МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И АППРОКСИМАЦИИ

Интерполяция

Интерполяция – способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Пусть в ходе эксперимента при изменении входной величины x (x_0, x_1, x_2,..., x_n) получены значения функции $y=f(x)$ (y_0, y_1, y_2.....y_n) (табл. 1).

Таблица 1

Вид таблицы экспериментальных данных

x_0	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2	…	y_{n-1}	y_n

Интерполяцию функций применяют в случае, когда требуется найти значение функции $y(x)$ при значении аргумента x_i, принадлежащего интервалу $[x_0, \ldots, x_n]$, но не совпадающего по значению ни с одним значением, приведенным в таблице 1.

Данная задача, а именно интерполяция функций, часто встречается при ограниченности возможностей при проведении эксперимента. В частности из-за дороговизны и трудоемкости проведения эксперимента размер выборки (x_0, x_1, x_2,..., x_n) может быть достаточно мал.

При этом во многих случаях аналитическое выражение функции $y(x)$ не известно и получить его по таблице ее значений (табл. 1) в большинстве случаев невозможно. Поэтому вместо нее строят другую функцию, которая легко вычисляется и имеет ту же таблицу значений (совпадает с ней в точках x_0, x_1, x_2,..., x_n), что и $f(x)$, т. е.

$$\begin{gathered} P_n(x_0)=f(x_0)=y_0; \\ \ldots \\ P_n(x_i)=f(x_i)=y_i; \end{gathered} \tag{1}$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots , n$.

Нахождение приближенной функции называется интерполяцией, а точки x_0, x_1, x_2, …, x_n – узлами интерполяции.

Интерполирующую функцию ищут в виде полинома n степени.

Для каждого набора точек имеется только один интерполяционный многочлен, степени не больше n. Однозначно определенный многочлен может быть представлен в различных видах.

Графически задача интерполирования заключается в том, чтобы построить такую интерполирующую функцию, которая бы проходила через все узлы интерполирования (рис. 1).

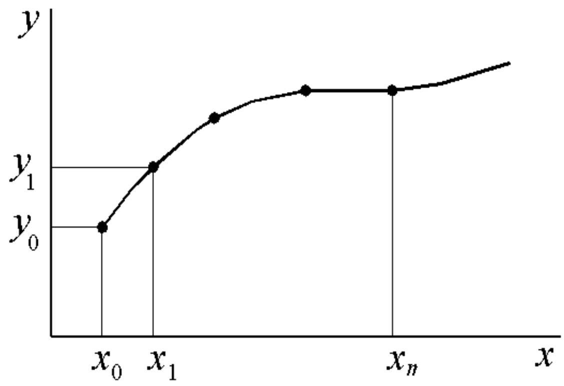


Рис. 1. Вид интерполирующей функции

Рассмотрим канонический полином, линейную интерполяцию, интерполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа.

4.1.1. Канонический полином

Вид канонического полинома степени n

$$P_n(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_n x^n. \qquad (2)$$

Выбор многочлена степени n основан на том факте, что через n+1 точку проходит единственная кривая степени n. Подставив (2) в (1), получим систему линейных алгебраических уравнений (3)

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} + a_nx_2^n = y_2 \\ \ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \qquad (3)$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений, найдём коэффициенты интерполяционного полинома a_0, a_1, a_2, ..., a_n.

4.1.2. Линейная интерполяция

Линейная интерполяция – простейший и часто используемый вид интерполяции. Она состоит в том, что заданные точки с координатами x_i, y_i при i=0, 1, 2, ... n соединяются прямолинейными отрезками, а функцию $y(x)$ можно приближенно представить в виде ломаной.

Уравнения каждого отрезка ломаной в общем случае разные. Поскольку имеется n интервалов (x_{i-1}, x_i), то для каждого из них в качестве уравнения интерполяционного многочлена используется уравнение прямой, проходящей через две точки: для i-го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i),

$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Отсюда

$$y=a_ix+b_i,\ x_{i-1}\le x\le x_i; \qquad (4)$$

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},\ b_i = y_{i-1} - a_i\, x_{i-1}. \qquad (5)$$

Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента x, а затем подставить его в формулу (4) и найти приближенное значение функции в этой точке. Пример линейной интерполяции для экспериментальных данных согласно табл. 2. приведен на рис. 2.

