ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЮРГИНСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А.В. Маслов

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Издательство
Томского политехнического университета
2008

ББК 22.176я73
УДК 519.1(075)
М 31

Маслов А.В.

М 31 Дискретная математика: учебное пособие / А.В. Маслов – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 148 с.

В пособии изложены основные разделы дискретной математики, такие как теория множеств, булева алгебра, теория графов. Приведены примеры и упражнения, снабженные кодами информационно-дидактической системы СИМВОЛ. Благодаря кодам возможна самостоятельная работа над пособием в режиме автоматизированного самоконтроля в системах дистанционного образования. Предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки дипломированных специалистов 080502 «Экономика и управление на предприятии (в машиностроении)», 080507 «Менеджмент организации», 080801 «Прикладная информатика (в экономике)», а также студентами других экономических и гуманитарных направлений и специальностей.

УДК 519.1(075)

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой физики и химии ТСХИ НГАУ
В.Н. Беломестных

Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры естественнонаучного образования ЮТИ ТПУ
Е.П. Теслева

ВВЕДЕНИЕ

Что такое дискретная математика? Какими признаками характеризуются входящие в нее разделы? Хотя в целом границы, в пределах которых можно говорить о дискретной математике, в значительной степени являются условными, все же можно указать признак, позволяющий достаточно четко разделить всю современную математику на две составляющие. Суть этого признака заключена в самом названии «дискретная математика» (в [47] используется также термин «конечная математика»), где дискретность выступает как противоположность непрерывности, обозначающая отсутствие понятия предельного перехода. С этой точки зрения под общее название «дискретная математика» попадают такие разделы, как математическая логика, теория конечных множеств, теория дискретных автоматов, теория графов и сетей, комбинаторика, векторная и матричная алгебры, теория формальных грамматик, теория чисел, теория конечных групп, колец и полей, теория алгебраических систем и многие другие. С позиций «чистой» математики все эти разделы имеют одинаково важное значение. С прикладной же точки зрения не все разделы одинаково важны. Это обстоятельство накладывает определенные ограничения на подбор материала для пособия, чтобы не слишком обременять студентов избыточной информацией, особенно на начальном этапе знакомства с дискретной математикой.

Данное пособие предназначено не для математиков, оно ориентировано на студентов, обучающихся в технических вузах и техникумах, в учебных программах которых предусмотрены предметы, связанные с информатикой и вычислительной техникой. В связи с этим в пособие включены разделы дискретной математики, имеющие прямое отношение к вычислительной технике и информатике: теория множеств (вводно-ознакомительный курс), булева алгебра логики и теория графов. Эти разделы в значительной степени носят общеобразовательный характер и составляют минимум, обязательный для каждого, кто впервые приступает к изучению курса основ дискретной математики с ориентацией на применение полученных сведений в своей практической деятельности.

Наибольшее внимание в пособии уделено булевой алгебре логики из-за ее многочисленных приложений, особенно в области анализа и синтеза технических устройств дискретного действия, а также в информатике. И вообще этот раздел является основополагающим во всей дискретной математике. Даже в университетских курсах с явно выраженным теоретическим уклоном булевым функциям принадлежит ведущая роль. Например, в МГУ алгебре логики уделяется четверть всего учебного времени, отводимого на изучение дискретной математики [12, с. 5].

Необходимо отметить, что в литературе наряду с термином «булева алгебра логики» используются и синонимы, такие, как алгебра Буля [16; 17; 28], алгебра логики [7; 28; 61], алгебра событий [14], алгебра кнопок [28], алгебра исчисления высказываний [l], алгебра высказываний [24, 28], логика высказываний [16, 46], исчисление высказываний [7], пропозициональная логика [28], булева алгебра [18, с. 8; 52; 61, с. 75; 62, с. 542, 575], математическая логика [15], бинарная булева алгебра [24], алгебра релейных цепей [26] и др. Не все эти термины являются полными синонимами (полные синонимы – вообще большая редкость), однако с прикладной точки зрения различия между ними несущественны, поэтому практически любой из них можно взять за основу. В данном курсе дискретной математики принят термин «булева алгебра». Другие же авторы часто употребляют словосочетание «алгебра логики». Это можно объяснить тем, что с точки зрения «чистой» математики булевых алгебр, в наиболее общем случае определяемых как частично упорядоченные множества специального типа [28, с. 74], существует много, и их интерпретация в виде алгебраической системы высказываний является лишь частным случаем. Но, несмотря на это, будем использовать термин «булева алгебра» хотя бы для того, чтобы во имя исторической справедливости не забывать, с чьим именем связан важнейший раздел математической логики, который по возможностям его практического применения не имеет себе равных среди других булевых алгебр.

Названия всех остальных разделов дискретной математики являются достаточно устоявшимися, однако в самих разделах наблюдается значительный разнобой и в терминологии, и в определениях, и в обозначениях математических операций. В данном пособии из всего этого многообразия используются лишь основные термины и обозначения, определяемые главным образом по степени их упоминания в литературе либо по удобству применения. Например, для обозначения дизъюнкции большое распространение получил знак «$\vee$», однако практически гораздо удобнее использовать знак арифметического сложения. Что касается других обозначений и терминов, применяемых различными авторами, то они в пособии упоминаются, но не используются.

ТЕМА 1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1. Алгебра множеств

Теория множеств в данном пособии представлена тремя темами (разделами). Это алгебра множеств, бинарные отношения и элементы теории нечётких множеств. Каждая из трёх тем разделена на подразделы. В конце подразделов приведены упражнения. Выполнять их рекомендуется все. Наилучшие результаты обеспечиваются с применением устройств СИМВОЛ (либо их компьютерных аналогов), оценивающих каждый ответ в системе «правильно–неправильно», поскольку при этом всякие подсказки исключены и учащийся каждое упражнение выполняет с максимальной самостоятельностью, обращаясь к преподавателю лишь в крайнем случае, когда устройство все ответы к тому или иному упражнению признает неправильными.

При самоконтроле с применением устройства СИМВОЛ необходимо пользоваться следующей инструкцией:

1) включить устройство, нажать кнопку СБРОС;

2) посимвольно набрать код задания. Он указан в круглых скобках перед условием упражнения;

3) посимвольно набрать ответ;

4) нажать кнопку КОНТРОЛЬ. Если загорится индикатор ПРАВИЛЬНО, ответ признаётся верным. Если же загорится индикатор НЕПРАВИЛЬНО, ответ является неверным.

Кроме того, необходимо учитывать следующие требования:

1) если ответ состоит из нескольких чисел (или букв), то при их вводе в устройство никакие знаки, отделяющие одно число от другого, не используются (ни запятые, ни точки, ни точки с запятой). Например:

(ЕК2) Укажите элементы множества $A=\{x \ / \ 7 \leq x < 15,\ x$ – простое число$\}$.

Ответом является последовательность чисел 7, 11, 13. В устройство вводим: ЕК271113, где ЕК2 – код задания, 71113 – ответ. Числа, образующие ответ, вводятся всегда в порядке возрастания, без использования запятых (а в случае букв – в алфавитном порядке);

2) в некоторых упражнениях ответ представляет собой формулу. Например:

Упростить выражения:
(АНО) $A \cap B \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \ldots$
(УМП) $B \cap C \cup A \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C = \ldots$

В первом упражнении ответ имеет вид $A \cap \overline{C}$, во втором – $A \cup C$. (Здесь и в дальнейшем упрощение осуществляется до предела). В обоих случаях ответы набираются посимвольно за исключением того, что знак пересечения не вводится. При самоконтроле по первому упражнению набираем: АНО *A*-*C*, где АНО – код задания, *A*-*C* – ответ. Черточка перед буквой *C* обозначает знак дополнения. Он набирается перед соответствующей буквой.

При самоконтроле по второму упражнению в устройство вводим: УМП$A \cup C$, где УМП – код задания, $A \cup C$ – ответ, набираемый в латинском алфавите. Буквы, входящие в формулы, вводятся в алфавитном порядке, а между ними набирается знак объединения;

3) в некоторых упражнениях после кода задания стоит знак «!» (восклицательный). Он напоминает о том, что под одним кодом задания представлено более одного вопроса и что при самоконтроле сначала вводится код задания, а затем – ответы на все вопросы по порядку их следования. При этом ни запятые, ни точки, ни точки с запятой не используются. Кнопку КОНТРОЛЬ можно нажимать только после ввода всех ответов на вопросы задания. Если загорится индикатор НЕПРАВИЛЬНО, то это значит, что среди ответов есть, по меньшей мере, одна ошибка. Где находится эта ошибка, устройство не сообщает. Рассмотрим пример:

(ЯКИ)! Найдите число элементов булеана множества $A=\{a, b, c, d, e, f\}$, число несобственных подмножеств множества *A* и число двухэлементных подмножеств множества *A*.

Здесь под одним кодом представлено три вопроса, ответы к которым имеют вид: 64 – на первый вопрос, 2 – на второй и 15 – на третий. При самоконтроле в устройство вводим ЯКИ64215, где ЯКИ – код задания, 64215 – ответы на все три вопроса;

4) ответами могут быть одно или несколько чисел в виде десятичных дробей. Все такие ответы набираются посимвольно с использованием запятой, отделяющей целую часть числа от дробной, но между числами никакие разделительные знаки не ставятся. Например:

(ПАФ) Укажите степени принадлежности каждого элемента нечеткого множества $\tilde{A}$, если

$$\tilde{A}=\{(0{,}45/2),\ (0{,}9/3)\}$$

и если базовое множество имеет вид $M=\{1, 2, 3\}$.

Ответом являются числа: 1; 0,55; 0,1. В устройство вводим: ПАФ 10, 550, 1, где ПАФ – код задания, все остальное – ответ.

5) в конце условий некоторых упражнений стоит пометка (Лат.). Она напоминает о том, что ответ необходимо вводить в латинском алфавите.

Вышеприведенные пять требований, которые необходимо соблюдать при вводе ответов в устройство СИМВОЛ, являются основными. Все остальные достаточно просты, понятны из условий упражнений, поэтому здесь не рассматриваются.

1.1.1. Множества

Основные положения теории множеств впервые были разработаны чешским философом, математиком и логиком, профессором теологии (г. Прага) Бернардом Больцано (1781–1848), немецким математиком Рихардом Дедекиндом (1831–1916) и немецким математиком, философом–идеалистом, профессором (с 1872 г.) Галльского университета Георгом Кантором (1845-1918). Г. Кантор внес в теорию множеств (особенно бесконечных) наибольший вклад, поэтому теория множеств тесно связана с его именем. Официально теория множеств была признана в 1897 г., когда Ж. Адамар (1865–1963) и Гурвиц на Первом международном конгрессе математиков в 1897 г. в своих докладах привели многочисленные примеры применения канторовской теории множеств в различных разделах математики [16, с. 46].

Понятию множества невозможно дать точное определение, поскольку оно является первичным, предельно широким по содержанию. Его можно лишь пояснить. О том, какой смысл вкладывал в это понятие сам Георг Кантор, можно получить представление из следующих цитат, авторы которых ссылаются на Г. Кантора:

«Под *множеством* понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью» [16, с. 6].

«Под *множеством S* будем понимать любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое» [35, с. 5].

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое целое» [11] и т.д.

Теория множеств – это раздел математики, в котором изучаются общие свойства конечных и бесконечных (в основном бесконечных) множеств.

Главным в теории множеств является вопрос о том, как определить множество, т. е. указать способ, при помощи которого можно было бы однозначно установить, принадлежит ли данный объект заданному множеству или не принадлежит.

Объекты, из которых состоят множества, называются их элементами. Принадлежность элемента a множеству P записывают так:

$$a \in P.$$

Читается запись следующим образом: «a есть элемент множества P », либо «a является элементом множества P », либо «элемент a принадлежит множеству P ».

При необходимости указать несколько элементов, принадлежащих множеству P, все их перечисляют перед знаком $\in$. Например, запись $a, b, c \in P$ говорит о том, что:

$$a \in P \text{ и } b \in P \text{ и } c \in P.$$

Если же элемент a не принадлежит множеству P, то пишут:

$$a \notin P.$$

Если множеству P не принадлежит несколько элементов, например, a, b, c, то записывают:

$$a, b, c \notin P.$$

Множество может содержать любое число элементов, конечное и бесконечное. Множество может содержать один элемент и ни одного. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается символом $\varnothing$. Множество, содержащее один элемент, называется синглетоном [28, с. 542] (от англ. *single* – одиночный).

Задавать множества можно двумя основными способами:

а) путем прямого перечисления его элементов. При этом перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки и отделяются один от другого запятыми. Например, запись

$$P=\{a, b, c, d\}$$

говорит о том, что множество P состоит из четырех элементов a, b, c, d;

б) при помощи специально сформулированного правила, или свойства, в соответствии с которым всякий объект либо входит в множество, либо не входит (интуитивный принцип абстракции [35, с. 6]. В

[35] такое правило называет формой $P(x)$. Множество, задаваемое формой $P(x)$, имеет вид $A=\{x \mid P(x)\}$. Например, множество десятичных цифр можно записать следующим образом:

$$P=\{ x / 0 \le x \le 9 \wedge x – \text{целое число}\},$$

где слева от наклонной черты указана переменная x, а справа – правило (форма $P(x)$, согласно [35]), указывающее, какие значения x образуют элементы, принадлежащие множеству P, и какие не образуют. Читается запись так: «множество P – это все те значения x, которые больше нуля или равны ему, но меньше или равны девяти и являются целыми числами». Знак $\wedge$ обозначает союз *И*. Вместо него можно ставить знак &, который также обозначает союз *И*.

$$P=\{ x / 0 \le x \le 9 \ \& \ x – \text{целое число}\}. \qquad (1)$$

Допускается и такая запись, где вместо логических знаков $\wedge$ и & ставится запятая, либо точка с запятой:

$$P=\{ x / 0 \le x \le 9, x – \text{целое число}\}.$$

При этом необходимо помнить, что запятая, а также точка с запятой, выполняют роль союза *И*.

Буква x в записи множества сама по себе не является элементом множества P. Она представляет собой переменную величину, которая может принимать различные значения из некоторой области. В случае выражения (1) вместо x можно подставлять любые числа. Но из них в множество P войдут лишь десять чисел: 0, 1, 2, ..., 9. Значение $x=10$ в множество P не входит, поскольку оно не удовлетворяет свойству $x \le 9$. Не войдет в множество P и число 3,5, так как в P могут входить лишь целые числа.

Множества являются равными, если они состоят из одних и тех же элементов (интуитивный принцип объемности [35, с.5]). Например:

$$\{a, b, c, d\}=\{b, c, a, d\}.$$

Элементы этих множеств записаны в различных последовательностях, но наборы элементов совпадают, поэтому множества равны, так как порядок записи элементов, образующих множество, не имеет значения.

Равными могут быть также множества, заданные различными способами. Например:

$$P=\{x / 0<x<10, x – \text{простое число}\},$$

$$Q=\{2, 3, 5, 7\}.$$

Здесь множество P образуют все значения x, меньшие 10 и входящие в множество простых чисел. Это – 2, 3, 5, 7. Множество Q образуют те же простые числа, указанные прямым перечислением. Следовательно,

P=Q.

В некоторых случаях, когда множества задаются прямым перечислением, для того чтобы выяснить, равны ли множества, необходимо уточнять понятие равенства элементов. Например: являются ли равными множества:

$$P=\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\};$$
$$Q=\{\sqrt{1},\sqrt{16},\sqrt{81},\sqrt{256}\}?$$

Эти множества не равны, поскольку по форме представления их элементы не совпадают. Но эти множества будут равными, если считать, что их элементы представляют собой натуральные десятичные числа, заданные с использованием математических операций. Достаточно выполнить эти операции и мы в обоих случаях получим: {1, 4, 9, 16}, откуда и следует, что P=Q.

Для обозначения множеств в общем случае можно использовать любые знаки, но в основном их обозначают прописными буквами латинского алфавита.

Всякое множество характеризуется величиной, которую называют (по Г. Кантору) кардинальным числом, показывающим, сколько элементов содержит множество. Для обозначения числа элементов множества часто используют две вертикальные черты, между которыми записывается само множество или его обозначение.

