное отклонение характеризует рассеяние случайной величины:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

На практике $M(x)$ и $D(x)$ случайной величины можно оценить только на основе выборки из конечного числа измерений случайной величины:

- выборочное среднее арифметическое значение случайной величины

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$$

- исправленное выборочное среднеквадратическое значение случайной величины

$$D(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Для оценки

- $M(x)$ кроме $\bar{x}$ могут использоваться:
- медиана – значение, при котором площади под кривой справа и слева от медианы равны;
- мода – значение, в котором плотность вероятности наибольшая либо (для дискретных) наиболее часто встречающееся значение
- дисперсии – размах:

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Законы распределения случайных величин

Закон распределения случайной величины – функциональная зависимость между возможными значениями случайной величины и соответствующим им вероятностям.

Наиболее полно описываются числовыми характеристиками, функцией распределения и плотностью вероятности.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Наибольшее распространение получили законы:

- для дискретных случайных величин:
- биноминальный закон;
- закон Пуассона;
- для непрерывных случайных величин:
- нормальный закон и логарифмически-нормальное;
- закон Вейбулла-Гнеденко;
- экспоненциальный закон;
- гамма-распределение;
- Рэлея.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Закон Пуассона

Описывает закономерность появления случайных отказов в сложных системах.

Случайная величина *X* распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что эта величина примет определенное значение *m*, выражается:

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

λ – параметр распределения (ожидаемое количество появлений значения *m*)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Параметр распределения

$$\lambda = np,$$

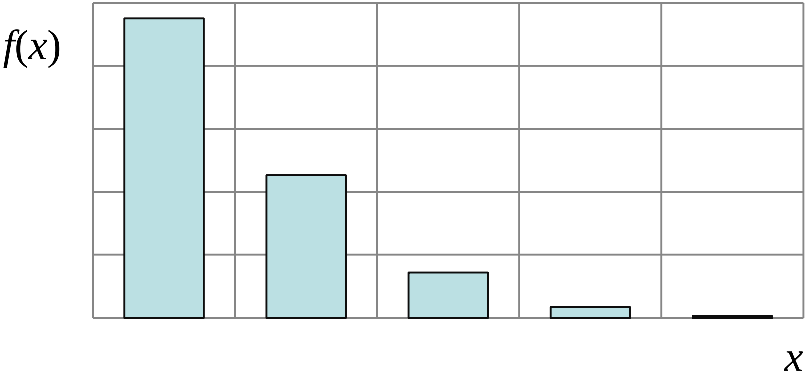
где n – общее количество испытаний;

p – вероятность появления ожидаемого события (отказа).