Таблица 2

Таблица экспериментальных данных

Индекс	0	1	2	3	4
x	1	2	3	4	5
y	2,5	4	3,5	5	6

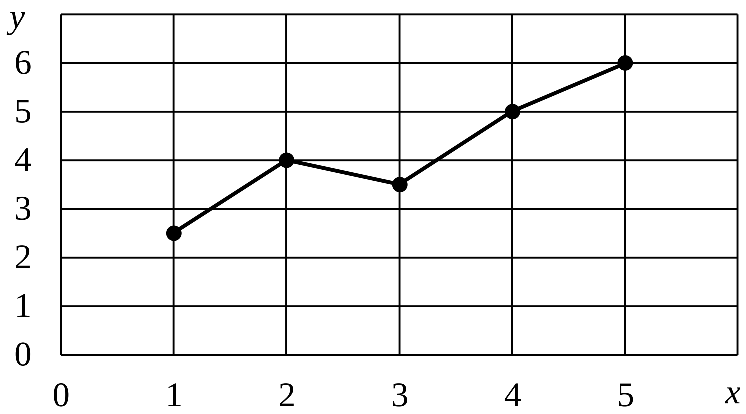


Рис. 2. Графическое решение линейной интерполяции

Пример

Даны экспериментальные данные (табл. 3).

Таблица 3

Экспериментальные данные

x	0	2	3	3,5
y	-1	0,2	0,5	0,8

Задание

1. Найти значение функции при x=1 и x=3,2.
2. Решить задачу графически.

Решение

1. Точка x=1 принадлежит первому локальному отрезку [0, 2], т.е. i=1 и, следовательно, по вышеприведенным формулам (1, 2):

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0{,}2 - (-1)}{2 - 0} = 0{,}6;$$

$$b_1 = y_0 - a_1\, x_0 = -1 - 0{,}6 \cdot 0 = -1;$$

$$y = a_1 x + b_1 = 0{,}6 \cdot 1 - 1 = -0{,}4.$$

Точка x=3,2 принадлежит третьему интервалу [3, 3,5], т.е. i=3 и, следовательно, по формулам (1, 2):

$$a_3 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{0{,}8 - 0{,}5}{3{,}5 - 3} = 0{,}6;$$

$$b_3 = y_2 - a_3\, x_2 = 0{,}5 – 0{,}6 \cdot 3 = –1{,}3;$$

$$y = a_3 x + b_3 = 0{,}6 \cdot 3{,}2 - 1{,}3 = 0{,}62.$$

2. По данным таблицы 3 строим график (рис. 3).

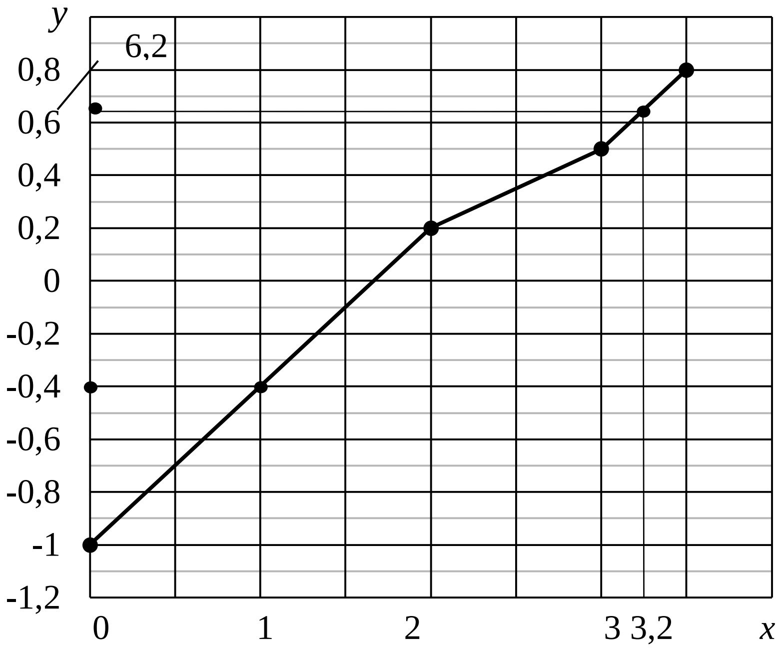


Рис. 3. Графическое решение поставленной задачи

1.3. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционный полином Лагранжа имеет вид:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_n(x), \tag{3}$$

где $L_n(x)$ – множитель Лагранжа

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}.$$

Следовательно

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \right).$$

Числитель и знаменатель не должны включать в себя значения $x=x_i$, так как результат будет равен нулю.

В развернутом виде формулу Лагранжа можно записать:

$$P_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} +$$

$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots \tag{4}$$

$$+ y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Интерполяционный полином Лагранжа обычно применяется в теоретических исследованиях (при доказательстве теорем, аналитическом решении задач и т. п.).

Пример

1. Найти для функции $y=\sin\pi x$ интерполяционный полином Лагранжа, выбрав узлы $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{2}$.

2. Найти значения полинома Лагранжа для значений x: $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$.

3. Определить абсолютную и относительную погрешности вычислений.

Решение

1. Вычислим соответствующие значения функции в узлах:
$y_0 = 0$; $y_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ (табл. 4).