Например, если $P=\{a, b, c\}$, то его кардинальное число равно:

$$|P|=|\{a, b, c\}|=3.$$

Для записи числа элементов множества A используют и другие обозначения. Например, в [22, с. 11] читаем: «Будем обозначать через $N(A)$ количество элементов множества A».

Завершим данный подраздел замечанием о повторяемости элементов в множестве. Могут ли в множество входить одни и те же элементы более одного раза? Нет, не могут. Все элементы множества должны отличаться один от другого, поэтому каждый элемент может входить в множество только один раз. Тогда возникает вопрос, можно ли считать множеством, например, следующее:

$$P=\{1, 1, 2\}?$$

Это множество, но состоящее не из трех элементов, а только из двух, т.е.

$$P=\{1, 1, 2\}=\{1, 2\}$$

и его кардинальное число равно двум. Таким образом, в записи множества некоторые элементы в принципе могут быть указаны многократно, но учитываться они должны только по одному разу.

В тех случаях, когда требуется показать, что те или иные элементы входят в множество неоднократно, следует применять термин «семейство» и вместо фигурных скобок использовать круглые скобки (в [16, с. 228] для этих целей используется термин «комплект»).

Упражнения

1. (ВХМ) Пусть A – множество простых чисел.

Укажите номера верных записей: 1) $1\in A$, 2) $2\in A$, 3) $0\in A$, 4) $19\in A$, 5) $23\in A$.

2. (ШИВ)! Сколько элементов в следующих множествах?

а) $\{a, b, c, aa, bc\}$; г) $\{111, 22, 2, 33\}$;

b) $\{a. b, c, a, b. c\}$; д) $\{11, 22, 11, 12\}$;

в) $\{1, 2, 3, 123, 12\}$; е) $\{1, 11, 111, 1\}$.

3. (ТИ.ШК) Известно, что a, b, $c\in Q$. Кроме того, известно, что 1, 5, $7\in Q$. Других элементов в множестве Q нет. Перечислите все элементы множества Q.

4. (Ш6.Ш6) Укажите все элементы множества, составленного из букв слова ЭЛЕМЕНТ.

5. (30.56) Укажите все элементы множества, составленного из всех цифр десятичного числа 1274327.

6. (ВР8) Укажите пустые множества.

(ЕГО) Укажите синглетоны:

а) $\{x \,/\, x\geq 1 \wedge x\leq 0\}$; г) $\{x \,/\, x>2 \wedge x=5\}$;

б) $\{x \,/\, x>0 \wedge x=0\}$; д) $\{x \,/\, x<0 \wedge x=1\}$;

в) $\{\varnothing\}$; е) $\{x \,/\, x\geq 0 \wedge x=1\}$.

7. (ВЗН) Укажите пустые множества.

(25П) Укажите синглетоны:

а) $B=\varnothing$;

б) $B=\{x \,/\, x=n^2+2n-(n+1)^2+1$, n – целое число$\}$;

в) $B=\{x \,/\, x=(n^2-2n+1)/(n-1)^2$, n – целое число, $n > 1$, $1\notin B\}$;

г) $B=\{\varnothing\}$;

д) $B=\{0\}$;

е) $B=\{x \,/\, x=2n+1 \wedge x$ – четное число, n – целое число$\}$.

8. (РУС)! Найдите кардинальные числа всех множеств, указанных в предыдущем упражнении.

9. Найдите кардинальные числа множеств.

(021) $P=\{x \,/\, x < 10$, x – натуральное число$\}$.

(ЭШУ)! $P=\varnothing$; $P=\{0, \varnothing\}$; $P=\{\varnothing,\{\varnothing\},0\}$.

(8Д4) $P=\{x \,/\, x$ – целое число (положительное, или отрицательное, или нуль), $|x| < 8$}.

10. Укажите элементы множеств.

(АК.5К) $P=\{x \,/\, x\in \{a, b, c\}\}$.

(68.56) $P=\{x \,/\, x > 4 \wedge x\in \{3, 4, 5, 7, 8\}\}$.

(ЦУ.56) P={x / x – натуральное число, $x \leq 3$}.

11. (УЖИ) Укажите верные равенства:

а) $\{\{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$;

б) $\{1,2,3\}=\{\{1,2\},\{3\}\}$;

в) {0}={x / x – целое неотрицательное число $\wedge$ x – ненатуральное число};

г) {1, 2, 3, 5, 7}={$x\in A$ / $x < 10 \wedge A$ – множество простых чисел};

д) {0, 2, 4, 6, 8}={x / $x < 9$, x – неотрицательное четное число};

е) {2, 4}={x / x – решение уравнения x^2-6x+8=0}.

12. (МО.ШК) Укажите элементы множества

P={x / x – название месяца, начинающееся с буквы M}.

13. (ЦВК) Укажите множества, равные множеству {2, 4, 6, 8};

а) P={x / x=2n, n – натуральное число $\wedge$ $n < 5$};

б) P={x / x=2n, n – неотрицательное целое число $\wedge$ $n < 5$};

в) P={x / x=2n+2, n – неотрицательное целое число $\wedge$ $n < 5$};

г) P={x / x=2(n+1), n – неотрицательное целое число $\wedge$ $n \leq 3$};

д) P={x / x=2n+2, n – натуральное число $\wedge$ $n < 5$};

е) P={x / x=2n+2, n – неотрицательное целое число $\wedge$ $n < 4$}.

14. (580) Укажите множества с кардинальным числом 5:

а) Q={x / x – целое число $\wedge$ $|x| \leq 2$};

б) Q={x / x – целое неотрицательное число $\wedge$ $x < 6$};

в) Q={x / x=3n, n – целое число $\wedge$ $|n| < 3$};

г) Q={x / $x=n^2$, n – целое неотрицательное число $\wedge$ $n \leq 4$};

д) Q={x / $x=n^2$, n – натуральное число $\wedge$ $n \leq 4$};

е) Q={x / $x=n^3$-1, n – натуральное число $\wedge$ $6 \leq n \leq 10$};

ж) Q={x / $x=n^2$, n – целое число $\wedge$ $|n| \leq 3$}.

1.1.2. Подмножества

Множество B является подмножеством множества A, если все элементы множества B принадлежат множеству A:

$$B\subseteq A,$$

где символ $\subseteq$ обозначает знак включения. Запись $B\subseteq A$ читается так: «множество B включено в множество A, причем множество A является подмножеством самого себя».

Возможна и такая запись: $B \subset A$. Эта запись говорит о том, что все элементы множества B входят в множество A, но само множество A не является своим подмножеством. (Некоторые авторы не различают знаки $\subseteq$ и $\subset$. Например, в [16, с. 6] используется только знак $\subset$ независимо от того, является ли множество своим подмножеством или не является).

Выясним, сколько всего существует подмножеств данного множества. Запишем элементы заданного множества P в каком-либо порядке, и каждому элементу поставим в соответствие двоичный разряд. Пусть 0 (нуль) обозначает, что соответствующий элемент отсутствует в подмножестве, а 1 – что этот элемент входит в подмножество. Тогда каждому $|P|$-разрядному двоичному числу будет соответствовать определенное подмножество. Известно, что всего существует $2^{|P|}$ $|P|$-разрядных двоичных чисел, следовательно, число всех подмножеств также равно $2^{|P|}$. Проиллюстрируем это на примере множества $P=\{a, b, c\}$.

В таблице 1 указаны элементы a, b, c, а под каждым элементом записаны двоичные цифры. В левой колонке приведены десятичные эквиваленты двоичных трехразрядных чисел. В правой части таблицы перечислены сами подмножества. В верхней строке под элементами a, b, c записаны нули. Это значит, что в подмножество с нулевым номером не входит ни один элемент множества P. Следовательно, получаем пустое подмножество.

Таблица 1

Подмножества множества $P=\{a, b, c\}$

№	$a\ b\ c$	Подмножества	
0	000	$\varnothing$	Несобственное подмножество
1	001	$\{c\}$	Собственные подмножества
2	010	$\{b\}$	
3	011	$\{b, c\}$	
4	100	$\{a\}$	
5	101	$\{a, c\}$	
6	110	$\{a, b\}$	
7	111	$\{a, b, c\}$	Несобственное подмножество

Заметим, что при табличном представлении подмножеств в таблице всегда будет присутствовать строка с номером 0 (нуль), которой соответствует $|P|$-разрядное двоичное число, состоящее из $|P|$ нулей. Следовательно, пустое множество является подмножеством любого множества.

В строке с номером 1 под элементом c записана единица. Это значит, что в подмножество с номером 1 входит элемент c, и подмножество имеет вид $\{c\}$. В строке с номером 2 единица соответствует элементу b, следовательно, подмножество номер 2 состоит из одного элемента b: $\{b\}$, и т. д. до последней строки, где нет нулей, что соответствует случаю, когда в подмножество входят все элементы множества P. Такое подмножество совпадает с множеством P.

Таким образом, рассмотренный прием позволяет не только найти все подмножества, но и пронумеровать их.

Подмножества бывают двух видов: собственные и несобственные. Само множество P и пустое множество $\varnothing$ образуют несобственные подмножества. Все остальные подмножества являются собственными. Следовательно, всякое непустое множество P содержит два несобственных подмножества и $2^{|P|}$ -2 собственных подмножеств. Согласно таблице 1 несобственные подмножества имеют вид $\varnothing$ и $\{a, b, c\}$, остальные шесть подмножеств являются собственными. (Американский логик и математик Стефан Коул Клини (род. в 1909 г.) множество P называет неистинным подмножеством множества P, а все остальные подмножества – истинными [28, с. 449]).

Множество всех подмножеств множества P называют булеаном множества P [16, с. 7; 28, с. 74] и обозначают $B(P)$. Булеан множества $P=\{a, b, c\}$ имеет вид

$$B(P)=\{\varnothing, \{c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}.$$

Кардинальное число любого собственного подмножества множества P меньше $|P|$. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, поставим в соответствие каждому элементу множества P двоичный разряд точно так же, как показано в таблице 1. Среди всех $|P|$-разрядных двоичных чисел существует только одно число, не содержащее нулей. Ему соответствует несобственное подмножество, совпадающее с множеством P. Удалим это число. В каждом из оставшихся $|P|$-разрядных чисел содержится хотя бы один нуль, показывающий, какой элемент множества P не входит в соответствующее подмножество. А это значит, что в каждом из собственных подмножеств число элементов меньше, чем $|P|$.

Упражнения

1. (ШСС) Сколько одноэлементных подмножеств имеет множество вида

$$Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}?$$

2. Дано множество вида $A=\{a, b, c, d\}$. Укажите верные записи:

(ОАП)

а) $a \in A$;

б) $d \subset A$;

в) $\varnothing \in A$;

г) $\{a, b, c, d\} \subseteq A$;

д) $\varnothing \subset A$;

е) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$.

(БЫР)

а) $\{a\} \subset \{a, b\}$;

б) $\{c\} \subseteq \{c\}$;

в) $\varnothing \in \{a, b, c\}$;

г) $\varnothing \subset \{a\}$;

д) $A \subseteq \{a, b, c, d\}$;

е) $a, b \subseteq \{a, b\}$.

3. (ЗОМ) Сколько собственных подмножеств имеет множество

$$M=\{x \mid x \text{ – натуральное число} \wedge x < 6\}?$$

4. (НА) Известно, что число собственных подмножеств некоторого множества K равно числу его несобственных подмножеств. Найдите кардинальное число множества K и кардинальное число булеана множества K.

5. (800) В множестве R отсутствуют собственные подмножества. Определите кардинальное число множества R и кардинальное число булеана множества R.

6. (ШТК) Известно, что число собственных подмножеств некоторого множества в 15 раз больше числа его несобственных подмножеств. Найдите кардинальное число этого множества.

7. (ТТЮ) Некоторое множество имеет 62 собственных подмножества. Найдите число элементов булеана этого множества.

8. (ЗМА) Некоторое множество содержит пять одноэлементных подмножеств. Найдите кардинальное число булеана этого множества.

9. (ББХ) Кардинальное число множества S равно 7. Найдите число собственных подмножеств множества S.

10. (ТУФ) Булеан множества P содержит 256 элементов. Найдите число собственных подмножеств множества P.

11. (5П7) Булеан множества P состоит из 128 элементов. Найдите кардинальное число множества P.

12. (23У) Дано множество P. Когда из него удалили три элемента, получилось множество, булеан которого содержит 64 элемента. Найдите $|B(P)|$.

13. (454) Булеан множества M имеет 16 элементов. В множество M добавили несколько элементов. Получилось новое множество P, для которого $|B(P)|=1024$. Найдите разность $|P| - |M|$.

14. (ШЛШ) Множество P имеет 56 собственных подмножеств, среди которых нет ни одного одноэлементного подмножества. Найдите $|B(P)|$.

15. (ТШХ) Множество P имеет 27 подмножеств, среди которых нет ни одного одноэлементного подмножества. В множество P добавили два элемента. Получилось множество M. Найдите $|B(M)|$.

16. (РА)! Дано множество $S=\{a, b, 1, 2, 3, 4\}$. Сколько существует подмножеств этого множества, не содержащих букв? Сколько существует подмножеств, не содержащих цифр? Сколько существует подмножеств, не содержащих ни букв, ни цифр?

17. (ЯТН)! Сколько собственных подмножеств имеет синглетон? Сколько несобственных подмножеств имеет синглетон?

1.1.3. Диаграммы Венна. Универсальное множество

Джон Венн (1834–1923) – английский логик, профессор, член Королевского общества [28, с. 82].

Чтобы повысить наглядность представления множеств и отношений между ними, используют диаграммы Венна (иногда их называют диаграммами Эйлера [16], кругами Эйлера [17], диаграммами Эйлера-Венна [54]) в виде замкнутых кривых, ограничивающих области, которым ставятся в соответствие элементы тех или иных множеств. На рис. 1 показано два множества:

$P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $K=\{1, 2, 3\}$.

Непосредственно по диаграмме видно, что $K \subset P$.

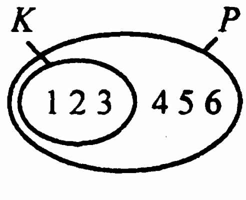


Рис. 1

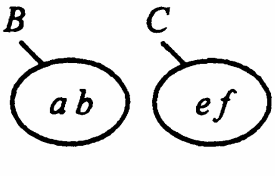


Рис. 2

Если требуется показать, что множества не имеют общих элементов, эти множества изображают непересекающимися кругами. На рис. 2 непересекающимися являются множества B и C, где $B=\{a, b\}$; $C=\{e, f\}$.

Одним из важнейших понятий теории множеств является понятие универсального множества (иногда используется термин «полное множество» [28, с. 454], а также «универсум» [16, с. 7]). Обозначается оно обычно символом I. Множество I – это множество всех тех элементов, которые участвуют в данном рассуждении. Любое рассматриваемое при этом множество является подмножеством универсального множества. Например, если рассматриваются различные множества целых положительных чисел за исключением нуля, то универсальным можно считать множество всех натуральных чисел.

На диаграммах Венна универсальные множества изображаются в виде прямоугольников, внутри которых размещаются круги, обозначающие подмножества соответствующих универсальных множеств. На рис. 3 показан пример универсального множества

$$I=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

и двух его подмножеств $P=\{2\}$ и $Q=\{2, 3, 5, 7\}$, где P – множество четных простых чисел, а Q – множество всех простых чисел, меньших 10.

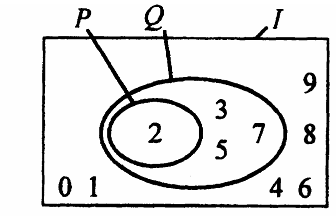


Рис. 3

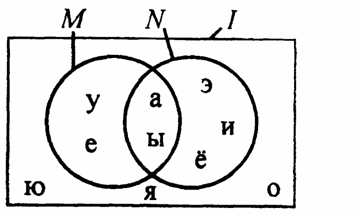


Рис. 4

В общем случае универсальным может быть любое непустое множество.

Упражнения

1. (РУ.ШК) На рис. 3 укажите элементы универсального множества, не входящие в множество Q.

2. (ОМ) Найдите кардинальное число множества I на рис. 3.

3. (ХЛИ) По рис. 3 найдите $|B(I)|$.

4. (ХХ) Перечислите все элементы, которые останутся в множестве I (рис. 3), если из него удалить все элементы, не входящие в множество Q.

