ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Дифференциальные уравнения – раздел математики, изучающий теорию и способы решения уравнений, содержащих искомую функцию и ее производные различных порядков одного аргумента (обыкновенные дифференциальные) или нескольких аргументов (дифференциальные уравнения в частных производных). В самом уравнении участвует не только неизвестная функция, но и различные ее производные. Дифференциальным уравнением описывается связь между неизвестной функцией и ее производными. Такие связи отыскиваются в различных областях знаний: в механике, физике, химии, биологии, экономике н др.

Дифференциальные уравнения применяются для математического описания природных явлений. Так. например, в биологии дифференциальные уравнения применяются для описания популяции: в физике многие законы можно описать с помощью дифференциальных уравнений.

Широкое применение находят дифференциальные уравнения и в моделях экономической динамики. В данных моделях отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени.

Пример 1. Математическая модель маятника (свободные колебания)

Математический маятник – тело малых размеров, подвешенное на тонкой нерастяжимой нити, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массой тела. В положении равновесия, когда маятник висит по отвесу, сила тяжести $m\vec{g}$ уравновешивается силой натяжения нити $\vec{F}_{\text{упр}}$. При отклонении маятника из положения равновесия на некоторый угол φ появляется касательная составляющая силы тяжести $F_\tau = -mg \cdot \sin\varphi$ (рис. 1). Знак «минус» в этой формуле означает, что касательная составляющая направлена в сторону, противоположную отклонению маятника.

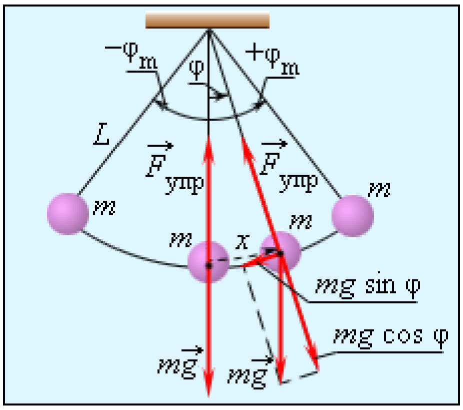


Рис. 1. Математический маятник:
φ – угловое отклонение маятника от положения равновесия,
$x = l\varphi$ – смещение маятника по дуге

Если обозначить через x линейное смещение маятника от положения равновесия по дуге окружности радиуса l, то его угловое смещение:

$$\varphi = x/l.$$

Второй закон Ньютона, записанный для проекций векторов ускорения и силы на направление касательной, дает:

$$ma_\tau = F_\tau = -mg\sin\left(\frac{x}{l}\right).$$

Это соотношение показывает, что математический маятник представляет собой сложную нелинейную систему, т.к. сила, стремящаяся вернуть маятник в положение равновесия, пропорциональна не смещению x, а

$$\sin\left(\frac{x}{l}\right).$$

В случае малых колебаний (для углов порядка 15–20°) приближенно $\sin\left(\frac{x}{l}\right)$ можно заменить на $\frac{x}{l}$: величина $\sin\left(\frac{x}{l}\right)$ отличается от $\frac{x}{l}$ не более чем на 2 %.

Для малых колебаний математического маятника второй закон Ньютона записывается в виде

$$ma_\tau = F_\tau = -m\frac{g}{l}x,\ \ a_\tau = -\frac{g}{l}.$$

Таким образом, тангенциальное ускорение a_τ маятника пропорционально его смещению x, взятому с обратным знаком.

По общему правилу для всех систем, способных совершать свободные гармонические колебания, модуль коэффициента пропорциональности между ускорением и смещением из положения равновесия равен квадрату круговой частоты:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l},\ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\ .$$

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \omega_0 \cdot \sin(\varphi(t)) = 0$$

Реализация математической модели в среде Mathcad

Записать дифференциальное уравнение и построить график φ(t) при начальных условиях l=10 м, g=9,8 м/с^2, интервале времени 50 с.

1. Зададимся начальными условиями

l:=10, g:=9.8.

2. Вводим ключевое слово, обозначающее последующую систему уравнений

Given

3. Дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) + \omega 0 \cdot \sin(\varphi(t)) = 0.$$

Знак «=» вбивается через сочетание клавиш «Ctrl» и «+=» либо вводится через панель «Булева алгебра».

4. Записываем необходимые данные:

- изменение времени (для плавности отображения графика)

t:=0,0.01..100;

- значения в начальный момент времени

$$\varphi'(0) = 0 \text{ и } \varphi(0) = \frac{\pi}{4}$$

Знак дифференцирования «'» ввести сочетание клавиш «Ctrl» и «F7».

5. Записывает функцию для решения обыкновенного дифференциального уравнения

odesolve(x,b,step)

где x – переменная, по которой производится интегрирование;
b – конечное значение промежутка решения;
step – величина шага численного метода (параметр необязательный).

Начальные условия и дифференциальное уравнение должны быть определены в блоке **Given**.