Таблица 4

Таблица данных

Индекс	0	1	2
x	0	$\frac{1}{6}$	0,5
y	0	0,5	1

Применяя формулу (4), получим

$$P_n(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(0-\frac{1}{6}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)}\cdot 0 + \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}-0\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}\cdot 1;$$

$$P_n(x) = \frac{7}{2}x - 3\cdot x^2.$$

2. Определим значения полинома Лагранжа для значений x: $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$:

$$P_n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{16} \approx 0{,}688 \text{ и } P_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{3} - 3\cdot\frac{1}{9} \approx 0{,}833.$$

3. Определим погрешности вычислений.

Для этого найдем значения функции $y=\sin\pi x$ при заданных значениях x, составив соответствующую таблицу (табл. 5).

Таблица 5

Таблица данных

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
y	0	0,5	0,71	0,87	1
$P_n(x)$	0	0,5	0,69	0,83	1

Абсолютная погрешность измерения, определяемая как разность между истинным и измеренным значениями физической величины:

$$\Delta_{1/4}=0{,}71 - 0{,}69=0{,}02 \text{ и } \Delta_{1/3}=0{,}87 - 0{,}83=0{,}04.$$

Относительная погрешность находится как отношение абсолютной погрешности к истинному значению или к результату измерения:

$$\delta_{1/4} = \frac{0{,}02}{0{,}71} \cdot 100 \approx 2{,}82 \text{ или } \delta_{1/4} = \frac{0{,}02}{0{,}69} \cdot 100 \approx 2{,}9;$$

$$\delta_{1/3} = \frac{0{,}04}{0{,}87} \cdot 100 \approx 4{,}6 \text{ или } \delta_{1/3} = \frac{0{,}04}{0{,}83} \cdot 100 \approx 4{,}82.$$

1.4. Интерполяционный многочлен Ньютона

Если узлы интерполяции равноотстоящие по величине, так что

$$x_{i+1} – x = h = \text{const},$$

где h – шаг интерполяции, т.е. $x_i = x_0 + nh$, то интерполяционный многочлен можно записать в форме, предложенной Ньютоном.

Интерполяционные полиномы Ньютона удобно использовать, если точка интерполирования находится в начале таблицы – первая интерполяционная формула Ньютона или конце таблицы – вторая формула.

1.4.1. Первая интерполяционная формула Ньютона

Интерполирующий полином ищется в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)...(x - x_{n-1}). \quad (5)$$

Построение многочлена сводится к определению коэффициентов a_i.. При записи коэффициентов пользуются конечными разностями.

Конечные разности первого порядка запишутся в виде:

$$\Delta y_0 = y_1 – y_0;$$

$$\Delta y_1 = y_2 – y_1;$$

$$\ldots$$

$$\Delta y_{n-1} = y_n – y_{n-1},$$

где y_i – значения функции при соответствующих значениях x_i.

Конечные разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 – \Delta y_0;$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 – \Delta y_1;$$

$$\ldots$$

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} – \Delta y_{n-2}.$$

Конечные разности высших порядков найдутся аналогично:

$$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 – \Delta^{k-1} y_0;$$

$$\Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 – \Delta^{k-1} y_1;$$

$$\ldots$$

$$\Delta^k y_{n-2} = \Delta^{k-1} y_{n-1} – \Delta^{k-1} y_{n-2}.$$

Коэффициенты a_0, a_1,..., a_n находятся из условия $P_n(x_i) = y_i$. Находим a_0, полагая $x = x_0$,

$$a_0 = P(x_0) = y_0.$$

Далее подставляя значения $x=x_1$, получим:

$$P_n(x_1) = y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0),$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Для определения a_2, полагая $x=x_2$, получим

$$P_n(x_2) = y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_0 + 2\Delta y_0 + a_2 2h^2;$$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2y_1 + 2y_0}{2h^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} =$$

$$= \frac{(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)}{2h^2} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

Общая формула для нахождения всех коэффициентов имеет вид

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i},$$

где $i=1\ldots n$.

В результате (5) примет вид

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}). \qquad (6)$$

Данный многочлен называют первым полиномом Ньютона.

Пример

Дана таблица значений (табл. 6) зависимости вязкости воды от температуры $\rho=f(T)$.

Таблица 6

Зависимость вязкости воды от температуры

T, °C	0	25	50	75	100
ρ, кг/м^3	1000	997	988	975	960

1. Построить первый интерполяционный многочлен Ньютона.
2. Определить значение полинома для температуры T=12°C.

Решение

Составим таблицу конечных разностей функции (табл. 7).