5. На рис. 4 универсальное множество образуют гласные буквы русского алфавита.

(ПК.56) Укажите буквы (в алфавитном порядке), не входящие ни в множество M, ни в множество N.

6. (ЖУ) Перечислите буквы (в алфавитном порядке), которые останутся в множестве M (рис. 4), если все элементы множества N удалить.

7. (ОЙО) По рис.4 найдите $|B(I)|$.

8. (ЭЮЮ) По рис.4 найдите $|B(N)|$.

9. Даны множества:

$A=\{2, 20, 120, 16, 52, 502\}$;	$E=\{120, 502\}$;
$B=\{10, 2, 5\}$;	$F=\{12, 16, 25\}$;
$C=\{2, 20, 16\}$;	$K=\{20, 120, 502, 52, 16\}$;
$D=\{20, 16, 52\}$;	$M=\{502\}$.

(ОТС) Перечислите множества, являющиеся подмножествами множества A.

(ОН) Укажите сначала все истинные утверждения из нижеследующих, а затем – все ложные:

а) $B \subset A$;	д) $F \subset E$;
б) $C \subset A$;	е) $M \subset A$;
в) $D \subset A$;	ж) $\{512\} \subset A$;
г) $E \subset M$;	з) $\{121,512\} \subset M$.

(Т56) Перечислите элементы множества C, которые останутся в нем, если удалить из него все элементы множества K.

(А4) Элементы множества C объединили с элементами множества D. В результате получилось новое множество S. Перечислите элементы множества C (в порядке возрастания).

10. Множество I состоит из двузначных чисел, кратных 9 и не содержащих цифры 0.

(ХО)! Найдите кардинальное число множества I. Найдите наименьшее число, входящее в множество I.

(88) Найдите $|B(C)|$, где C – множество, состоящее из чисел множества I, кратных 18.

(ДО) Перечислите элементы множества $D \subset I$, представляющие собой числа, делящиеся на 4 без остатка.

11. (ВЛЕ) Известно, что $A \subset B$ и $a \in A$. Какие из следующих записей верны:

а) $a \subset A$;	г) $a \notin B$;
б) $\{a\} \subset B$;	д) $A \in B$;
в) $a \in B$;	е) $\{a\} \subset A$?

1.1.4. Объединение множеств

Объединением n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из этих n множеств:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$

где знак $\cup$ обозначает операцию объединения множеств.

Формально операция объединения множеств определяется следующим образом:

$$A = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\},$$

где $\vee$ – логический знак, обозначающий союз ИЛИ.

Пусть даны множества:

$$A_1=\{a, b, c\};\ \ A_2=\{4\};\ \ A_3=\{b, 54\}.$$

Применив к ним операцию объединения, получим новое множество

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, 4, 54\}.$$

Заметим, что $b \in A_1$ и $b \in A_3$, однако в множество A элемент b входит только один раз.

На диаграммах Венна объединение множеств обозначают сплошной штриховкой областей, соответствующих этим множествам. На рис. 5 заштрихована область множества $P \cup Q$. На рис. 6 показана штриховкой область, относящаяся к множеству $(P \cup Q) \cup R$. На рис. 7 изображено три множества. Штриховкой отмечено множество $Q \cup R$.

Операция объединения множеств обладает следующими свойствами:

а) объединение коммутативно:

$A \cup B = B \cup A$;

$A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C$ и т.д.;

б) объединение ассоциативно:

$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = (B \cup C) \cup A = A \cup B \cup C$.

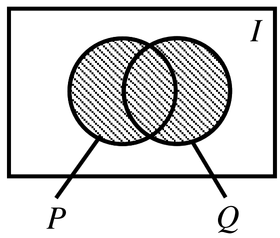


Рис. 5

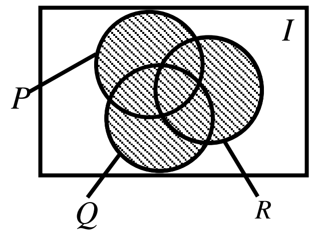


Рис. 6

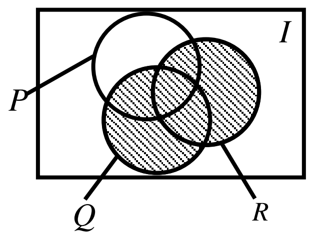


Рис. 7

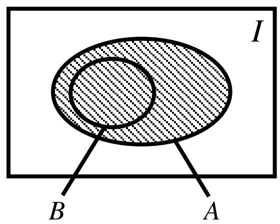


Рис. 8

Благодаря ассоциативности при записи нескольких множеств, соединенных знаком объединения, скобки можно не использовать:

в) если $B \subseteq A$, то $A \cup B = A$. На рис. 8 приведена диаграмма Венна для случая, когда $B \subset A$. Штриховкой отмечена область множества A, которая одновременно относится и к множеству $A \cup B$. Из свойства «в» следует, что:

$$A \cup A = A; \qquad (2)$$

$$A \cup \varnothing = A; \qquad (3)$$

$$A \cup I = I. \qquad (4)$$

Упражнения

1. (РВ) Найдите элементы множества $A \cup B$, если $A=\{a, b, c\}$; $B=\{b, c, d\}$.

2. (ПЫ) Перечислите элементы множеств: сначала A, затем – A_1 после этого – A_2 (числа в каждом множестве упорядочить по возрастанию), если $A=\{x \mid x\in I \wedge (x\in A_1 \vee x\in A_2)\}$; $A_1 \subset I$ – множество чисел, кратных трем; $A_2 \subset I$ – множество чисел, кратных четырем}; $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

3. (ГУМ) Дано три множества A, B, C. Известно, что $a\in A$. Укажите все верные утверждения:

а) $a \subset B$;	е) $\{a\}\in B$;
б) $a\in A \cup B$;	ж) $\{a\}\subseteq A \cup B$;
в) $a \subset B \cup C$;	з) $\{a\}\in B \cup C$;
г) $a\in A \cup B \cup C$;	и) $\{a\}\subseteq A \cup B \cup C$.
д) $\{a\}\subseteq A$;	

4. (ОР)! На рис. 9 приведена диаграмма Венна для трех множеств. Найдите элементы множеств $A \cup B$, затем – $A \cup C$.

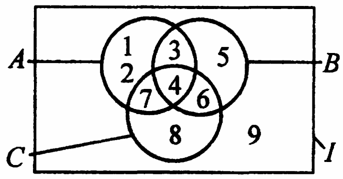


Рис. 9

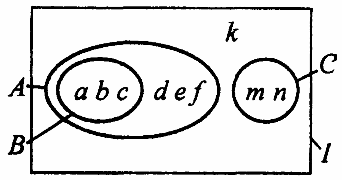


Рис. 10

5. (НЕ). Перечислите элементы множества M (рис. 9), если
$$M=\{x \mid x\notin A \wedge x\in I\}.$$

6. (ШБ) Перечислите элементы множества N (рис. 9),если
$$N=\{x \mid x\in A \cup B, x>4\}.$$

7. (ПВ) Перечислите элементы множества K (рис. 9), если
$$K=\{x \mid x\in A \cup B \cup C, x \text{ – четное число}\}.$$

8. (63) Перечислите элементы множества T (рис. 9), если
$$T=\{x \mid x\notin A \cup C, x\in I\}.$$

9. (56С) Найдите кардинальное число множества $A \cup B$, если
$$A=\{a, b, c\}; \qquad B=\{6, 7, 8, 9\}.$$

10. (ЯРР) Найдите кардинальные числа множеств $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ по диаграмме Венна (рис. 10).

11. (НТО) Найдите кардинальное число множества $A \cup B$, если

$A=\{1, 2, 3, 4\}$; $B=\{2, 3, 4, 5\}$.

12. (МУФ) Найдите кардинальное число множества $A \cup B$, если

$A=\{\varnothing\}$; $B=\{a, b, c\}$.

13. (ОМУ) Найдите кардинальное число множества $B(P) \cup B(Q)$, где

$P=\{a, b, c\}$; $Q=\{b, c, d\}$.

14. (ЯВЕ) Найдите кардинальное число множества $B(K) \cup B(M)$, где

$K=\{x$ / x – четное натуральное число, $x \leq 8\}$;

$M=\{x$ / x – нечетное натуральное число, $x<6\}$.

1.1.5. Пересечение множеств

Пересечением n множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называется множество A, каждый элемент которого принадлежит каждому из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$A=A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n,$$

где знак $\cap$ обозначает операцию пересечения множеств.

Формально операция пересечения определяется следующим образом:

$$A=\{x / x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\},$$

где $\wedge$ – логический знак, обозначающий союз И.

Пусть даны множества:

$A=\{a, b, c, d\}$; $B=\{b, c, d, e\}$; $C=\{c, d, e, f\}$.

Применив к этим множествам операцию пересечения, получим новое множество K:

$$K=A \cap B \cap C=\{c, d\}.$$

Как и в случае объединения множеств, их пересечение на диаграммах Венна обозначается сплошной штриховкой. На рис. 11 заштрихована область, относящаяся одновременно к обоим множествам P и Q, где

$P=\{1, 3, 5, 7\}$; $Q=\{5, 6, 7, 8\}$.

По диаграмме видно, что

$$P \cap Q=\{5, 7\}.$$

Операции пересечения множеств присущи те же свойства, что и операции объединения:

а) пересечение коммутативно:

$A \cap B=B \cap A$;

$A \cap B \cap C=B \cap A \cap C=C \cap A \cap B$ и т.д.

б) пересечение ассоциативно:

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=(A\cap C)\cap B=A\cap B\cap C$.

Благодаря ассоциативности при записи нескольких множеств, объединенных знаком пересечения, скобки можно не ставить;

в) если $A\subseteq B$, то $A\cap B=A$. На рис. 12 приведена диаграмма Венна для случая, когда $A\subseteq B$. Штриховкой отмечена область, относящаяся одновременно к множествам A и B. Поскольку $A\subset B$, то все элементы множества A одновременно являются элементами множества B.

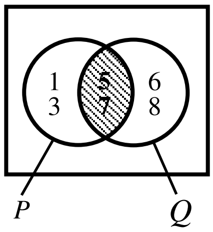


Рис. 11

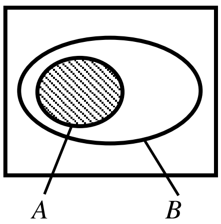


Рис. 12

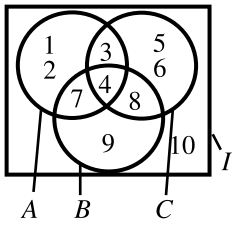


Рис. 13

Из свойства «в» следует, что

$$A\cap A = A; \tag{5}$$

$$A\cap I = A; \tag{6}$$

$$A\cap\varnothing = \varnothing. \tag{7}$$

Необходимо отметить еще два свойства: дистрибутивность пересечения относительно объединения:

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \tag{8}$$

и дистрибутивность объединения относительно пересечения

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C). \tag{9}$$

В справедливости этих свойств нетрудно убедиться при помощи диаграмм Венна.

Свойство (9) можно получить из свойства (8), если все знаки объединения заменить знаками пересечения, а все знаки пересечения заменить знаками объединения. Точно таким же образом можно получить формулу (8) из формулы (9).

В литературе по дискретной математике принято: если в одном и том же выражении встречаются операции объединения и пересечения, то первой выполняется операция пересечения, а затем – объединения. Благодаря такому соглашению многие формулы можно записывать без скобок и использовать их только в тех случаях, когда порядок действий необходимо изменить.

Для примера рассмотрим формулу:

$$(A\cap B)\cup(B\cap C) = A\cap B\cup B\cap C.$$

Если учесть принятое соглашение, то обе части этого выражения будут восприниматься однозначно.

Если же потребуется указать, что сначала должна быть выполнена операция объединения, а затем – пересечения, то необходимо воспользоваться скобками. Например:

$$(A\cup B\cup C)\cap D.$$

В этом выражении первой выполняется операция объединения и лишь затем – пересечения.

Упражнения

1. Найдите элементы множества $A\cap B$, если:
(БК) $A=\{b, c, d\}$; $B=\{c, d, e\}$;
(МБМ) $A=\{1, 3, 4, 5\}$; $B=\{4, 7, 8\}$;
(ЦК) $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3\}$;
(БАР) A={март, апрель, май}; B={май, июнь}.
2. Найдите элементы множества $P\cap Q$, если:
(ДОТ) $P=\{x / x<12$, x – натуральное число};
$Q=\{x / x>10$, x – натуральное число};
(ТЛ) $P=\{x / x\leq 12$, x – натуральное число};
$Q=\{x / x\geq 10$, x – натуральное число};
(ТИС) $P=\{x / x$ – натуральное простое число};
$Q=\{x / x$ – четное натуральное число}.
3. Найдите элементы множества $A\cup B\cap C$, если
(ЫН) $A=\{0, 1, 2, 3\}$;
$B=\{x / x<10$, x – натуральное число};
$C=\{x / x>8$, x – натуральное число};
(АМ) $A=\{b, c\}$, $B=\{a, b, c\}$, $C=\{a, b, c, d\}$;
(РВ) $A=B=C=\{b, c, d\}$.
4. (ДЫВ) Найдите кардинальное число множества $A\cap B\cup C$, если:
$A=\{x / x<100$, x – натуральное число, оканчивающееся нулем};
$B=\{x / x>50$, x – натуральное число};
$C=\{x / x<20$, x – простое число}.
5. (ОТ)! Найдите элементы множеств $X\cap Y$, $X\cap Z$, $Y\cap Z$, если:
$X=\{3, 4, 5, 7\}$; $Y=\{5, 7, 8\}$; $Z=\{7, 8, 9\}$.
6. (АНУ) Укажите верные выражения:
а) $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$;
б) $(B\cup C)\cap A=A\cap B\cup A\cap C$;
в) $A\cap B=B\cap A$;

г) $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cap(B\cup C)$;

д) $A\cap B\cup A\cap C=A\cup B\cap C$;

е) $A\cap(B\cup C)=A\cup B\cap C$.

7. (ЛЛЛ) Найдите $|B(Q)|$, где $Q=A\cap B\cup A\cap C$, если:
$A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; $C=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

8. (ФОК) Найдите $|B(Q)|$ где $Q=A\cap B\cup A\cap C\cup B\cap C$, если:
$A=\{a, b, c, d, e\}$; $B=\{b, c, d, e, f\}$; $C=\{c, d, e, f, k\}$.

9. (КЕН)! По диаграмме Венна (рис. 13) найдите элементы множеств: сначала $A\cap B$, затем $B\cap C$.

10. (АИМ) По диаграмме Венна (рис. 13) найдите элементы множества $A\cup B\cap C$.

11. (25К) Найдите $|B(Q)|$, где $Q=A\cap B\cup A\cap C$ (рис. 13).

12. (ЛИО) Укажите номера верных выражений:

1) $A\cap A\cap(A\cup B)=A\cup A\cap B\cup A\cap B\cap C$,

2) $(A\cup B)\cap\varnothing=\varnothing$;

3) $\varnothing\cup A\cap B=\varnothing\cap(A\cup B)\cup\varnothing\cap C$;

4) $(A\cap I)\cup B=A\cup B$;

5) $A\cap\varnothing\cup B=B$;

6) $A\cap\varnothing\cap B=A\cap B$

13. (АОИ) Укажите пустые множества, если $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $I\neq\varnothing$.

а) $A\cup\varnothing$;

б) $A\cap B\cap\varnothing$;

в) $(A\cup B)\cap I\cap\varnothing$;

г) $\varnothing\cup\varnothing\cap A$;

д) $I\cup\varnothing\cap A$;

е) $I\cap\varnothing\cup\varnothing$.

1.1.6. Дополнение множества

Если I – универсальное множество, то дополнением множества A называется множество всех тех элементов, которые являются элементами множества I, но не входят в множество A. Это значит, что если элементы множества A обладают некоторыми свойствами, то каждый из элементов дополнения множества A этими свойствами не обладает (одним или несколькими). Пусть I – множество домов. Выделим в нем множество A деревянных одноэтажных домов. Тогда в дополнение войдут все недеревянные и все неодноэтажные дома как деревянные, так и недеревянные.

Обозначается дополнение чертой над символом множества: $\overline{A}$ (в литературе встречаются и другие обозначения: $-A$, A', $\sim A$, NA, $\neg A$ и др.).