Листинг программы показан ниже (рис. 2)

$$g := 9.8 \qquad l := 10$$

$$\omega 0 := \sqrt{\frac{g}{l}}$$

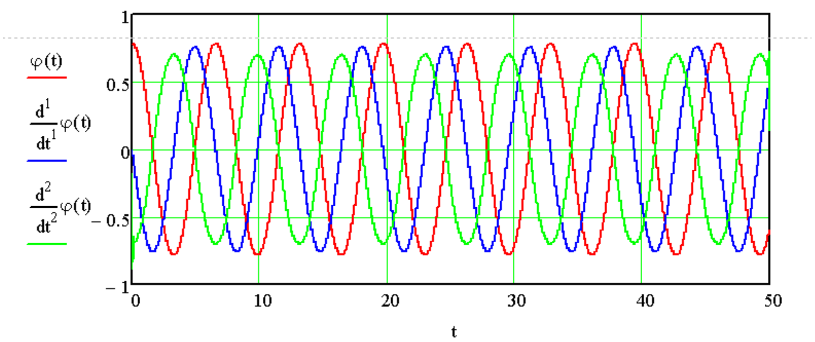
Given

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) + \omega 0 \cdot \sin(\varphi(t)) = 0$$

$$t := 0, 0.01 .. 50$$

$$\varphi'(0) = 0 \qquad \varphi(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi := \text{Odesolve}(t, 50)$$



Задание 1. Реализовать алгоритм в среде Mathcad

Пример 2. Модель расчета стоимости оборудования

Скорость обесценивания оборудования из-за его износа пропорциональна его фактической стоимости. Начальная стоимость оборудования равна A_0. Найти выражение обесценивания стоимости.

Решение

Изменение скорости обесценивания выражается

$$A_0 - A(t),$$

где $A(t)$ – стоимость оборудования в момент t.

Скорость обесценивания оборудования пропорциональная фактической стоимости в данный момент, определяется

$$\frac{d(A_0 - A(t))}{dt} = k \cdot A(t).$$

При начальных условиях $A(0)=A_0$, тогда дифференциальное уравнение принимает вид

$$-\frac{dA(t)}{dt} = k \cdot A(t). \qquad (1)$$

После интегрирования обеих частей

$$-\int \frac{dA(t)}{A(t)} = \int k \cdot dt$$

получим

$$\ln|A(t)| = -kt + \ln C,$$

$$\ln\left|\frac{A(t)}{C}\right| = -kt, \quad \frac{A(t)}{C} = e^{-kt},$$

$$A(t) = Ce^{-kt}.$$

Определяем постоянную C при начальных условиях $t=0$, $A(0)=A_0$:

$$A(0) = A_0 = Ce^{-k \cdot 0} = C.$$

Итоговое уравнение:

$$A(t) = A_0 e^{-kt}. \qquad (2)$$

Задание 2.

Для начальных условий k=0.1, A0=100, t=0…60 записать алгоритм решения дифференциального уравнения (1). Построить график $A(t)$ по результатам расчета функции **odesolve(x,b)**.

Построить график $A(t)$ по формуле (2).

Пример 2. Модель естественного роста (рост при постоянном темпе)

Объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени t, описывается функций $y(t)$. Будем полагать, что вся производимая отраслью продукция реализуется по некоторой фиксированной цене p, т.е. выполнено условие ненасыщенности рынка (потребителя) – весь выпущенный предприятием товар будет продан, а объём продаж не является столь высоким чтобы существенно повлиять на цену товара p.

Тогда доход к моменту времени t составит

$$Y(t)=p\cdot y(t). \tag{3}$$

В модели естественного роста полагают, что скорость выпуска продукции пропорциональная величине инвестиций, направляемых на расширение производства:

$$y' = l \cdot I(t). \tag{4}$$

где $1/l$ – норма акселерации.

Принцип акселерации: изменение потребительских расходов вызывает изменения в накоплении капитала. Например, значительное возрастание потребительского спроса на товары может иметь результатом увеличение производственных мощностей. Наоборот, значительное уменьшение потребительских расходов может настолько сократить прибыль изготовителей, что не позволит им даже заменить изношенное оборудование, т. е. вызовет то или иное снижение инвестиций.

Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, и используя (1), получим

$$I(t)=m\cdot Y(t)=m\cdot p\cdot y(t), \tag{5}$$

где m – коэффициент пропорциональности (акселерации), m=const, $0<m<1$: для увеличения интенсивность выпуска $y(t)$, необходимо чтобы чистые инвестиции $I(t)$ (т.е. разность между общим объёмом инвестиций и амортизационными затратами) были больше нуля. В случае $I(t)=0$ общие инвестиции только лишь показывают затраты на амортизацию, и уровень выпуска продукции остаётся неизменным. Случай $I(t)<0$ приводит к уменьшению основных фондов и уровня выпуска продукции.

Подставляя в выражение (4) в (5) приходим к уравнению, являющимся моделью естественного роста

$$y' = l \cdot m \cdot p \cdot y(t) = k \cdot y(t). \tag{6}$$

Решение

После интегрирования обеих частей

$$\ln|y|=kt+\ln C, \text{ или } y=Ce^{kt}.$$

Если $y(t_0)=y_0$, то $C=y_0e^{-kt0}$, получаем уравнение естественного роста

$$y(t)=y(0)e^{k(t-t_0)}. \tag{7}$$

Задание 3.

Для начальных условий m=0.1, l=0.9, a=0.2, t=0…100 (t_0=0) записать алгоритм решения дифференциального уравнения (6). Построить график $A(t)$ по результатам расчета функции **odesolve(x,b)**.

Построить график $A(t)$ по формуле (7).