Таблица 7

Таблица конечных разностей

Индекс	T	ρ	Δρ	$\Delta^2\rho$	$\Delta^3\rho$	$\Delta^4\rho$
0	0	1000	–3	–6	2	0

1	25	997	–9	–4	2	
2	50	988	–13	–2		
3	75	975	–15			
4	100	960				

Для построения полинома воспользуемся формулой (6):

$$P_4(T) = \rho_0 + \frac{\Delta\rho_0}{h}(T - T_0) + \frac{\Delta^2\rho_0}{2!h^2}(T - T_0)(T - T_1) +$$

$$+ \frac{\Delta^3\rho_0}{3!h^3}(T - T_0)(T - T_1)(T - T_2) + \frac{\Delta^4\rho_0}{4!h^4}(T - T_0)(T - T_1)(T - T_2)(T - T_3) =$$

$$= 1000 - \frac{3}{25}(T - 0) - \frac{6}{25^2 \cdot 2}(T - 0)(T - 25) + \frac{2}{25^3 \cdot 6}(T - 0)(T - 25)(T - 50) =$$

$$= 0{,}0000213 \cdot T^3 - 0{,}0064 \cdot T^2 + 0{,}0267 \cdot T + 1000.$$

Подставив в формулу полученного полинома значение T=12°C, найдем значение плотности ρ=999,35 кг/м^3.

4.1.4.2. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Для нахождения значений функции в конце интервала интерполирования интерполяционный полином запишется в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + ... \\ ... + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1). \qquad (7)$$

Коэффициенты a_0, a_1, ..., a_n находятся из условия $P_n(x_i) = y_i$.

Подставляя в (7) $x = x_n$, найдем

$$P_n(x_n) = y_n = a_0.$$

Для $x=x_{n-1}$:

$$P_n(x_{n-1})=y_{n-1}=y_n+a_1(x_{n-1} - x_n),\ a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

Для $x=x_{n-2}$:

$$P_n(x_{n-2}) = y_{n-2} = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x_{n-2} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}) =$$

$$= y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(-2h) + a_2 \cdot 2h^2 = y_n - 2\Delta y_{n-1} + a_2 2h^2;$$

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}.$$

Формула для нахождения всех коэффициентов запишется как:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-1}}{i!h^i}.$$

Подставив выражения для определения коэффициентов a_i в формулу (7), получим вторую интерполяционную формулу Ньютона:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + ... \qquad (8)$$

$$... + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1).$$

Пример

Дана таблица значений (табл. 7) ρ=*f*(*T*).

1. Построить интерполяционный многочлен Ньютона.
2. Определить значение полинома для температуры *T*=90°С.

Решение

Для построения полинома воспользуемся формулой (8) и табл. 7:

$$P_4(x) = \rho_4 + \frac{\Delta\rho_3}{h}(T - T_4) + \frac{\Delta^2\rho_2}{2!h^2}(T - T_4)(T - T_3) +$$

$$+ \frac{\Delta^3\rho_1}{3!h^3}(T - T_4)(T - T_3)(T - T_2) + \frac{\Delta^4\rho_0}{4!h^4}(T - T_4)(T - T_3)(T - T_2)(T - T_1) =$$

$$= 960 - \frac{15(T-100)}{25} - \frac{2(T-100)(T-75)}{2!\ 25^2} +$$

$$+ \frac{2(T-100)(T-75)(T-50)}{3!25^3} =$$

$$= 0{,}0000213 \cdot T^3 - 0{,}0064 \cdot T^2 - 0{,}2933 \cdot T + 1028.$$

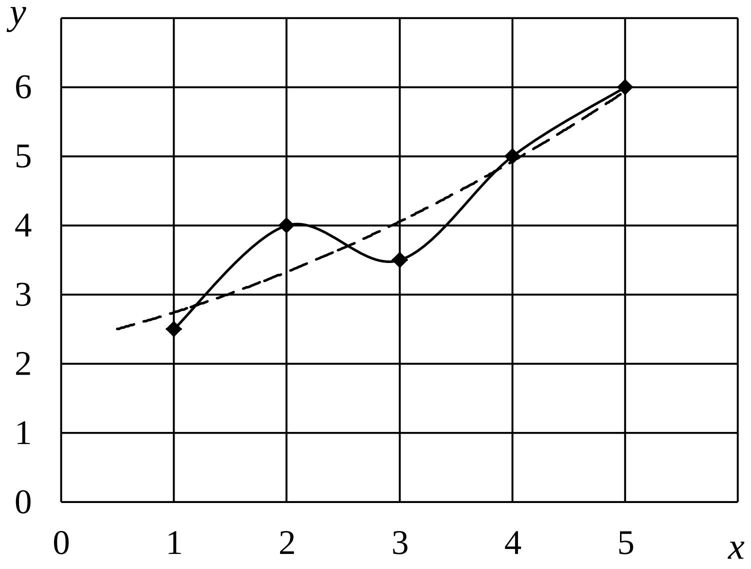
Подставив в формулу полученного полинома значение *T*=90°С, найдем значение плотности ρ=965,29 кг/м^3.

2. Аппроксимация функций

Аппроксимация – замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным.