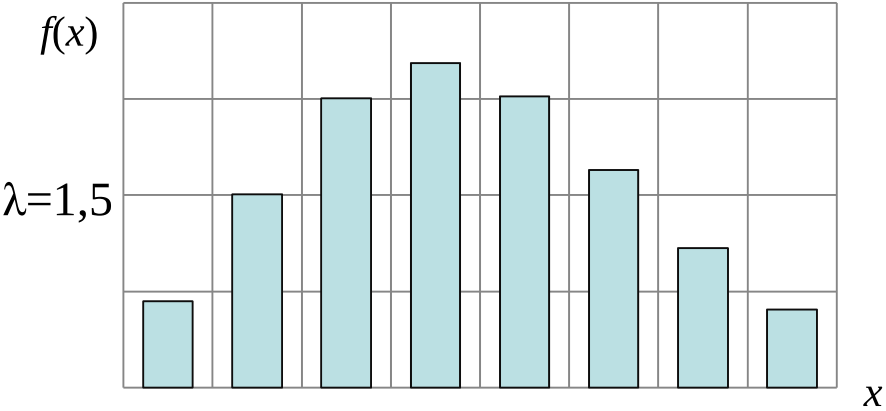
Математическое ожидание и дисперсия

$$M(x) = D(x) = \lambda$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ



λ=0,05



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Экспоненциальный закон

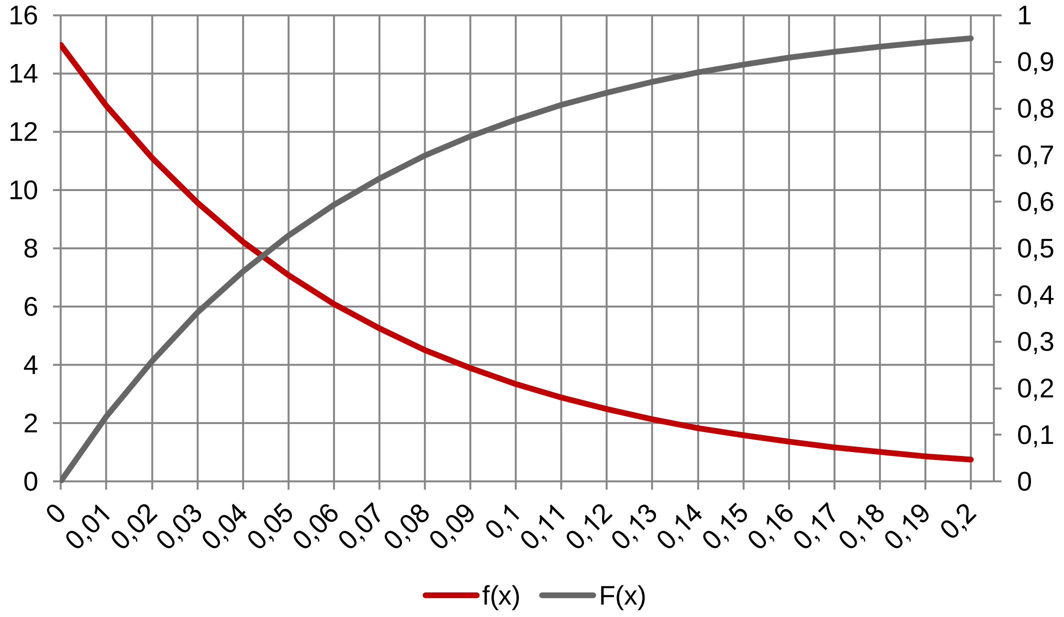
Основной закон, т.к. описывает закономерность появления отказов в период нормальной эксплуатации изделий: постепенные отказы еще не проявились и надежность характеризуется внезапными отказами.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Математическое ожидание и дисперсия

$$M(x) = \frac{1}{\lambda} \qquad D(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ



Графики функции распределения $F(x)$ и плотности вероятности $f(x)$ при λ=15

Нормальный закон

Используют для описания постепенных отказов, когда распределение времени безотказной работы вначале имеет низкую плотность, затем максимальную и далее плотность снижается.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Плотность вероятности и функция распределения:

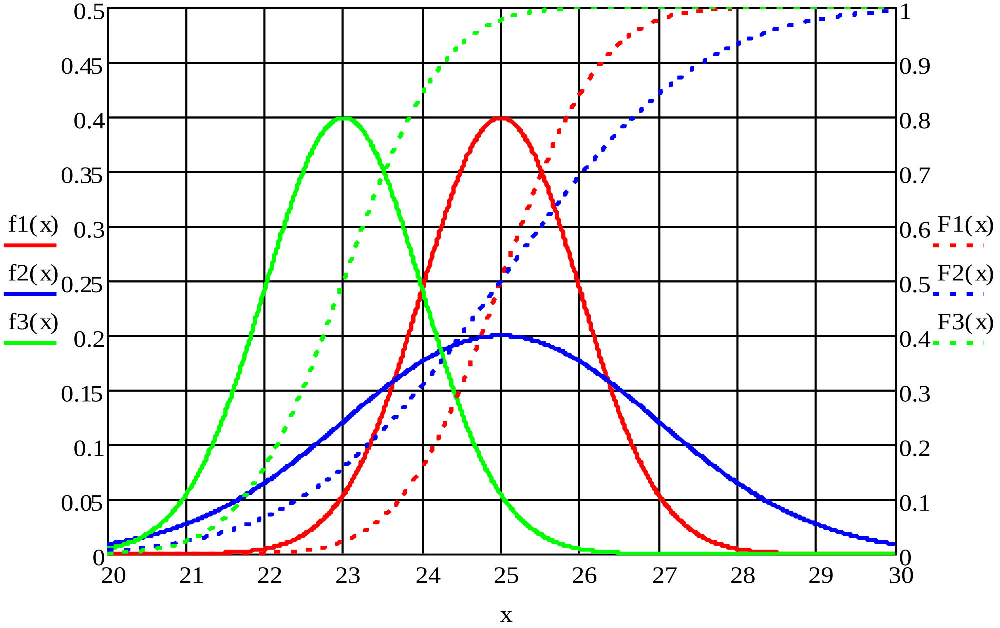
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

где m – математическое ожидание, мода, медиана;

σ – стандартное отклонение.

a и b – пределы изменения значений величины X.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ



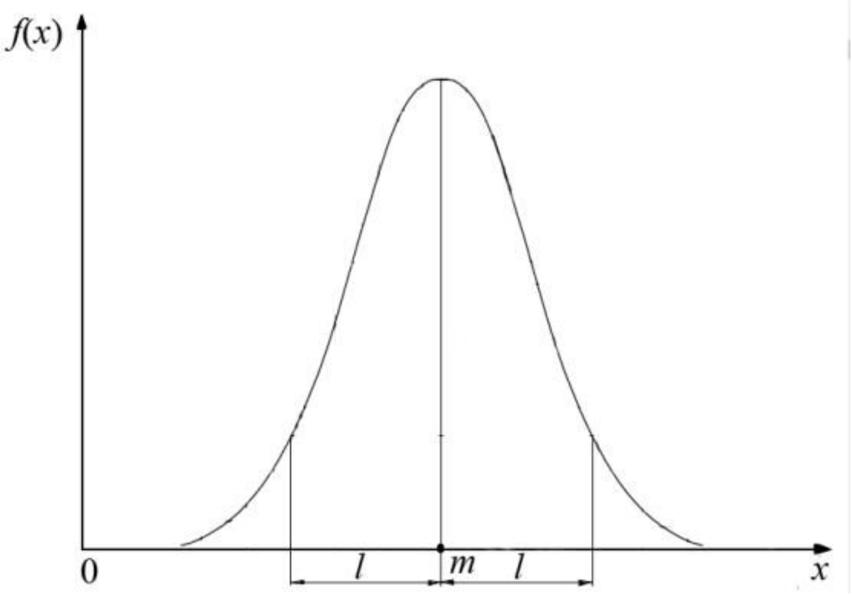
Графики функции распределения $F(x)$ и плотности вероятности $f(x)$:
m=25, σ=1 ($f1(x)$, $F1(x)$); m=25, σ=2 ($f2(x)$, $F2(x)$); m=23, σ=1 ($f3(x)$, $F3(x)$)

Математическое ожидание и дисперсия

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx;$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (M(x) - x)^2 f(x)dx.$$

Часто приходится вычислять вероятность того, что значение случайной величины *X* попадает в интервал ($m - l$, $m + l$)



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Вероятность, с которой в условиях данного эксперимента полученные экспериментальные данные можно считать надежными либо достоверными, называют **доверительной вероятностью** (надежностью)

Интервал $x \in [-l, +l]$, соответствующий доверительной вероятности, называется **доверительным интервалом**.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Вероятность попадания значения случайной величины X в интервал $(m - l, m + l)$, выраженный через среднеквадратичное отклонение σ:

Правило трех сигм

Интервал	Вероятность
$m–\sigma \le x \le m+\sigma$	68,3%
$m–2\sigma \le x \le m+2\sigma$	95,5%
$m–3\sigma \le x \le m+3\sigma$	99,7%

Вероятность того, что случайная величина отклонится от своего $M(x)$ ожидания на величину, большую чем утроенное σ, практически равна нулю (0,3%).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Закон Вейбулла-Гнеденко

Универсальный – при соответствующих значениях переходит в нормальное, экспоненциальное и другие.

Закон удовлетворительно описывает:

- разброс усталостной прочности стали, пределов ее упругости;
- наработку до отказа подшипников, элементов радиоэлектронной аппаратуры,
- надежность деталей и узлов машин, в частности автомобилей, а также для оценки надежности машин в процессе их приработки

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

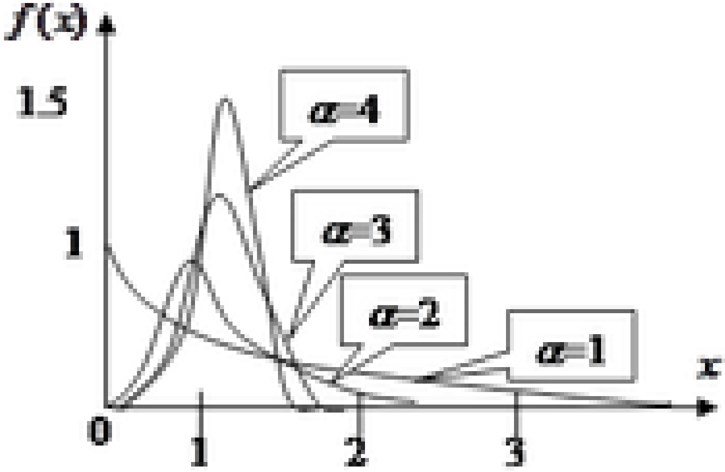
Функция распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\alpha}}$,

α – параметр формы (определяется подбором в результате обработки экспериментальных данных);

λ – параметр масштаба

плотность вероятности

$$f(x) = \lambda \alpha x^{\alpha-1} - e^{-\lambda x^{\alpha}},$$



ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Надежность технических систем

2018