Формально операцию дополнения можно определить следующим образом:

$$\overline{A}=\{x \,/\, x\notin A \wedge x\in I\}.$$

Пример. Если I – множество десятичных цифр и $A=\{1, 3, 4\}$, то $\overline{A}=\{0, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

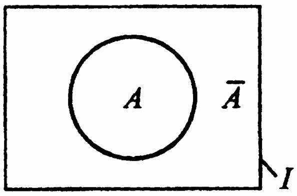


Рис. 14

На рис. 14 приведена диаграмма Венна, иллюстрирующая операцию дополнения.

По диаграмме видно, что:

$A\cup\overline{A}=I$; (10)

$A\cap\overline{A}=\varnothing$; (11)

$\overline{\overline{A}}=A$ (свойство инволюции); (12)

Если $A=\varnothing$, то $\overline{A}=I$, т. е. $\overline{\varnothing}=I$; (13)

Если $A=I$, то $\overline{A}=\varnothing$, т. е. $\overline{I}=\varnothing$. (14)

Дополнение множества A возможно не только до универсального, но и до любого другого множества Q, если $A\subseteq Q$:

$$\overline{A}^{Q}=\{x \,/\, x\notin A,\ x\in Q,\ A\subseteq Q\},$$

где знак Q при символе $\overline{A}$ (т.е. $\overline{A}^{Q}$) говорит о том, что операция дополнения осуществляется до множества Q [6, с. 12]. Например, если $A=\{1, 2, 3\}$ и $Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, то $\overline{A}^{Q}=\{4, 5\}$.

Упражнения

1. Пусть $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Укажите элементы, входящие в множество $\overline{A}$, если:

(ШУЛ) $A=\{3, 4\}$; (950) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(ЛВВ) $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; (ГИЧ) $A=\varnothing$.

2. (361) Найдите элементы множества $\overline{A}$, если A – множество всех простых чисел, не превышающих 7, $I=\{0, 1, 2,..., 9\}$.

3. (ПКМ) Найдите $|\overline{A}|$, если $I=\{1, 2, 3,..., 30\}$; $A=\{x \,/\, x<20,\ x$ – простое число$\}$.

4. (ФУХ) Дано: $|\overline{A}|=12$. Найдите $|A|$, если $|I|=50$.

5. (А28) Найдите элементы множества $\overline{\overline{A}}$, если $A=\{1, 4, 7\}$, $I=\{1, 2,$

3, 4, 7}.

6. (ЦКП) Дано: $|A|=24$, $|I|=42$. Найдите $|\overline{\overline{A}}|$.

7. (750)! Дано: $A=\{1, 2\}$; $B=\{1, 2, 3, 4\}$; $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Найдите сначала элементы множества $\overline{A}^B$, затем – $\overline{A}$.

8. (353)! Дано: $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Найдите элементы множества A, если $\overline{A}^B=\{6, 7\}$. Найдите элементы множества C, если $\overline{C}^B=\{3, 4, 5\}$. Найдите элементы множества D, если $\overline{D}^B=\varnothing$.

9. (ТКС)! Дано: $I=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Найдите кардинальное число множества $B(\overline{A})$, если A – синглетон. Найдите $|\overline{A}|$.

1.1.7. Законы де Моргана

Огастес де Морган (1806–1871) – шотландский математик и логик.

Законы (правила, теоремы) де Моргана устанавливают связь между операциями объединения, пересечения и дополнения:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \tag{15}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{16}$$

Закон (15) формулируется следующим образом: дополнение объединения есть пересечение дополнений. Аналогично формулируется закон (16): дополнение пересечения есть объединение дополнений.

Убедиться в справедливости соотношений (15) и (16) можно при помощи диаграмм Венна. Обратимся к выражению (15). На рис. 15 вертикальной штриховкой обозначена область, соответствующая левой части формулы (15). Она обозначает дополнение множества $A \cup B$.

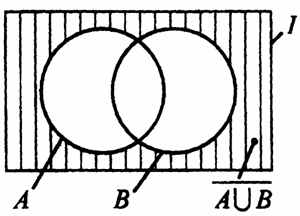


Рис. 15

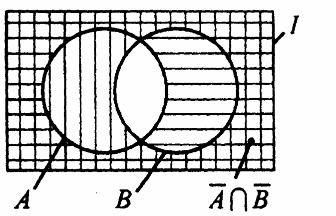


Рис. 16

Правая часть равенства (15) состоит из пересечения двух множеств $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Множество $\overline{A}$ нанесем на диаграмму Венна горизонтальной штриховкой (рис. 16), а множество $\overline{B}$ – вертикальной. Тогда двойная штриховка будет соответствовать пересечению множества $\overline{A}$ и $\overline{B}$. По рис. 15 и 16 видно, что множества $\overline{A \cup B}$ и $\overline{A} \cap \overline{B}$ занимают на диаграммах Венна одну и ту же область, следовательно, эти множества равны и соотношение (15) справедливо.

Аналогично можно доказать справедливость формулы (16). На рис. 17 приведена диаграмма Венна для левой части равенства (16). Вертикальной штриховкой на ней обозначено дополнение множества $A\cap B$.

Правая часть равенства (16) есть объединение двух множеств: $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Множество $\overline{A}$ (рис. 18) обозначим горизонтальной штриховкой, а множество $\overline{B}$ – вертикальной. Незаштрихованной осталась только область $A\cap B$. Все, что заштриховано, относится к дополнению множества $A\cap B$, т.е. к множеству $\overline{A\cap B}$. Таким образом, заштрихованные области на рис. 17 и 18 совпадают, что и доказывает справедливость утверждения (16).

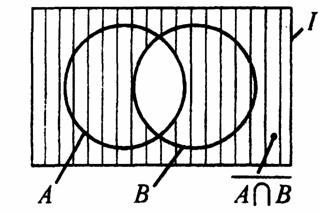


Рис. 17

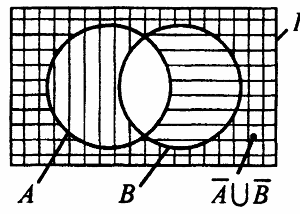


Рис. 18

Правила де Моргана применимы не только к двум, но и к большему числу множеств. Например, в случае трех множеств A, B, C имеем:

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C};$$
$$\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}.$$

Упражнения

1. Даны множества: $A=\{1, 2, 3\}$; $B=\{2, 3, 4\}$; $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Найдите элементы множеств:

(ИНА) $\overline{A\cup B}$; (РОВ) $\overline{A\cap B}$; (УВД) $\overline{\overline{A}\cap B}$; (ТВВ) $\overline{\overline{A}\cup B}$;

(МЕТ) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$; (ЯВЕ) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$.

2. Упростить выражения, если $A\subset B$:

(861) $\overline{A\cup B}$; (ОИЗ) $\overline{A\cap B}$; (737) $\overline{\overline{A}\cap B}$; (ФАХ) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$;

(РТК) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$; (438) $\overline{\mathrm{A}\cup\overline{B}}$.

3. Вместо точек поставьте знак = или $\neq$:

(ФИР)! (ВАС)!

$A\cup B\ldots\overline{A}\cup\overline{B}$; $\overline{A\cup\overline{I}}\ldots\overline{A}$;

$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\ldots A\cup B$; $\overline{A\cap B}\cup\overline{A}\ldots\overline{A\cap B}$;

$A\cup\overline{B\cap C}\ldots A\cup\overline{B}\cup\overline{C}$; $\overline{A\cap\varnothing}\cup\overline{B\cap I}\ldots\overline{I}$;

$P\cup\overline{Q\cup P}\cup Q\ldots\overline{\varnothing\cap A}$; $A\cap\varnothing\cup\overline{P\cap\overline{P}}\ldots A\cup\overline{A}$;

$\overline{\overline{A\cup I}\cup I}\ldots\overline{\overline{A}\cup\varnothing}$; $\overline{A\cup I}\cap\overline{B\cup\varnothing}\ldots\overline{A\cup\overline{A}}$;

$\overline{\overline{A\cup A}\cup\overline{A\cup A}}\ldots A$. $\overline{\overline{A\cap\overline{A}\cap\overline{B}\cap B}}\ldots I$.

4. (УУФ) Найдите $|B(P)|$, где $P=\overline{A\cup\overline{B}}$, если
$A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$; $B=\{3, 5, 7, 8, 9\}$.

5. (342) Найдите $|B(Q)|$, где $Q=\overline{A\cup B}$, если
$A=\{0, 1, 2, 3\}$; $B=\{1, 2, 3, 4\}$; $I=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

6.Упростить выражения, если $A\subset B$, $B=C$.

(КВЗ)!

$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}}$;

$\overline{A\cup B\cap\overline{C}}$;

$A\cup\overline{\overline{B\cup\overline{C}}}$.

(884)!

$\overline{A\cup A\cap B\cup A\cap C}$;

$\overline{A\cup\overline{\overline{B}\cap C}}$;

$\overline{A\cap\overline{B}\cap C}\cup I$.

1.1.8. Разность множеств

Разностью множеств A и B называется множество всех элементов, принадлежащих множеству A, но не входящих в множество B. Обозначается разность множеств наклонной чертой (иногда используется знак минус):

$$A\backslash B=\{x \,/\, x\in A \wedge x\notin B\}=A\cap\overline{B}.$$

Аналогично записывается разность $B\backslash A$:

$$B\backslash A=\{x \,/\, x\in B \wedge x\notin A\}=\overline{A}\cap B.$$

Рассмотрим пример. Пусть $A=\{1, 2, 3\}$; $B=\{3, 4, 5\}$, тогда $A\backslash B=\{1, 2\}$; $B\backslash A=\{4, 5\}$.

На рис. 19 приведена диаграмма Венна, где штриховкой обозначена разность $A\backslash B$.

Если $A\subset B$, то $A\backslash B=\varnothing$. Пусть $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$. Чтобы найти множество $A\backslash B$, из множества A необходимо удалить все элементы, принадлежащие множеству B. Поскольку все элементы множества A входят в множество B, то в результате получили пустое множество.

Если $A\subset B$, то $B\backslash A=\overline{A}^{B}$, т.е. при $A\subset B$ разность $B\backslash A$ совпадает с дополнением множества A до множества B. На рис. 20 множество $B\backslash A$ обозначено штриховкой.

Если $A=B$, то очевидно, что $A\backslash B=B\backslash A=\varnothing$.

Если $B=I$, то $I\backslash A=\overline{A}$, т.е. разность универсального множества и множества A есть дополнение множества A до универсального.

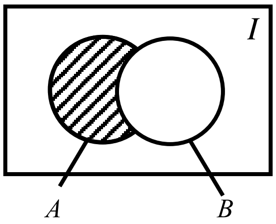


Рис. 19

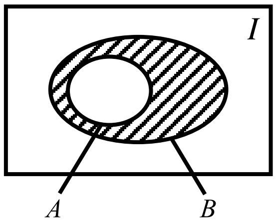


Рис. 20

В тех случаях, когда разность множеств применяется к трем и более множествам, необходимо использовать скобки, поскольку

$$(A\backslash B)\backslash C \neq A\backslash(B\backslash C),$$

т.е. разность множеств неассоциативна. Если же условиться выполнять эту операцию в строгом порядке слева направо, то скобки можно не ставить:

$$A\backslash B\backslash C = A\cap\overline{B}\cap\overline{C};\ A\backslash B\backslash C\backslash D = A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}$$ и т. д.

Упражнения

1. (НУ) Найдите элементы множества $A\backslash B$, если $A=\{3, 4, 6, 7\}$; $B=\{6, 7, 8\}$.

2. (604) Найдите элементы множества $A\cup B$, если $A\backslash B=\{2, 4, 5\}$; $B=\{6, 7, 8\}$.

3. Даны множества: $A=\{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$; $B=\{3, 4, 6, 7, 9\}$; $C=\{0, 5, 6, 7, 8\}$; $I=\{0, 1, 2, ..., 9\}$.

Найдите элементы множеств:

(ХМА) $A\backslash(B\cup C)$; (КЭР) $A\backslash(B\cap C)$;

(ТРТ) $B\backslash(A\cap\overline{C})$; (НОС) $C\backslash(\overline{A}\cap B)$;

(КЦК) $A\backslash(B\backslash C)$; (АРО) $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

4. Даны множества: $A=\{0, 1, 2, 5\}$; $B=\{1, 2\}$; $C=\{2, 5, 7\}$; $I=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Найдите элементы множеств:

(ТМЕ) $(A\cup B\cup C)\backslash B$; (029) $(A\cup B)\backslash(A\backslash B)$;

(22У) $(A\cup B\cup\overline{C})\backslash(B\cup C)$; (КУП) $(\overline{A}\cup B)\backslash(A\cap\overline{B})$;

(Р34) $A\backslash(B\cap\overline{B})$; (ЗЕЛ) $I\backslash(A\cup B\cup C)$.

5. (ЗРЯ) Укажите пустые множества, если известно, что $A\subset B\subset C$, $A\neq\varnothing$, $\overline{C}\neq\varnothing$.

а) $(B\backslash C)\cap(A\cup B)$; г) $C\cap(B\backslash\overline{A})$;

б) $[\overline{C}\cap(A\cup B\cup C)]\backslash B$; д) $(A\cap\overline{B})\cup(B\backslash C)$;

в) $C\cup(\overline{A}\backslash\overline{B})$; е) $A\cup(B\backslash C)$.

1.1.9. Симметрическая разность множеств

Симметрическая разность множеств A и B (ее называют также дизъюнктивной разностью) – это множество вида $A\oplus B=\{x \ / \ x\in A\wedge x\notin B,$ или $x\notin A\wedge x\in B\}$, где знак $\oplus$ обозначает операцию симметрической разности. Для обозначения симметрической разности множеств используют и другие знаки, например $A \ \Delta \ B$ [6, с. 12].

Симметрическую разность можно выразить через дополнение, пересечение и объединение следующим образом:

$$A\oplus B=A\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap B. \tag{17}$$

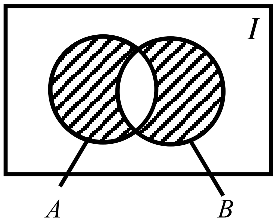


Рис. 21

На рис. 21 приведена диаграмма Венна, иллюстрирующая симметрическую разность множеств. По диаграмме видно, что симметрическая разность может быть выражена через разность множеств и операцию объединения:

$$A\oplus B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A).$$

Рассмотрим пример. Если $A=\{1, 2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$, то $A\oplus B=\{1, 2, 5, 6, 7\}$.

Симметрическая разность множеств обладает свойствами (их нетрудно доказать при помощи диаграмм Венна):

а) коммутативность: $A\oplus B=B\oplus A$;

б) ассоциативность: $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)=A\oplus B\oplus C$, т.е. если знаком симметрической разности множеств соединены более двух символов, то скобки можно не ставить;

в) дистрибутивность пересечения относительно симметрической разности: $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$. Если условиться считать, что первой всегда выполняется операция пересечения, а затем – симметрической разности, то скобки можно не ставить:

$$A\cap(B\oplus C) = A\cap B\oplus A\cap C.$$

Благодаря свойству дистрибутивности можно раскрывать скобки в сложных выражениях и записывать формулы в виде симметрической разности пересечений. Например:

$$(A\oplus B\oplus C)\cap(D\oplus E)=A\cap D\oplus A\cap E\oplus B\cap D\oplus B\cap E\oplus C\cap D\oplus C\cap E.$$

Операция симметрической разности множеств не является дистрибутивной относительно пересечения:

$$A\oplus B\cap C \neq (A\oplus B)\cap(A\oplus C). \qquad (18)$$

Чтобы убедиться в этом, выразим обе части неравенства (18) через операции объединения, пересечения и дополнения и результаты представим в виде диаграмм Венна.

Левую часть преобразуем в соответствии с формулой (17):

$$A\oplus B\cap C = A\cap\overline{B\cap C}\cup\overline{A}\cap B\cap C = A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})\cup\overline{A}\cap B\cap C =$$
$$= A\cap\overline{B}\cup A\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap B\cap C.$$

На рис. 22 приведена диаграмма Венна, на которой штриховкой обозначено полученное множество.