При интерполировании интерполирующая функция строго проходит через узловые точки таблицы вследствие того, что количество коэффициентов в интерполирующей функции равно количеству табличных значений.

Аппроксимация – метод приближения, при котором для нахождения дополнительных значений, отличных от табличных данных, приближенная функция проходит не через узлы интерполяции, а между ними (рис. 4).



— – интерполирующая функция
- - - – аппроксимирующая функция

Рис. 4. Вид интерполирующей
и аппроксимирующей функций

Если аналитическое выражение функции, описывающей закон изменение y_i (i=1, 2, …, n) неизвестно или весьма сложно, то возникает задача найти такую эмпирическую формулу

$$f = y(x),$$

значения которой при x=x_i мало отличались бы от опытных данных.

Геометрически задача построения функции $f(x)$ по эмпирической формуле состоит в проведении усредненной кривой – кривой, проходящей через середину области значений (табл. 8) (рис. 5).

Таблица 8

Экспериментальные данные

x	1	2	3	4	5
y	2,5	4	3,5	5	5,5

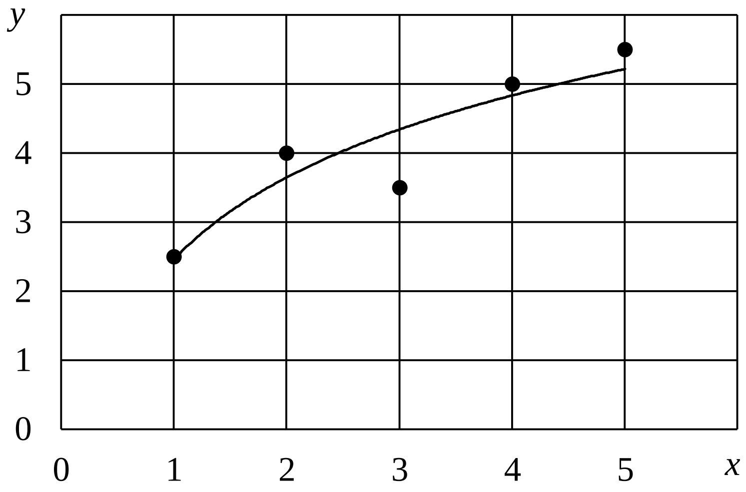


Рис. 5. Пример аппроксимирующей функции

Интерполяцией данные описываются более точно, чем при аппроксимации, но в ряде случаев обосновано применение аппроксимации:

- при значительном количестве табличных данных (интерполирующая функция становится громоздкой);
- интерполирующей функцией невозможно описать данные при повторении эксперимента в одних тех же начальных условиях (требуется статистическая обработка;
- для сглаживания погрешностей эксперимента. Данные x_i и y_i обычно содержат ошибки, поэтому интерполяционная формула повторяет эти ошибки. Из рисунка (рис. 6) видно, что значения y постоянно и равномерно увеличивается при росте x, а разброс данных относительно аппроксимирующей функции можно объяснить погрешностью эксперимента.

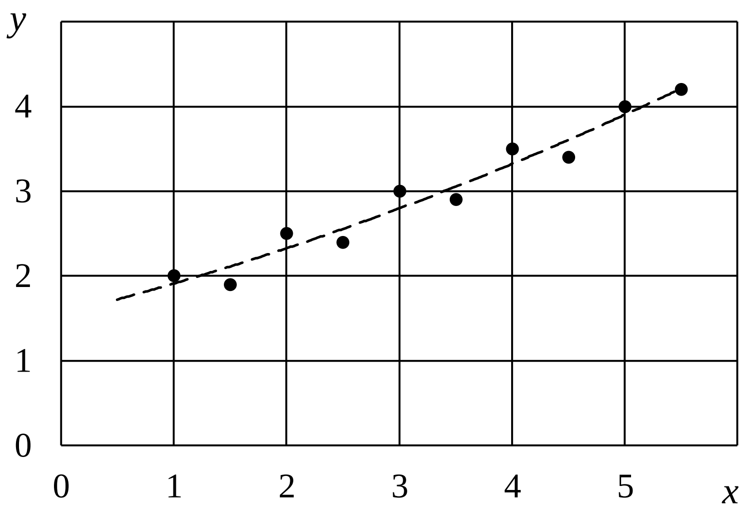


Рис. 6. Пример построения аппроксимирующей функции

При построении аппроксимирующей зависимости определяют:

- аналитический характер эмпирической формулы. Предпочтение отдается простым формулам, обладающим хорошей точностью;

- наилучшие параметры эмпирической зависимости.

Существует несколько методов аппроксимации, рассмотрим некоторые из них.

2.1. Метод наименьших квадратов

Суть метода наименьших квадратов заключается в нахождении таких значений x_i, при которых сумма квадратов отклонений (ошибок) $e_i=y_i - f_i(x)$ будет стремиться к минимуму

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \to \min_x . \quad (9)$$

Т.к. каждое значение x_i в общем случае «сопровождается» соответствующим коэффициентом a_i (i = 0, 1, 2, …, n), то задача сводится к нахождению данных коэффициентов. Введем обозначение функции

$$F(a_0,\ a_1,\ ...,a_n) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2. \quad (10)$$

Тогда, на основе обращения в точке минимума функции F в нуль ее производных, для определения вышеупомянутых коэффициентов составляется нормальная система:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{da_0} = 0; \\ \dfrac{dF}{da_1} = 0; \\ ... \\ \dfrac{dF}{da_n} = 0. \end{cases}$$

Существенным недостатком метода является громоздкость вычислений, вследствие чего к нему прибегают при достаточно точных экспериментальных данных при необходимости получения очень точных значений функции.

2.2. Линейная аппроксимация

В ряде экспериментов данные распределяются таким образом, что оказывается возможным описать их изменение линейной зависимостью (линейным уравнением) (рис. 7)

$$P(x)=a \cdot x+b. \quad (11)$$

Формулы для расчета коэффициентов a и b определяются по методу наименьших квадратов (9), подставив (11) в (10)

$$F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b)^2 \to \min . \quad (12)$$

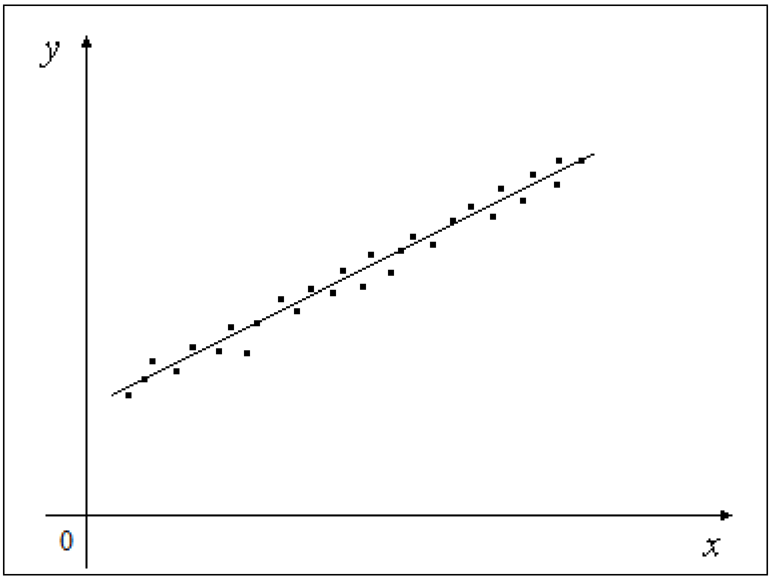


Рис. 7. Линейная аппроксимация

Для решения (12) составляется система из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{da} = 0; \\ \dfrac{dF}{db} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Подставляя в (13) формулу (12), получаем

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{db} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b) \cdot 1 = 0, \\ \dfrac{dF}{da} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b) \cdot x_i = 0. \end{cases} \tag{14}$$

и

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}, \tag{15}$$

Решая полученную систему (15) методом подстановки, получаем формулы для нахождения коэффициентов a и b:

$$a = \frac{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2}, \tag{16}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \qquad (17)$$

Пример

Дана табличная зависимость мощности N токарно-винторезных станков от максимального диаметра обрабатываемой заготовки d, устанавливаемой над станиной, для десяти моделей (табл. 9).

Таблица 9

Значения максимального диаметра заготовки, устанавливаемой над станиной, и мощности токарно-винторезных станков

Модель станка	250ИТВМ.03	КА280	1В62Г	16К250	1М63	16К40	1Н65	СА650	1А660	1А670
d, мм	240	400	445	500	630	800	1000	1080	1250	2000
N, кВТ	3	7,5	8,37	11	15	18,5	22	22	30	55

Требуется найти мощность проектируемого токарно-винторезного станка для обработки заготовки максимального диаметра 700 мм.

Построим область значений распределения данных (рис. 8).