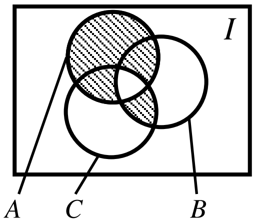


Рис. 22

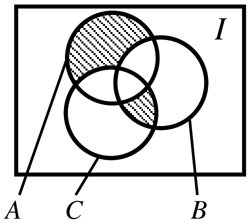


Рис. 23

Аналогично преобразуем правую часть выражения (18):

$$(A\oplus B)\cap(A\oplus C) = (A\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap B)\cap(A\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap C) =$$
$$= A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap B\cap C.$$

На рис. 23 приведена диаграмма Венна, на которой заштрихована область, соответствующая полученному выражению. По диаграммам (рис. 22 и 23) видно, что отмеченные на них, множества не совпадают, следовательно, неравенство (18) справедливо.

Рассмотрим еще несколько свойств симметрической разности множеств:

а) $A\oplus\varnothing=\varnothing\oplus A=A$;

б) если $A=B$, то $A\oplus A=\varnothing$, что следует из (17);

в) если $A\subset B$, то $A\oplus B=B\setminus A=\overline{A}\cap B$;

г) если $A\supset B$, то $A\oplus B=A\setminus B=A\cap\overline{B}$;

д) если $A\cap B=\varnothing$, то $A\oplus B=A\cup B$;

е) $A\oplus B\oplus(A\cap B)=A\cup B$.

Упражнения

1. (ТМ) Найдите элементы множества $A\oplus B$, если: $A=\{a, b, c\}$; $B=\{a, c, d, e\}$.

2. (ЮАЛ)! Известно, что $A\setminus B=\{1, 2\}$; $B\setminus A=\{3, 4\}$; $A\cap B=\{5, 6\}$.

Найдите элементы множества $A \oplus B$. Найдите элементы множества A.

3. (УЗО) Даны множества: $A \cap \overline{B}=\{a, b, c\}$; $B=\{d, e, f\}$; $A \cap B=\{d\}$. Найдите элементы множества $A \oplus B$.

4. (ЗТТ) Найдите элементы множества $\overline{A \oplus B}$, если $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \backslash B=\{1, 6\}$, $B \backslash A=\{3\}$.

5. (ОИХ) Даны множества: $A \cup B=\{a, b, c, d, e, f\}$; $A \cap B=\{c, d\}$. Найдите элементы множества $A \oplus B$ (Лат.).

6. Упростить выражения:

(ОЦН) $A \oplus A \oplus A \oplus A$; (МАМ) $I \oplus B \oplus B \oplus B$;

(ЧЕШ) $A \oplus \overline{A} \cap \overline{B} \oplus \overline{A} \cap B$; (ОВУ) $A \oplus \overline{A} \oplus I$.

7. (756) Даны множества: $A \oplus B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; $\overline{A \cup B} = \{8\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Найдите элементы множества $A \cap B$.

8. Укажите верные выражения:

(26)

а) $A \oplus B \oplus C=(A \oplus B) \oplus C$;

б) $A \oplus B \cap C=A \oplus B \cap C \oplus \varnothing$;

в) $A \oplus B \oplus I=A \oplus B$;

г) $A \oplus I \oplus I=A \oplus I$;

д) $A \oplus \varnothing \oplus \varnothing=A \oplus \varnothing$;

е) $A \oplus \overline{A}=A \cup \overline{A}$.

(АХ)

а) $A \cap (B \oplus C)=A \cap \mathrm{B} \oplus A \cap C$;

б) $A \oplus B \oplus A \cap B=A \cup B$;

в) $A \oplus \overline{B} \oplus A \cap \overline{B}=A \cup \overline{B}$;

г) $(A \oplus I) \cap A=\varnothing$;

д) $(A \oplus I \oplus I) \cap A=\varnothing$;

е) $(A \cup B) \oplus A=\overline{A} \cap B$.

9. (ЯД) (Лат.) Дано: $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$; $\overline{A} \cap \overline{B}=\varnothing$; $\overline{A \oplus B}=\{c, d\}$. Найдите элементы множества $A \cap B$ и элементы множества $A \oplus B$.

1.1.10. Операция поглощения

Операция поглощения имеет две формы записи:

$A \cup A \cap B=A$ (дизъюнктивная форма) (19)

$A \cap (A \cup B)=A$ (конъюнктивная форма) (20)

На рис. 24 приведена диаграмма Венна для дизъюнктивной формы. Вертикальной штриховкой обозначена область A, горизонтальной –

$A\cap B$. Штриховка не выходит за пределы области A, следовательно, все элементы множества $A\cup A\cap B$ входят в множество A, что и доказывает справедливость равенства (19).

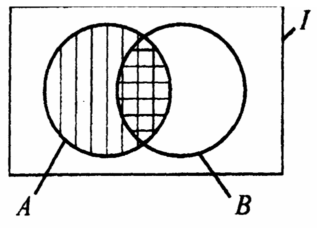


Рис. 24

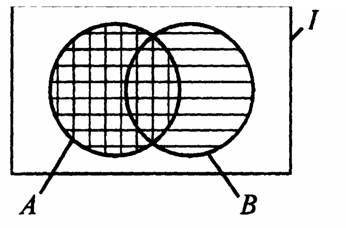


Рис. 25

По рис. 24 видно, что множество A не изменяется от добавления к нему элементов множества $A\cap B$, т.е. множество A как бы поглощает все элементы множества $A\cap B$, откуда и происходит название операции.

На рис. 25 приведена диаграмма Венна для коньюнктивной формы. Вертикальной штриховкой на диаграмме обозначено множество A, горизонтальной – множество $A\cup B$. Двойная штриховка обозначает множество $A\cap(A\cup B)$, т. е. соответствует левой части выражения (20). Она занимает всю область множества A и не выходит за ее пределы. Это значит, что множества $A\cap(A\cup B)$ и A состоят из одних и тех же элементов, т. е. равны, откуда следует справедливость формулы (20).

Операции поглощения дают возможность упрощать аналитические выражения, описывающие множества. Проиллюстрируем это на примере. Пусть некоторое множество P представлено выражением вида

$$P=A\cap B\cup A\cap B\cap C\cup A\cap B\cap C\cap D.$$

Пересечение $A\cap B\cap C$ встречается в этом выражении два раза.

Обозначим его: $Q=A\cap B\cap C$. Тогда заданное множество P примет вид:

$$P=A\cap B\cup Q\cup Q\cup D.$$

Согласно выражению (19) имеем: $Q\cup Q\cap D=Q$, следовательно,

$$P=A\cap B\cup Q=A\cap B\cup A\cap B\cap C.$$

Снова введем обозначение: $A\cap B=R$, тогда

$$P=R\cup R\cap C=R.$$

В результате получаем окончательно:

$$P=A\cap B.$$

Рассмотрим еще один пример. Упростим выражение

$$S=P\cap\overline{Q}\cap(P\cap\overline{Q}\cup R).$$

Введем обозначение: $P\cap\overline{Q}=V$, тогда множество S представится в виде

$$S=V\cap(V\cup R).$$

Согласно формуле (20) получаем:

$$S=V\cap(V\cup R)=V=P\cap\overline{Q}.$$

Упражнения

(Знак $\cap$ не набирать, т.е. вместо $A\cap B$ надо набирать AB).

1. Упростить выражения (лат.):

(539) $\overline{A}\cap B\cap C\cup\overline{A}\cap B$; (ХСС) $A\cap\overline{B}\cap C\cup\overline{B}$;

(ОИО) $A\cap B\cap\overline{D}\cup\overline{D}$; (АЧА) $A\cap\overline{B}\cap C\cup A\cap C$;

(ДИР) $\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cup\overline{A}$; (ЖИВ) $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}\cup\overline{C}$.

2. Найдите элементы множеств:

(962) $A\cap B\cap C\cup A\cap C$;

(НАЖ) $B\cap\overline{C}\cup\overline{C}\cup A\cap\overline{C}$;

(ЦАЙ) $A\cap C\cup A\cap B\cap C\cup A\cap C\cap D$,

если $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$; $C=\{2, 3, 6, 7\}$; $D=\{2, 5, 6, 7, 8\}$; $I=\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

3. Упростить выражения (лат.):

(АСС) $A\cap\overline{B}\cup A\cap\overline{B}\cap C\cup A\cap\overline{B}\cap D$; (РВР) $B\cap C\cap D\cup C\cap D\cup A\cap C\cap D$;

(438) $B\cap(\overline{A}\cap B\cup\overline{B}\cap B)$; (УФУ) $A\cap\overline{C}\cap(A\cap\overline{B}\cap C\cup A\cap\overline{B})$;

(МАГ) $(A\cup\overline{B})\cap(A\cup\overline{B}\cup C)\cap(A\cup\overline{B}\cup D)$; (ЕГО) $(\overline{A}\cup B)\cap B\cap(B\cup\overline{C})$.

4. (РНК) Найдите элементы множества

$A\cap B\cap\overline{C}\cup A\cap B\cup B$, где $A=\{1, 3, 5, 7\}$; $B=\{4, 5, 6, 7\}$; $C=\{1, 2\}$.

5. (ТЫН) Найдите элементы множества:

$A\cap B\cap C\cup A\cap C\cap\overline{D}\cup A\cap C\cup A\cap\overline{B}\cap C\cap D$, если $A=\{1, 2, 4, 6, 8\}$; $B=\{2, 3, 6\}$; $C=\{2, 4, 6, 7\}$; $D=\{4, 5, 7\}$.

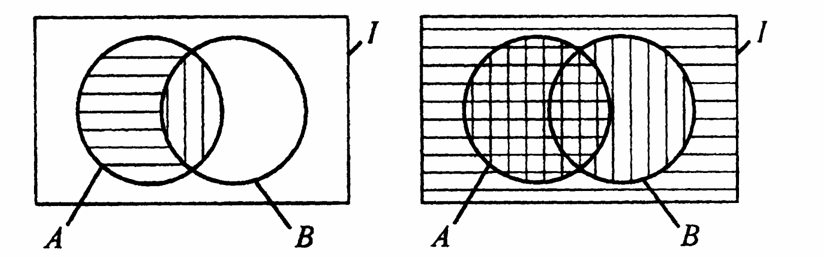
1.1.11. Операция склеивания

Операция склеивания, как и операция поглощения, имеет также две формы:

$A\cap B\cup A\cap\overline{B}=A$ (дизъюнктивная форма); (21)

$(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})=A$ (конъюнктивная форма). (22)

Рассмотрим выражение (21). На рис. 26, *а* множество $A\cap B$ обозначено вертикальной штриховкой, а множество $A\cap\overline{B}$ – горизонтальной. Область A оказалась полностью заштрихованной, при этом вне области A никакой штриховки нет. Следовательно, все элементы множества $A\cap B\cup A\cap\overline{B}$ образуют и множество A, откуда следует справедливость равенства (21).



а *б*

Рис. 26

Перейдем к выражению (22). Оно представляет собой пересечение двух множеств: $A\cup B$ и $A\cup \overline{B}$.

Обозначим множество $A\cup B$ вертикальной штриховкой на диаграмме Венна (рис. 26, *б*). Горизонтальной штриховкой на той же диаграмме обозначим множество $A\cup \overline{B}$. Двойной штриховкой заполнена область, соответствующая пересечению множеств $A\cup B$ и $A\cup \overline{B}$. По диаграмме видно, что двойной штриховкой обозначена область A и только она, следовательно, A и $A\cup B\cap A\cup \overline{B}$ – это множества, состоящие из одних и тех же элементов, что и доказывает справедливость выражения (22).

Истинность выражений (21) и (22) можно доказать и аналитически. Вынесем за скобки букву A в формуле (21), тогда в скобках получим объединение множества B и его дополнения. Объединение этих множеств есть универсальное множество. Пересечение универсального множества и множества A есть множество A. Запишем это аналитически:

$$A\cap B\cup A\cap \overline{B}=A\cap(B\cup \overline{B})=A\cap I = A.$$

Аналогичным образом докажем справедливость выражения (22), но сначала раскроем скобки:

$$(A\cup B)\cap(A\cup \overline{B})=A\cap A\cup A\cap \overline{B}\cup B\cap A\cup B\cap \overline{B}=A\cup A\cap \overline{B}\cup A\cap B=$$
$$=A\cup A\cap(\overline{B}\cup B)=A\cup A\cap I=A\cup A=A.$$

Операция склеивания используется при упрощении аналитических выражений, описывающих множества. Например:

$$A\cap B\cap C\cup A\cap \overline{B}\cap C\cup B\cap C\cup \overline{B}\cap C=A\cap C\cap(B\cup \overline{B})\cup C\cap(B\cup \overline{B})=$$
$$=A\cap C\cap I\cup C\cap I=A\cap C\cup C=C\cap(A\cup I)=C\cap I=C.$$

Упражнения

1. Упростить выражения (лат.):

(449) $A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap \overline{C}$;

(В66) $A \cap \overline{B} \cap C \cup A \cap B \cap C$;

(У65) $\overline{A} \cap B \cup \overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}$;

(ДАЧ) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}$;

(693) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap D \cup \overline{A} \cap B \cap C \cap D$;

(9А2) $A \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$.

2. Найдите элементы множеств:

(ВВ) $A \cap B \cap C \cup B \cap C \cup B \cap \overline{C}$;

(221) $(A \cap B \cup C) \cap (A \cap B \cup \overline{C})$;

(76) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup \overline{C})$;

(ТТ) $(A \cup \overline{B} \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \cap B$,

если $A=\{1, 2, 4, 5\}$; $B=\{1, 3, 6, 7\}$; $C=\{2, 3, 6, 7\}$.

3. Расставьте знаки = или $\neq$.

(СИМ)

$A \cup B \cap C \cup \overline{B} \cap C \ldots A \cup C$;

$A \cap B \cup A \cap \overline{B} \ldots A \cap \overline{B} \cup A \cap B$;

$\overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C \cup B \ldots B$;

$A \cap B \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap B \ldots B \cap C$;

$(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \ldots \overline{(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}$;

$(A \cap B \cup C) \cap (\overline{A \cap B} \cup C) \ldots C$.

(ЛЫН)

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cup A \cap \overline{B} \cap C \ldots B \cup C$;

$A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap C \cup A \cap C \ldots A \cup C$;

$A \cap B \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B \cup \overline{A} \cap \overline{B} \ldots \varnothing$;

$(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \ldots \varnothing$;

$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \ldots A \cap B$;

$(A \cap B \cup \overline{A} \cap B) \cap \overline{B} \ldots \varnothing$.

4. Упростить, если $A \subset B \subset C$:

(РИС) $A \cup B \cup A \cap C \cup \overline{A} \cap C$;

(ЦК) $B \cap C \cup B \cap \overline{C} \cup A \cup \overline{C}$;

(ЯГО) $(B \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap \overline{C}) \cap A$;

(УВД) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cup (A \cap C)$.

1.1.12. Теоретико-множественные преобразования

Обычно под теоретико-множественными преобразованиями понимают выполнение таких операций над множествами, в результате которых получается новое аналитическое выражение, тождественно равное исходному, но внешне отличающееся от него набором символов, их числом, порядком записи и др. Часто целью преобразований является упрощение формул, сводящееся к уменьшению числа входящих в них знаков. Упрощенные выражения могут подвергаться дальнейшим преобразованиям с учетом каких-либо дополнительных условий. Такими условиями могут быть: учет отношений между множествами, замена одного множества другим, удаление того или иного множества, нахождение дополнения и др. Все подобные преобразования осуществляются на основе свойств операций объединения, пересечения и дополнения с применением формул поглощения и склеивания, а также законов де Моргана. Этим преобразованиям посвящен данный подраздел.

Рассмотрим пример: упростить формулу для множества Р, выраженного через множества A, B, C, D:

$$P = A\cap B\cup A\cap \overline{B} \cup B\cap D\cup C\cap D.$$

Найти выражение P для случая, когда $C\subset D$ и, если $B=\varnothing$.

Сначала упростим заданное выражение:

$$P = A\cap(B\cup \overline{B})\cup B\cap D\cup C\cap D = A\cup B\cap D\cup C\cap D.$$

Найдем выражение P при $C\subset D$:

$$P = A\cup B\cap D\cup C.$$

Найдем выражение P при $B=\varnothing$ и $C\subset D$:

$$P = A\cup D\cap\varnothing\cup C = A\cup C.$$

Это есть искомый результат упрощения.