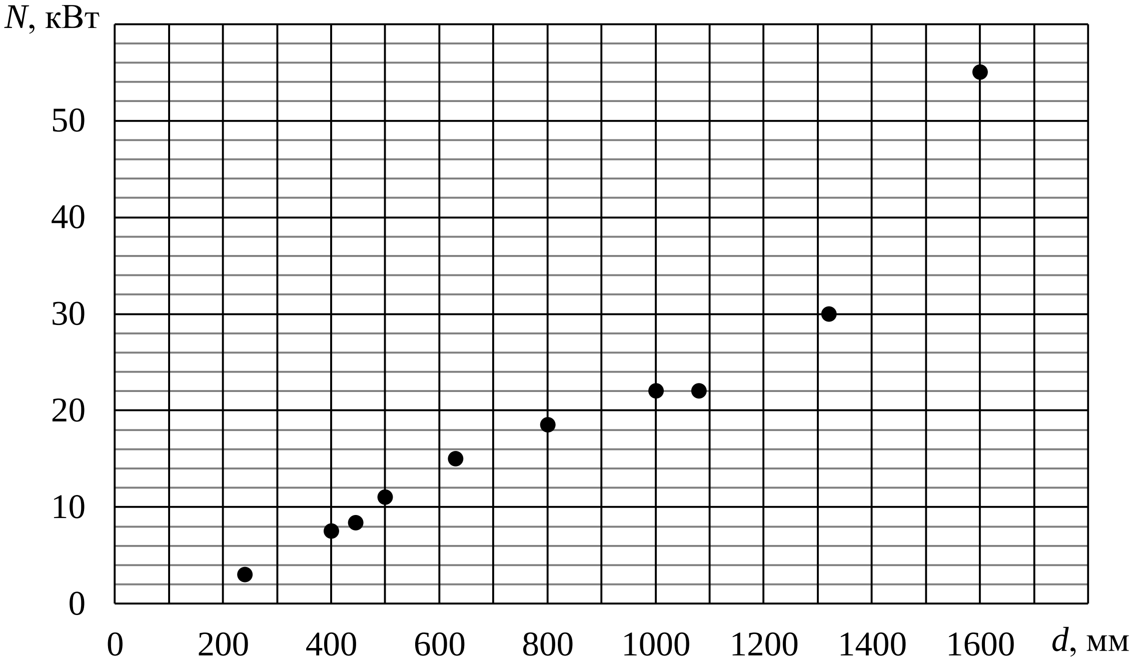


Рис. 8. Область распределения табличных данных (табл. 9)

Анализ диаграммы (рис. 8) позволяет сделать вывод, что изменение табличных данных можно с достаточной степенью точности описать уравнением прямой (11). В связи с этим, для нахождения эмпирической зависимости, описывающей изменение данных, можно воспользоваться методом линейной аппроксимации.

Для удобства перепишем вышеприведенные формулы (16, 17):

$$a = \frac{10 \cdot \sum_{i=1}^{10}(d_i \cdot N_i) - \sum_{i=1}^{10} d_i \cdot \sum_{i=1}^{10} N_i}{10 \cdot \sum_{i=1}^{10} d_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{10} d_i\right)^2}, \; b = \frac{\sum_{i=1}^{10} N_i - a\sum_{i=1}^{10} d_i}{10}.$$

Проведем расчеты и решим задачу, проиллюстрировав решение графически.

Значения коэффициентов:

$$a=0{,}032,\; b= -6{,}62.$$

Уравнение прямой для данного примера примет вид

$$N(d)=0{,}032 \cdot d - 6{,}62.$$

Подставив в последнее выражение значение диаметра 700 мм, получим значение мощности проектируемого станка – N=15,78 кВт.

Проведя аппроксимирующую функцию (прямую), можно убедиться в правильности решения (рис. 9).

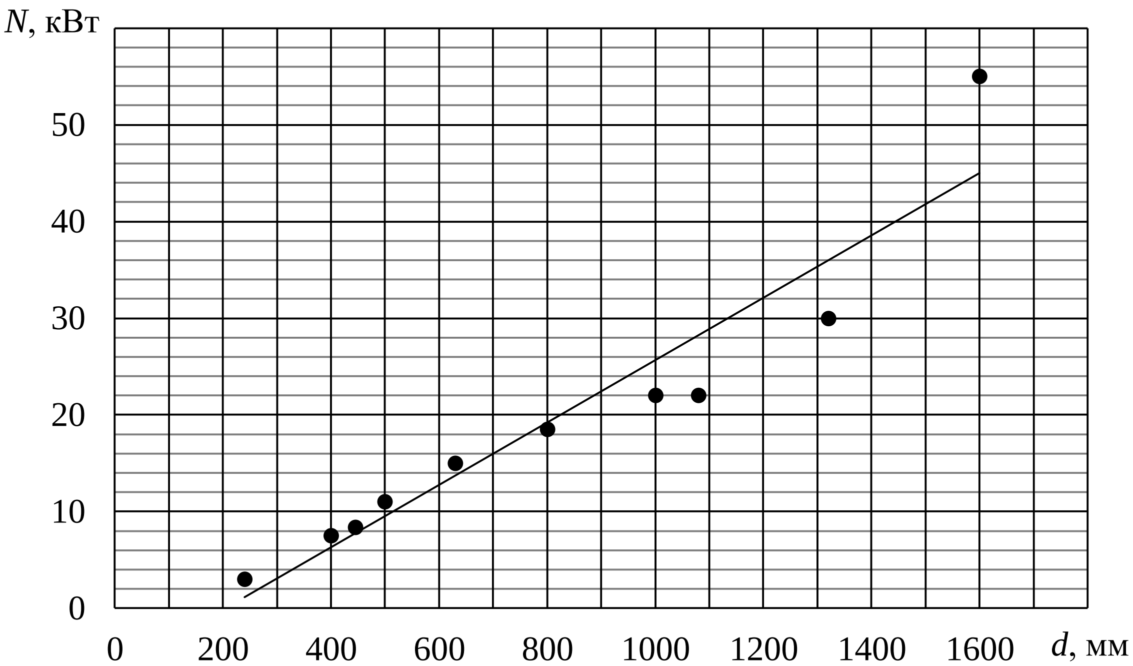


Рис. 9. Диаграмма, построенная средствами Microsoft Office Excel

Из диаграммы видно, что при значении диаметра заготовки 700 мм, мощность станка ориентировочно составит 16 к Вт.

2.3. Параболическая аппроксимация

Если линейным полиномом не удается точно точности аппроксимировать экспериментальные данные, применяют нелинейную аппроксимацию – аппроксимацию второго и большего порядков. Аппроксимация второго порядка (параболическая) опишется многочленом

$$P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2. \tag{18}$$

Коэффициенты a_i определятся по методу наименьших квадратов

$$F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2)^2 \to \min_x . \tag{19}$$

Составляем систему уравнений, приравняв частные производные нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{da_0} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2) \cdot 1 = 0; \\ \dfrac{dF}{da_1} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2) \cdot x_i = 0; \\ \dfrac{dF}{da_2} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot x_i^2) \cdot x_i^2 = 0. \end{cases}$$

После преобразований получим систему линейных уравнений с тремя неизвестными (a_0, a_1, a_2):

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i-1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i), \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^2 \cdot y_i). \end{cases} \tag{20}$$

Введем обозначения:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i\,;\; S_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,;\; S_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3\,;\; S_4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^4\,,$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{n} y_i\,; S_6 = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)\,;\; S_7 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \cdot y_i)\,.$$

С учетом принятых обозначений система (20) примет вид:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_2 = S_5, \\ a_0 \cdot S_1 + a_1 \cdot S_2 + a_2 \cdot S_3 = S_6, \\ a_0 \cdot S_2 + a_1 \cdot S_3 + a_2 \cdot S_4 = S_7. \end{cases}$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 найдутся методом Крамера, согласно которому:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta},\ a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix};\ \Delta_0 = \begin{vmatrix} S_5 & S_1 & S_2 \\ S_6 & S_2 & S_3 \\ S_7 & S_3 & S_4 \end{vmatrix},\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} n & S_5 & S_2 \\ S_1 & S_6 & S_3 \\ S_2 & S_7 & S_4 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} n & S_1 & S_5 \\ S_1 & S_2 & S_6 \\ S_2 & S_3 & S_7 \end{vmatrix}.$$

4.2.4. Аппроксимация в виде показательной функции

При обработке данных эксперимента в некоторых случаях возникает необходимость воспользоваться зависимостью вида

$$y = b \cdot e^{a \cdot x}, \tag{21}$$

где a, b – неизвестные коэффициенты.

Прологарифмировав уравнение (15), получим

$$\ln(y) = \ln(b) + a \cdot x.$$

Введя обозначения:

$$Y=\ln(y),\ B=\ln(b),\ A=a,$$

получим линейный многочлен первой степени

$$Y=B+A\cdot x.$$

Далее уравнение решается по методу наименьших квадратов

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \left(B + A \cdot x_i\right)\right)^2 \to \min_x .$$

Формулы для вычисления коэффициентов A и B аналогичны как для случая линейной аппроксимации (16, 17):

$$A = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot Y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},\ B = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - A\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

После определения коэффициентов вернемся к принятым ранее обозначениям:

$$a = e^A,\ b=B,\ y_i = e^{Y_i}.$$

2.5. Аппроксимация в виде степенной функции

Степенная функция имеет вид

$$y = b \cdot x^a. \tag{22}$$

Логарифмируя последнее уравнение, получим

$$\lg(y) = \lg(b) + a \cdot \lg(x).$$

Введем обозначения:

$$Y = \lg(y),\ B = \lg(b);\ A = a;\ X = \lg(x).$$

Используя метод наименьших квадратов, найдем неизвестные коэффициенты B и A:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \left(B + A \cdot X_i\right)\right)^2 \to \min_x .$$

Формулы для вычисления коэффициентов A и B аналогичны как для случая линейной аппроксимации (12, 13):

$$A = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i \cdot Y_i) - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2},\ B = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - A \sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

После определения коэффициентов вернемся к принятым ранее обозначениям:

$b = 10^B,\ a = A,\ y_i = 10^{Y_i},\ x_i = 10^{X_i}$.