Упражнения

1. Упростить выражения:

(556) $A\cap B\cap \overline{C} \cup A\cap B\cap C\cup C$;

(УЭЛ) $A\cap C\cup A\cap \overline{C} \cup \overline{A}\cap C$;

(ЦАМ) $B\cap \overline{C} \cup \overline{B}\cap \overline{C} \cup B\cap C$;

(ТИН) $\overline{A}\cap \overline{B} \cup A\cap B\cup \overline{A}\cap B$.

2. Упростить выражения, если $C=I$, $D=\varnothing$.

(УТТ) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$;

(ХТБ) $\overline{A}\cap \overline{B}\cap C\cup B\cap C\cap D$;

(ШАВ) $(\overline{A}\cup B\cup C)\cap(C\cup D)$;

(МКП) $A\cap C\cup\overline{B}\cap C\cup A\cap D$;

(826) $\overline{A}\cap(B\cup C\cup D)\cap B\cap C$;

(МИН) $(A\cup B\cup C)\cap(\overline{B}\cup D)$.

3. Упростить, если $C\subset D$, $A\subset B$.

(АИ) $A\cap B\cap C\cap D$.

(УТ) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}$.

(АЮ) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$.

(ОТЫ) $A\cap\overline{B}\cup C\cap\overline{D}$.

(УРУ) $\overline{A\cup B}\cap\overline{C\cup D}$.

(ББ) $(A\cup B\cup C)\cap(B\cup C\cup D)$.

4. Чему равны выражения, если $A=B=C=D=I$?

(МУФ) $(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{C}\cup D)$.

(МАХ) $A\cap B\cap\overline{E}\cup\overline{A}\cap E$.

(ЗУЗ) $(\overline{A}\cup\overline{B}\cup E)\cap(B\cup E)$.

(КВА) $(\overline{A}\cup E)\cap(\overline{B}\cup\overline{E})$.

(265) $A\cap B\cap\overline{E}\cup\overline{B}\cap E$.

(НЕП) $A\cap\overline{B}\cup C\cup E$.

5. Чему равны выражения, если принять $B=C=\varnothing$?

(РЛА) $A\cup B\cup C\cup D$.

(УЛА) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}$.

(РИД) $\overline{A}\cup B\cup D$.

(БКТ) $B\cap C\cup A\cap\overline{D}$.

(МАД) $(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{C}\cup D)$.

(ЮХЕ) $(A\cup\overline{B})\cap(B\cup C)$.

6. Даны множества: $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B=\{4, 5, 6, 7\}$; $I=\{1, 2,..., 9\}$. Какие элементы необходимо удалить из множества I, чтобы выполнялись следующие равенства?

(657) $A\cap B=\varnothing$. (57) $B\backslash A=\varnothing$.

(ЛВС) $A\backslash B=\varnothing$. (МВ) $A\cup\overline{B}=\varnothing$.

(ББТ) $A\oplus B=\varnothing$. (ЮГ) $\overline{A\cup B}=\varnothing$.

7. Даны множества: $A=\{1, 2, 3\}$; $B=\{1, 2\}$; $C=\{3, 4, 5\}$; $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Укажите номера пустых множеств.

(В7)	(ВТ)
1) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$;	1) $A\cap B\cap\overline{C}$;

2) $\overline{A}\cap B\cap C$;
3) $\overline{A}\cap B\cap \overline{C}$;
4) $\overline{A}\cap B\cap C$;
5) $A\cap \overline{B}\cap \overline{C}$;
6) $A\cap \overline{B}\cap C$.

2) $A\cap B\cap C$;
3) $A\cap B\cup \overline{B}\cap C$;
4) $B\cap C\cup A\cap \overline{B}\cap \overline{C}$;
5) $A\cap B\cap C\cup A\cap \overline{B}\cap \overline{C}$;
6) $A\cup B\cup C$.

(ИЙ)
1) $(A\cup B)\cap \overline{C}$;
2) $(B\cup \overline{C})\cap(A\cup C)$;
3) $(A\cup B)\cap A\cap C$;
4) $\overline{A}\cap B\cup B\cap C$;
5) $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup \overline{B})$;
6) $\overline{\overline{A}\cup \overline{B}\cup \overline{C}}\cap A$.

8. Даны множества: A={1, 2, 4, 6, 7}; B={1, 2, 4}; C={6, 7, 8}; I={1, 2,..., 8}. Найдите элементы множеств:
(156) $A\cap B\cup \overline{A}\cap \overline{C}$;
(ЛБЛ) $A\cap \overline{B}\cap C\cup B\cap C$;
(ЕНЫ) $(A\cup B)\cap(B\cup \overline{C})$;
(ФФ) $B\cup A\cap \overline{B}\cap C\cup \overline{A}\cap C$;
(ЯК) $(A\cup \overline{C})\cap(B\cup C)$;
(ЭХ) $A\cap B\cap C\cup \overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C}$.

1.2. Бинарные отношения

1.2.1. Декартово произведение множеств

Рене Декарт – французский философ и математик, один из первых создателей формального языка математики – жил в 17 веке (1596–1659). Теория множеств появилась спустя 200 лет, т.е. в 19 веке, поэтому Р. Декарт об этой теории никогда не слышал и заниматься ею не мог. Название операции «декартово произведение» появилось в связи с тем, что в теории множеств нашел применение метод координат, разработанный Р. Декартом.

Рассмотрим два непересекающихся множества $A=\{a_1, a_2,..., a_n)$ и $B=\{b_1, b_2,..., b_m\}$. Выберем какой-нибудь элемент из множества A и припишем к нему справа некоторый элемент множества B. Получим упорядоченную пару. Элементы, образующие пару, будем записывать в круглых скобках, отделяя один элемент от другого запятой: (a_i, b_j), где $a_i\in A$; $b_j\in B$; i=1, 2, 3,…, n; j=1, 2, 3,…, m. (Некоторые авторы упорядоченную пару обозначают иначе, например: $<a_i, b_j>$ [35]; (x, y) [22; 33]). Множество всех пар (a_i, b_j) называют декартовым произведением множеств (иногда – прямым произведением [6; 22; 33]). Для обозначения этой операции используется знак арифметического умножения: $A\times B$.

Формально декартово произведение множеств A и B определяется следующим образом:

$$A\times B=\{(x, y) \mid x\in A \wedge y\in B\}.$$

Читается эта запись так: декартово произведение множеств A и B – это множество пар (x, y), где x – элемент множества A, y – элемент множества B.

Точно так же определяется декартово произведение множеств $B\times A$:

$$B\times A=\{(y, x) \mid y\in B \wedge x\in A\}.$$

Рассмотрим пример. Пусть $A=\{1, 2, 3, 4\}$ и $B=\{a, b, c\}$.

Тогда

$$A\times B=\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\},$$

$$B\times A=\{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 3), (a, 4), (b, 4), (c, 4)\}.$$

Из этих двух выражений следует, что $A\times B\neq B\times A$, т.е. операция декартова произведения некоммутативна. Кроме того, $(A\times B)\cap(B\times A)=\varnothing$, поскольку $A\cap B=\varnothing$ и множество $A\times B$ содержит те же пары, что и множество $B\times A$, но порядок элементов в парах другой. Если же $A\cap B\neq\varnothing$, то и $(A\times B)\cap(B\times A)\neq\varnothing$.

Рассмотрим, например, множества $A=\{a, b, c\}$ и $B=\{c, d\}$. Пересечение этих множеств непусто: $A\cap B=\{c\}$. Найдем $A\times B$ и $B\times A$:

$$A\times B=\{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d)\};$$

$$B\times A=\{(c, a), (d, a), (c, b), (d, b), (c, c), (d, c)\}.$$

По этим двум выражениям видно, что множество $(A\times B)\cap(B\times A)=\{(c, c)\}$, т.е. непусто.

Операция декартова произведения применима не только к двум, но и большему числу множеств:

$$M=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(a_1, a_2,\ldots, a_n) \mid a_1\in A_1 \wedge a_2\in A_2 \wedge\ldots\wedge a_n\in A_n\}.$$

Операция декартова произведения множеств ассоциативна:

$$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)=A\times B\times C,$$

благодаря чему при записи декартова произведения нескольких множеств скобки можно не использовать.

Для декартова произведения множеств справедливы следующие законы дистрибутивности [28, с.137]:

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C);$$

$$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C),$$

что позволяет раскрывать скобки в выражениях, содержащих операцию декартова произведения и операции объединения, либо разности множеств.

Если $|A|$ и $|B|$ – кардинальные числа множеств A и B, то

$$|A\times B|=|B\times A|=|A|\cdot|B|,$$

где точка между символами $|A|$ и $|B|$ обозначает операцию арифметического умножения. Например, при $A=\{a, b, c\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеем:

$$|A|=3;\ |B|=5;\ |A\times B|=3\cdot 5=15.$$

Если $|A_1|, |A_2|,\ldots,|A_n|$ – кардинальные числа множеств $A_1, A_2,\ldots, A_n$, то

$$|A_1\times A_2\times\ldots\times A_n|=|A_1|\times|A_2|\times\ldots\times|A_n|, \tag{23}$$

т.е. чтобы определить число элементов декартова произведения нескольких множеств, достаточно найти арифметическое произведение их кардинальных чисел.

Упражнения

1. (УЛ) Найдите элементы множества $(A\times B)\cap(B\times A)$, если

$$A=\{a, b\};$$
$$B=\{b, c\}.$$

При наборе элементов пар используйте запятую. Например: *a*, *c*. Скобки не вводить.

2. (5Б) Найдите $|A\times B|$ и $|(A\times B)\cap(B\times A)|$, если

$$A=\{a, b, c\};\ B=\{b, c\}.$$

3. (АТ) Найдите элементы множества A и множества B, если

$$A\times B=\{(b, m), (c, m), (e, m), (b, n), (c, n), (e, n)\}.$$

4. (РЯО) Известно, что $|A\times B|=49$. Множество B увеличили на три элемента. Получили множество B'. Найдите $|A\times B'|$, если A и B – не синглетоны.

5. (ПХВ) Найдите $|(A\times B)\cup(B\times C)|$, если $A=\{2, 3, 4\}$; $B=\{a, b, c, d, e\}$; $C=\{\alpha, \beta, \gamma, S\}$.

6. (БРУ) Найдите $|B(A\times C)|$, если $A=\{m, n, k\}$; $C=\{2, 4\}$, где $B(A\times C)$ – булеан множества $A\times C$.

7. (ДОН) Декартово произведение множеств A и B содержит 12 элементов. Известно, что:

$$A=\{a, b, c\};\ A\cap B=\varnothing.$$

Найдите число собственных подмножеств множества B.

8. (МЕН) Даны множества $A=\{a, b, c\}$; $B=\{b, c, d, e\}$. Найдите $|P\times Q|$, если $P=A\cap B$, $Q=\overline{A}\cap B$.

9. (279)! Даны множества: $A=\{a, b, c, d\}$; $B=\{b, c, e, f\}$. Найдите $|P\times Q|$, если $P=A\oplus B$, $Q=A\cap B$. Найдите $|P\times Q|$, если $P=A$; $Q=\overline{A}\cap B$.

10. (137) Даны множества: $A=\{a, b, c\}$; $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Укажите номера упорядоченных пар, являющихся элементами множества $A\times B$:

1) a, 1; 2) 3, c; 3) b, c; 4) c, 5; 5) 2, 3; 6) 4, a; 7) b, 4.

11. (ЛГ)! Даны множества A, B, C. Известно, что $A\subset B\subset C$; $A\neq\varnothing$; $|A\cup B\cup C|=3$. Найдите: $|B\times(\overline{B}\cap C)|$; $|A|$; $|B|$; $|C|$.

12. (ЧА)! Даны множества I, A, B. Известно, что $I=\{0, 1,..., 7\}$; $\overline{A\cup B}=\{2, 3\}$; $A\oplus B=\{0, 1, 4\}$. Найдите элементы множества $A\cap B$. Определите $|\overline{A\oplus B}\times(A\cap B)|$.

1.2.2. Степень множества

Если в декартовом произведении n множеств $A_1, A_2,\ldots, A_n$ принять $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$, то получим:

$$M=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n\text{ раз}}=A^n,$$

где A^n – степень множества A [6]. Элементы множества A^n называют кортежами длины n. Пусть, например, $A=\{a, b, c,\}$, тогда:

$A^1 = \{(a), (b), (c)\}$;

$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$;

$A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), (a, b, a),\ldots, (c, c, c)\}$;

$A^4 = \{(a, a, a, a), (a, a, a, b), (a, a, a, c),..., (c, c, c, c)\}$ и т.д.

Согласно (23) для этих примеров имеем:

$$|A^1| = 3 = 3^1;$$
$$|A^2| = 3\cdot 3=3^2;$$
$$|A^3| = 3\cdot 3\cdot 3=3^3;$$
$$|A^4| = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^4 \text{ и т. д.}$$

По этим записям видно, что множество A^1 содержит три кортежа, где каждый кортеж состоит из одного элемента и имеет длину, равную единице. Множество A^2 содержит 9 кортежей длины 2, множество A^3 состоит из 27 кортежей длины 3 и т. д.

В общем случае справедливо соотношение:

$$|A^n| = |A|^n.$$

Упражнения

1. (ПА) Найдите $|A^4|$, если $A=\{3, 4, 5, 7, 8\}$.

2. (АЛ) Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых нет цифр 0, 1, 2, 3, 4?

3. (УХС) Найдите n, если $|A^n|=2048$.

4. (ЦМП)! Найдите $|A|$, если $|A^n|=243$. Найдите n.

5. (ВИГ) Найдите $|B(A)|$, если $|A^2|=49$.

6. (ВИК) Известно, что $|B(A)|=64$. Найдите $|A^3|$.

7. (МЫС) Найдите длину кортежа, если $A=\{2, 3\}$ и $|A^n|=1024$.

1.2.3. Понятие бинарного отношения

Пусть дано декартово произведение двух непустых множеств A и B, при этом множества могут быть любыми: пересекающимися, равными, входящими одно в другое и т.д. Элементами множества $A\times B$ являются упорядоченные пары (a_i, b_j), где $a_i\in A$; $b_j\in B$; $i=1, 2,\ldots, |A|$; $j=1, 2, 3,\ldots, |B|$. Всякое подмножество декартова произведения $A\times B$ называется бинарным отношением, определенным на паре множеств A и B [54, с. 20] (по латыни «бис» обозначает «дважды»). Термин «бинарное отношение» не является единственным, например, в [24; 28] используется название «диадическое отношение», в [17] – двухместное отношение. А некоторые авторы произвольное подмножество множества $A\times B$ называют не отношением, а соответствием, используя термин «бинарное отношение» в более узком смысле [11, с. 16–17].

Для обозначения бинарного отношения применяют знак R. Поскольку R – это подмножество множества $A\times B$, то можно записать $R\subseteq A\times B$ [54, с. 21]. Если же требуется указать, что $(a, b)\in R$, т. е. между элементами $a\in A$ и $b\in B$ существует отношение R, то пишут aRb. Пусть, например:

$$A = \{1, 2, 3\}; \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \tag{24}$$

Множество $A\times B$ содержит 18 упорядоченных пар. Выделим на этом множестве отношение «больше»: $a>b$, где $a\in A$ и $b\in B$. Тогда

$$R=\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\},$$

т.е. из 18 пар множества $A\times B$ три упорядоченные пары принадлежат отношению aRb, где R обозначает слово «больше». Если вместо букв подставить их значения, то получим верные утверждения:

$$2>1;\ 3>1;\ 3>2.$$

Очевидно, что в этом случае справедливо равенство:

$$aRb=\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть R обозначает «меньше простого числа» на множествах (24). Тогда

$$aRb=\{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5)\}.$$

Если вместо всех трех букв a, R, b подставить их значения, то получим шесть верных утверждений:

1 меньше простого числа 2;

1 меньше простого числа 3, и т. д.

При подстановке других значений a и b (но при том же R) будем получать ложные утверждения.

Среди подмножеств множества $A\times B$ имеется $2^{|A\times B|}$-2 собственных подмножеств и два несобственных: одно из них пусто, а второе совпадает с самим множеством $A\times B$. Формально оба эти несобственные подмножества также представляют собой некоторые отношения между элементами множеств A и B.

Многие авторы понятие бинарного отношения определяют через квадрат множества. Например, В.А. Горбатов пишет: «Бинарным отношением T в множестве M называется подмножество его квадрата: $T\subset M^2$» [16, с. 13].

На первый взгляд кажется, что определение В.А. Горбатова является частным случаем по отношению к вышерассмотренному. Но это неверно. Если T – подмножество декартова произведения $A\times B$, где A и B – произвольные множества, то подмножество T можно выделить и из квадрата множества M, где $M = A\bigcup B$.

Пусть, например,

$$A=\{1, 2, 3, 4\}; \qquad B=\{a, b, c, e, f\}.$$

Выделим в множестве $A\times B$ отношение T: «четное число, гласная буква»:

$$T = \{(2, a), (4, a), (2, e), (4, e)\}. \qquad (25)$$

Объединим множества A и B: $M=A\bigcup B$. Очевидно, что в множестве M^2 отношение T будет иметь такой же вид, что и (25).

Мы в дальнейшем будем пользоваться понятием бинарного отношения, определенным как через квадрат одного и того же множества, так и через декартово произведение двух различных множеств.

Данный раздел темы назван «Бинарные отношения», однако при необходимости будем рассматривать и n-арные отношения, как подмножества множества A^n.

Задавать бинарные отношения можно разными способами. Один из них мы уже рассмотрели. Это использование правила, согласно которому указываются все элементы, входящие в данное отношение. Вместо правила можно привести список элементов заданного отношения путем непосредственного их посимвольного перечисления. В [54, с. 20] указаны еще три способа задания отношений – табличный, в виде графов и с помощью сечений. Наиболее употребительным является табличный способ. Его основу составляет прямоугольная система координат, где по одной оси откладываются элементы одного множества, по второй – другого. Пересечения координат образуют точки, обозначающие элементы декартова произведения.

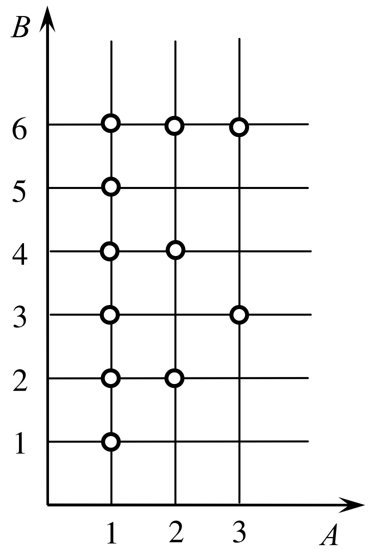


Рис. 27

На рис. 27 приведена координатная сетка множества (24). Точкам пересечения трех вертикальных линий и шести горизонтальных соответствуют элементы множества $A \times B$. Кружочками отмечены элементы отношения aRb, где $a \in A$ и $b \in B$, R обозначает отношение «делит».

Бинарные отношения задаются двухмерными системами координат. Очевидно, что все элементы декартова произведения трёх множеств могут быть представлены в трехмерной системе координат, четырех множеств – в четырехмерной системе и т.д.

Второй способ представления отношений – в виде графов – применяется так же часто, как и первый (табличный). Однако для его изложения необходимо привлечение таких понятий, как орграф, дуга, двудольный граф и некоторые другие, в связи с чем с этим способом интересующиеся могут ознакомиться в литературе в теме «Теория графов», например, [54].

Способ задания отношений с помощью сечений используется реже, поэтому рассматривать его не будем. При необходимости каждый желающий может ознакомиться с ним, обратившись к специальной литературе, например, [54, с. 20].

Упражнения

1. (82Р) Найдите $|R|$, если R определено следующим образом: x

делит y (без остатка), $x\in A$, $y\in B$, где

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}; \qquad B=\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}. \qquad (26)$$

2. (ПХС) Найдите $|R|$, если R на паре множеств (26) определено следующим образом: $x<y$, где $x\in A$, $y\in B$.

3. (ФКТ) Определите $|aRb|$ для множеств (26), если R – это отношение: $a\in A$ – нечетное число; $b\in B$.

4. (38У) Определите $|aRb|$ для множеств (26), если R – это отношение: $a\in A$ – простое число; $b\in A\cup B$ – четное или простое число.

5. (ФОЕ) Найдите $|\overline{R}|$ для множеств (26), если R – отношение: $a=b$; где $a\in A$; $b\in B$.

6. (ДМХ) Найдите $|R|$, если R определено следующим образом: $x\in \overline{A}\cap B$; $y\in A\cap \overline{B}$, где

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}. \qquad (27)$$

7. (415) Укажите номера всех пар, являющихся элементами отношения:

a-b=2; $a\in A$; $b\in B$, A и B – множества (27):

1) 3, 1; 2) 6, 4; 3) 4, 6; 4) 5, 3; 5) 4, 2; 6) 7, 5; 7) 8, 6.

8. (ХАХ) Укажите номера всех пар, являющихся элементами отношения: $2a$-b=0; $a\in A$; $b\in B$, A и B – множества (27):

1) 4, 2; 2) 1, 2; 3) 4, 8; 4) 3, 6; 5) 6, 12; 6) 2, 4.

9. На множестве букв русского алфавита найдите элементы отношений T, R, S.

(УМ) Определите $|T|$, если T – множество двухбуквенных слогов, где первая буква согласная, а вторая – гласная.

(ТЮ) Определите $|R|$, если R – множество пар букв, где обе буквы различные.

(ХАФ) Определите $|S|$, если S – множество пар букв, где обе буквы гласные.

10. (КТС) На множестве A десятичных цифр определите $|R|$, если R – множество двухразрядных десятичных чисел, для которых справедливо: $x>y$; x, $y\in A$; x – цифра старшего разряда, y – цифра младшего разряда.

1.2.4. Симметрия отношений

Пусть дано множество M. Его квадратом является множество $M\times M=M^2$. Выделим в этом квадрате подмножество R, представляющее собой некоторое отношение. Всякое бинарное отношение R в множестве M может быть либо симметричным, либо асимметричным, либо несимметричным [28] (в [24] используются термины: симметрическое, асимметрическое и несимметрическое отношения).

Пусть между элементами $a \in M$ и $b \in M$ имеется отношение R. Переставим местами a и b. Если при этом отношение R сохранится, то такое отношение является симметричным. Примером может служить отношение «быть братом»: Если Костя – брат Толи, то и Толя – брат Кости.

Отношение является асимметричным, если оно имеет место между элементами a и b, но отсутствует между элементами b и a. Пример асимметричного отношения: «находится в...». Если «книга находится в шкафу» – верное утверждение, то «шкаф находится в книге» – утверждение ложное.

Отношение является несимметричным в том случае, если оно не является симметричным и не является асимметричным, т.е. если имеет место отношение aRb, то отношение bRa может быть, но может и не быть. Пример – отношение «a увидел b»: если Саша увидел Игоря, то возможно, что и Игорь увидел Сашу, но мог и не увидеть.

Кроме симметричных, асимметричных и несимметричных отношений в математической литературе рассматривается еще один вид симметрии – антисимметричность. Если отношения aRb и bRa имеют место лишь при $a=b$, то отношение R называют антисимметричным [11, с. 80; 16, с. 16; 35, с. 17; 54, с. 38; 56, с. 6]. Примером может служить отношение «меньше или равно». (В [3, с. 77] термин «антисимметричность» используется для обозначения асимметричности. В таком же смысле этот термин использован и в [30, с. 43]).

Упражнения

1. (НА) Укажите симметричные отношения:

1) Таня – сестра Пети;

2) прямая A перпендикулярна прямой B;

3) город Томск расположен севернее города Новосибирска;

4) тетрадь находится в портфеле;

5) Зина – сестра Оли;

6) 25+10=15+20;

7) прямая A параллельна прямой B.

2. (ЕНУ) Укажите асимметричные отношения в предыдущем упражнении.

3. (ХВУ) Укажите асимметричные отношения:

1) я встретился со своим другом;

2) Иван пришел в гости к своему другу Петру;

3) дерево свалилось на дорогу;

4) Иванов проиграл в шахматы Петрову;

5) Андрей не проиграл в шашки Сергею;

6) Останкинская башня выше Эйфелевой башни;

7) Сидоров хорошо относится к Петрову;

8) масса бетонной плиты A не превышает массы стальной плиты B.

4. (ОО3) Укажите несимметричные отношения в упр. 3.

5. (323) Укажите симметричные отношения в упр. 3.

6. (ЕЛТ) Укажите несимметричные отношения:

1) Иван узнал Петра;

2) лесоруб спилил дерево;

3) столяр изготовил оконную раму;

4) Иванов поздоровался с Орловым;

5) олень увидел в зарослях тигра;

6) число a не больше числа b, где $a, b \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$.

7) число 325 содержит столько же цифр, что и число 891.

7. (881) Укажите антисимметричные отношения в упр. 6.

8. (ЯВЕ) В упр. 6 укажите асимметричные отношения.

9. (МОФ) В упр. 6 укажите симметричные отношения.

10. (152) Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) существуют отношения, одновременно являющиеся асимметричными и несимметричными?

2) существуют отношения, не являющиеся симметричными и не являющиеся асимметричными?

3) если отношение асимметрично, то оно не является несимметричным?

4) если отношение не является симметричным, то оно либо асимметрично, либо несимметрично?

5) если отношение aRb симметрично, то оно останется симметричным при перестановке элементов a и b?

6) если отношение несимметрично, то оно не может быть асимметричным?

7) если отношение несимметрично, то оно одновременно является асимметричным?

1.2.5. Транзитивность отношений

Любое бинарное отношение R в множестве M является либо транзитивным, либо интранзитивным, либо нетранзитивным [24; 28].

Отношение R в множестве M называется транзитивным, если из aRb и bRc следует aRc. Например, отношение «больше» на множестве положительных чисел является транзитивным, поскольку если, $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

Отношение называется интранзитивным, если из aRb и bRc следует, что утверждение aRc является ложным. Примером может служить отношение «больше на 4». Если «a на 4 больше b» и «b на 4 больше c», то утверждение «a на 4 больше c» ложно.

Отношение называется нетранзитивным, если оно не является транзитивным и не является интранзитивным, т.е. из того что имеет место отношение aRb и bRc, утверждение aRc может быть и истинным, и ложным. Например, если «A знаком с B», а «B знаком с C», то относительно истинности утверждения «A знаком с C» ничего определенного сказать нельзя.

Если $R_Т \subset M^2$ – транзитивное отношение, $R_Н \subset M^2$ – нетранзитивное и $R_И \subset M^2$ – интранзитивное, то как следует из их определений:

$$R_Т \cap R_И = R_Т \cap R_Н = R_И \cap R_Н = \varnothing.$$

Упражнения

1. (РФО) Укажите транзитивные отношения:

1) равно;	5) меньше на 5;
2) больше или равно;	6) быть южнее;
3) не равно;	7) быть врагом;
4) быть другом;	8) быть логарифмом.

2. (АЗО) Укажите интранзитивные отношения в упр. 1.
3. (220) Укажите нетранзитивные отношения в упр. 1.
4. (ШМП) Укажите интранзитивные отношения:

l) квадратный корень;	5) равно половине;
2) старше, чем;	6) является предком;
3) больше в три раза;	7) является матерью;
4) дружит;	8) здоровается.

5. (С51) Укажите нетранзитивные отношения в упр. 4.
6. (ФАФ) Укажите транзитивные отношения в упр. 4.
7. (581) Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли отношение быть интранзитивным и нетранзитивным

одновременно?

2) верно ли, что если отношение является нетранзитивным, то оно может быть транзитивным?

3) существуют ли отношения, которые не являются транзитивными, не являются интранзитивными и не являются нетранзитивными одновременно?

4) может ли отношение быть одновременно транзитивным и симметричным?

5) существуют ли отношения, не являющиеся транзитивными и не являющиеся симметричными одновременно?

6) верно ли, что если отношение нетранзитивно, то оно всегда несимметрично?

7) может ли асимметричное отношение быть интранзитивным?

1.2.6. Рефлексивность отношений

Отношение R в множестве M называется рефлексивным, если для всякого $a \in M$ утверждение aRa является истинным. Например, отношение параллельности прямых является рефлексивным, так как всякая прямая параллельна самой себе.

Отношение называется антирефлексивным, если ни один элемент $a \in M$ не находится в отношении R с самим собой [3, с. 75; 11, с. 80]. (В [48, с. 63] такие отношения называются иррефлексивными). Например, отношение перпендикулярности прямых является антирефлексивным, поскольку всякая прямая не является перпендикулярной самой себе.

Существуют отношения, не являющиеся ни рефлексивными, ни антирефлексивными. Пусть, например, M – множество точек на плоскости. Рассмотрим отношение: «точка a симметрична точке b относительно прямой, лежащей в той же плоскости». Если точки лежат не на прямой, то утверждения aRa и bRb являются ложными. Но все точки, лежащие на прямой, симметричны сами себе. Следовательно, данное отношение не является рефлексивным и не является антирефлексивным.

Упражнения

1. (ЖЛВ) Укажите рефлексивные отношения:

1) Таня – сестра Зины;

2) $a \leq b$, где a и b – натуральные числа;

3) $a \neq b$, где a и b – натуральные числа;

4) треугольник a подобен треугольнику b;

5) площадь круга a больше площади круга b;

6) Иван написал письмо Петру;

7) выражения a и b имеют одно и то же значение в множестве числовых выражений.

2. (ЛОЙ) Укажите транзитивные отношения в упр. 1.

3. (Р65) Укажите симметричные отношения в упр. 1.

4. (Б35) Укажите отношения в упр. 1, которые являются симметричными и транзитивными.

5. (АЭЛ) Укажите рефлексивные отношения:

1) точка a удалена от точки b на 4 см;

2) по количеству жителей город A равен городу B;

3) дробь a равна дроби b в множестве дробей;

4) число a делится на b без остатка в множестве целых положительных чисел;

5) площадь фигуры a равна площади фигуры b в множестве геометрических фигур на плоскости;

6) числа a и b при делении на 5 дают один и тот же остаток;

7) a-b≠0, где a, b∈{3, 4, 5, 6, 7}; a-b – положительное число.

6. (Б37) Укажите симметричные отношения в упр. 5.

7. (БКМ) Укажите транзитивные отношения в упр. 5.

8. (697) Укажите рефлексивные отношения:

1) a похож на b (в множестве людей);

2) в книге a в два раза больше страниц, чем в книге b;

3) фраза a имеет тот же смысл, что и фраза b;

4) Петров и Сидоров имеют одинаковый рост;

5) дорога a имеет ту же длину, что и дорога b;

6) Смирнов и Васильев живут на третьем этаже;

7) поезд a идет быстрее поезда b.

9. (ОПО) Укажите отношения, являющиеся одновременно транзитивными и рефлексивными:

1) число a равно числу b;

2) Иванов и Петров служат в одном полку;

3) a и b равновеликие треугольники;

4) число a не больше числа b;

5) тетрадь a дороже тетради b;

6) Афанасьев слушает Васильева;

7) Иванов дал книгу Петрову.

1.2.7. Отношения эквивалентности

Если отношение R в множестве M обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, то оно называется отношением эквивалентности. Пусть M – множество студентов. Тогда отношение aRb, где $a, b \in M$, а R обозначает «быть однокурсником», является отношением эквивалентности, поскольку оно рефлексивно (студент является однокурсником по отношению к себе), симметрично (если a – однокурсник по отношению к b, то и b – однокурсник по отношению к a), транзитивно (если a – однокурсник по отношению к b, b – однокурсник по отношению к c, то a – однокурсник по отношению к c).

Отношение эквивалентности разбивает множество M на непересекающиеся классы эквивалентности. В рассмотренном примере отношение «быть однокурсником» разбивает все множество студентов на пять непересекающихся классов (при пятилетней системе обучения), где первый класс образуют все студенты первого курса, второй – второго курса и т.д. Множество всех классов эквивалентности образует фактор-множество M/R множества M, где M – исходное множество (в рассмотренном примере M – множество студентов всех курсов). Очевидно, что классы фактор-множества являются непересекающимися.

Упражнения

1. (УЛЭ) Укажите отношения эквивалентности:
1) быть попутчиком в одном вагоне пассажирского поезда;
2) $a+b=100$, где $a, b \in \{1, 2, ..., 100\}$;
3) $a=b$, где $a, b \in \{1, 4, 8, 9\}$;
4) прямая a перпендикулярна прямой b;
5) треугольник a подобен треугольнику b;
6) Сидоров живет двумя этажами выше Михайлова;
7) a сердит на b.
2. (146) Укажите отношения эквивалентности:
1) Иванов задал вопрос Петрову;
2) книга a имеет такую же цену, что и книга b;
3) Смирнов попрощался с Федоровым;
4) Саша позвал в гости Игоря;
5) Павлов и Васильев смотрят один и тот же фильм;
6) высота горы a равна высоте горы b;
7) Федоров и Совин поступили в ЮТИ ТПУ в одном и том же году.

3. (ЕЦЛ) Укажите отношения эквивалентности:

1) солдат Петров идет в ногу с солдатом Ивановым в одном и том же отряде;

2) Смирнов позвонил на работу Чичикову;

3) Павлов встретил на вокзале своего друга Васильева;

4) автомобиль «Москвич» едет по той же дороге, что и автомобиль «Жигули»;

5) автомобиль a столкнулся с автомобилем b;

6) Иванов прочитал книгу, написанную Соколовым;

7) Юра прилетел в Москву одновременно с Борисом.

4. (АПО) На множестве всех жителей 50 штатов США задано отношение: «a и b – жители одного и того же штата». Найдите $|M/R|$.

5. (42Р) Определите $|M/R|$, если на множестве M всех жителей пятиэтажного дома задано отношение: «a и b живут на одном и том же этаже».

6. (ЖБК) Укажите номера свойств, которыми обладает отношение сравнимости целых чисел по модулю натурального числа:

1) асимметричность;
2) несимметричность;
3) транзитивность;
4) нетранзитивность;
5) рефлексивность;
6) симметричность;
7) интранзитивность.

1.2.8. Отношения строгого порядка

Если элементы некоторого множества мы располагаем в определенном порядке, то сначала выбираем первый элемент, затем второй и т.д., т.е. в сущности, как сказано в [11, с. 46], элементы множества упорядочены, если они каким-либо образом пронумерованы. Очевидно, что в этом случае между элементами существует отношение «следовать за»: a следует за b. Отношение следования обладает свойством транзитивности (если a следует за b, а b следует за c, то a следует за c), но является асимметричным (если a следует за b, то b не может следовать за a) и не является рефлексивным (элемент a не может следовать за самим собой).

Если отношение R в множестве M является транзитивным и асимметричным и не является рефлексивным, то оно называется отношением строгого порядка. Пусть, например, $M=\{1, 2, 3, 4\}$. Тогда отношение «a больше b» имеет вид:

$$R=\{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Упражнения

1. (22Р) Укажите отношения строгого порядка:

1) Иванов выше Сидорова;

2) Лена – сестра Наташи;

3) отрезок *a* короче отрезка *b*;

4) отрезок *a* длиннее отрезка *b* на 2 см;

5) Васильев знает Петрова;

6) Иванов живет этажом выше Соколова;

7) спортсмен Семенов бежит непосредственно за Николаевым.

2. (43Р) Укажите отношения строгого порядка:

1) число *a* непосредственно следует за числом *b*, где $a, b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$;

2) число *a* на 4 больше числа *b*, где $a, b \in \{1, 2, ..., 10\}$;

3) между числами *a* и *b* находится точно одно число ($a, b \in \{1, 2, ..., 10\}$);

4) число *a* равно числу *b*, где $a, b \in \{1, 2, ..., 10\}$;

5) число *a* следует за числом *b*, где $a, b \in \{1, 2, ..., 10\}$;

6) число *a* больше в два раза числа *b*, где $a, b \in \{1, 2, ..., 20\}$;

7) Саша старше Димы.

3. (ОХШ) Найдите $|aRb|$, где $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, если *R* – отношение «меньше».

4. (МОК) Найдите $|aRb|$, где $a, b \in \{1, 4, 7, 10, 15\}$, если *R* – отношение «больше».

1.2.9. Отношения нестрогого порядка

Если отношение *R* в множестве *M* рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то оно называется отношением нестрогого порядка [54, с. 38] (используются также термины: «отношение частичного порядка» [22; 35], «отношение квазипорядка» [28], «отношение неполного порядка» [3, с. 85]). Например, отношение «не больше» на множестве натуральных чисел является отношением нестрогого порядка: $a \leq b$, так как оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Это отношение представляет собой объединение двух отношений R_1 и R_2, где R_1 – асимметричное отношение «меньше»; R_2 – отношение «равно».

$$R = R_1 \bigcup R_2 = aR_1b \bigcup aR_2b.$$

Если $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$, то

$R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$;

R_2={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)};
R={(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}.

Упражнения

1. (СПИ) Укажите отношения нестрогого порядка:
1) автомобиль a едет быстрее автомобиля b;
2) число a не меньше числа b, где $a, b \in \{1, 2, ..., 50\}$;
3) числа a и b не равны числу 6, где a и b – натуральные числа;
4) число a без остатка делится на число b, где $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
5) $a>5$ и $b>5$, где $a, b \in \{1, 2, ..., 8\}$;
6) Петров и Иванов – друзья;
7) угол α не больше угла β.
2. (ВУУ) Укажите отношения нестрогого порядка:
1) числа a и b не являются двузначными;
2) точка a на числовой оси находится левее точки b;
3) самолет a летит не быстрее самолета b;
4) расстояние между городами равно 100 км;
5) дом a не выше дома b;
6) отрезок a не короче отрезка b;
7) хорошее лучше плохого.

1.2.10. Упорядоченные множества

Согласно [54, с. 39] множество M является линейно упорядоченным, если для любых двух его элементов a и b имеет место либо aRb, либо bRa.

Если же отношение aRb (либо bRa) справедливо не для любых элементов $a, b \in M$, то множество M называется частично упорядоченным.

Пример 1. Пусть M={1, 3, 4, 7}. Рассмотрим отношение aRb, где R обозначает «меньше»:

R={(1, 3), (1, 4), (1, 7), (3, 4), (3, 7), (4, 7)}.

Для каждого элемента множества R справедливо $a<b$, следовательно, отношение $a<b$, в множестве M={1, 3, 4, 7} есть отношение линейного порядка. Говорят при этом, что отношением $a<b$ множество M упорядочено линейно.

Пример 2. Пусть M={c, d, e, f}. Тогда отношение $P \subset Q$ есть отношение частичного порядка в булеане $B(M)$, где P и Q – подмножества

множества M. Чтобы убедиться в этом, запишем булеан $B(M)$:

$$B(M)=\{\varnothing, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{d, e\},$$
$$\{d, f\}, \{e, f\}, \{c, d, e\}, \{c, d, f\}, \{c, e, f\}, \{d, e, f\}, \{c, d, e, f\}\}.$$

По этой записи видно, что существуют элементы булеана, для которых справедливо отношение $P\subset Q$, где $P, Q\in B(M)$. Например: $\varnothing\subset\{c\}$; $\{d\}\subset\{c, d\}$; $\{e, f\}\subset\{d, e, f\}$ и т.д.

Но не для всяких $P, Q\in B(M)$ отношение $P\subset Q$ справедливо. Например: $\{c\}\not\subset\{f\}$; $\{d\}\not\subset\{c, e\}$; $\{c, f\}\not\subset\{d, f\}$ и т.д.

Следовательно, отношение включения $P\subset Q$ упорядочивает булеан $B(M)$ лишь частично.

Упражнения

1. Пусть $M=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

(УЖУ) Определите $|K|$, где K – множество подмножеств, кардинальное число которых равно двум.

2. Сколько существует пар элементов a, $b\in M$ (см. упр. 1), для которых справедливо отношение:

(ООТ) $a<b$? (МОР) $a>b$? (ЕКТ) $a\geq b$? (ЗКР) $a\leq b$?

3. (781) В каких случаях отношения упорядочивают множества линейно?

1) «a выше, чем b», где a, $b\in$ {рост Петрова – 180 см, Сидорова – 175 см, Данилова – 174 см, Орлова – 171 см, Васильева – 176 см};

2) «a ниже, чем b», где a, $b\in$ {рост Николаева – 168 см, Иванова – 170 см, Алексеева – 178 см, Афанасьева – 170 см, Владимирова – 172 см};

3) «a делитель b», где a, $b\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

4) «a длиннее b», где a, b – элементы множества отрезков различной длины;

5) «a находится левее b на числовой оси», где a и b – натуральные числа;

6) «a едет быстрее b», где a и b – элементы множества автомобилей, с различными скоростями движущихся по дороге;

7) «a знаком с b», где a, $b\in N$, N – множество учащихся школы № 8 г. Юрги.

1.2.11. Отношения соответствия

Понятие соответствия ясно интуитивно. Например, если требуется закодировать сообщение заменой букв алфавита их порядковыми номерами, то каждой букве необходимо поставить в соответствие определенное десятичное число. Если в кассе кинотеатра продают билеты на какой-либо сеанс, это значит, что каждому билету соответствует определенное место в зрительном зале. Если цветные карандаши упаковывают в коробки, то каждому набору цветных карандашей соответствует некоторая коробка и т.д. Этот интуитивно ясный смысл вкладывается в слово «соответствие» и в том случае, когда говорят о каких-либо двух множествах.

В общем случае между элементами множеств A и B могут быть четыре вида соответствия в зависимости от того, один или несколько элементов множества A соответствуют элементу множества B и один или несколько элементов множества B ставятся в соответствие элементу множества A [24, с. 141; 28, с. 404]:

1) взаимно-однозначное соответствие, когда каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие единственный элемент $b \in B$ и когда каждому элементу $b \in B$ соответствует только один элемент $a \in A$. Например, если 33 буквы русского алфавита пронумеровать, то получим два множества A={*А, Б, В,…, Ю, Я*} и B={1, 2, 3,…, 32, 33}, между которыми существует взаимно однозначное соответствие. Взаимно однозначные соответствия называют биективными отображениями, или биекциями [54, с. 29].

2) одно-многозначное соответствие, когда каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие несколько (более одного) элементов множества B, но каждому элементу $b \in B$ соответствует только один элемент $a \in A$. Примером может служить отношение: «a есть квадрат b». Пусть A={1, 4, 9}, B={-1, -2, -3, 1, 2, 3}. Тогда элементу $1 \in A$ ставится в соответствие два элемента $1 \in B$ и $-1 \in B$, поскольку $1=1^2$ и $1=(-1)^2$. То же самое относится и к элементам $4 \in A$ и $9 \in A$;

3) много-однозначное соответствие, когда для каждого элемента $a \in A$ существует только один элемент $b \in B$, но каждому элементу множества B соответствует более одного элемента множества A. Примером может служить отношение «быть квадратным корнем», т.е. «a есть квадратный корень числа b». Пусть A={1, 2, 3, -1, -2, -3} и B={1, 4, 9}. Тогда двум элементам 1 и -1 множества A соответствует один элемент $1 \in B$, так как квадратным корнем из 1 является и 1 и -1. То же самое относится и к остальным элементам множеств A и B;

4) много-многозначное соответствие, когда каждому элементу $a \in A$ соответствует более одного элемента множества B и каждому элементу $b \in B$ соответствует также более одного элемента множества A.

Примером много-многозначного соответствия может служить отношение вида «a не равно b», т.е. «$a \neq b$». Пусть $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$. Тогда элементу $1 \in A$ соответствуют элементы $2, 3, 4, 5 \in B$, элементу $2 \in A$ – $3, 4, 5 \in B$, элементу $3 \in A$ – $2, 4, 5 \in B$. Аналогично элементу $2 \in B$ соответствуют элементы $1, 3 \in A$, элементу $3 \in B$ – $1, 2 \in A$, элементу $4 \in B$ – $1, 2, 3 \in B$, элементу $5 \in B$ – $1, 2, 3 \in A$.

Упражнения

1. (219) Даны множества: $A=\{a, \alpha, \beta, t, m\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Каждой букве множества A поставили в соответствие некоторую цифру множества B, т.е. буквы пронумеровали. Сколько существует способов установления этого соответствия?

2. (300) Укажите номера взаимно однозначных отношений:

1) «$a \in A$ на 4 больше, чем $b \in B$», где A – множество всех целых чисел; $A=B$;

2) «$a \in A$ есть делитель $b \in B$», где $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{4, 8, 9, 25, 27, 125\}$;

3) «пассажир $a \in A$ едет в вагоне $b \in B$», где A – множество пассажиров поезда, B – множество вагонов; $|B|>1$, в каждом вагоне более одного пассажира;

4) «$a \in A$ слушает лекцию в аудитории $b \in B$», где A – множество студентов, B – множество аудиторий, $|B|>1$, в каждой аудитории более одного студента;

5) «$2a \neq 3b$», где $a, b \in \{1, 2, 3\}$;

6) «a-b=0», где a и b – натуральные числа;

7) «$a \geq b$», где $a \in \{6, 7, 9\}$; $b \in \{3, 4\}$;

8) «$a+b$ – нечетное число», где $a \in \{2, 3, 4, 5\}$; $b \in \{6, 7, 8, 9\}$;

9) «скрипка $a \in A$ находится в футляре $b \in B$», где A – множество скрипок, B – множество футляров.

3. (258) В упр. 2 укажите номера одно-многозначных отношений.

4. (ПО7) В упр. 2 укажите номера много-однозначных отношений.

5. (ЯЛК) В упр. 2 укажите номера много-многозначных отношений.

1.2.12. Функциональные отношения. Отображения

Пусть даны множества X и Y. Бинарное отношение xRy является функциональным (функцией), если каждому элементу $x \in X$ соответствует не более одного элемента $y \in Y$ [16, с. 8; 54, с. 26]. Из этого определения следует, что одно-многозначные и много-многозначные отношения функциональными быть не могут.

Для обозначения функции используются различные записи: $X \xrightarrow{f} Y$, $f{:}X \to Y$ [48, с. 51]; $f(x)$ [54, с. 28]; $(x, y) \in F$, $y=F(x)$, где $F \subset X \times Y$ [16, с. 8]. В [54, с. 27] значение функции $y \in Y$ называют образом элемента $x \in X$, а сам элемент $x \in X$ – прообразом. Множество X – это область определения функции, Y – область значений.

Функция $y=F(x)$ является всюду определенной, если каждому элементу $x \in X$ соответствует один элемент $y \in Y$. В этом случае функцию называют также отображением (или инъекцией) множества X в множество Y [54, с. 27]. Функция является недоопределенной (частично определенной), если имеется хотя бы один элемент $x \in X$, которому не соответствует никакой элемент $y \in Y$. Отсюда следует, что недоопределенные функции отображениями не являются. Однако не все математики придерживаются этого положения. Например, Бурбаки считает, что функция и отображение – это полные синонимы [54, с. 27]. (Никола Бурбаки – не один человек. Это псевдоним, под которым группа французских математиков в 1939 г. предприняла попытку изложить различные математические теории с позиций формального аксиоматического метода. Численность и состав группы содержится в тайне [28, с. 76; 47, с. 172]).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть дано два множества:

$$X=\{а, б, в, г, д, е\};\ Y=\{1, 2, 3, 4\}. \qquad (28)$$

Выделим в декартовом произведении множеств X и Y подмножество вида:

$$F=\{(а, 1), (б, 3), (в, 4), (г, 2), (д, 2), (е, 3)\}.$$

Первый элемент каждой пары множества F – это элемент множества X, второй – элемент множества Y. Все первые элементы различны, следовательно, каждому значению $x \in X$ соответствует точно один элемент $y \in Y$. Это значит, что множество F представляет собой функциональное отношение и, следовательно, является отображением множества X в множество Y.

Пример 2. Выделим в декартовом произведении множеств (28) множество вида:

$$M=\{(а, 1), (а, 2), (б, 3), (в, 4), (г, 3), (д, 2), (е, 4)\}.$$

В это множество входят пары ($а$, 1) и ($а$, 2), у которых первые элементы одинаковы. Что это значит? Очевидно, то, что элементу $a\in X$ соответствует два элемента множества Y: $1\in Y$ и $2\in Y$. Но по определению функционального отношения каждому элементу множества X может соответствовать не более одного элемента множества Y. Следовательно, отношение, представленное множеством M, не является функцией.

Пример 3. Пусть $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{а, б, в\}$ и пусть отношение F имеет вид «буквам русского алфавита ставятся в соответствие их порядковые номера», т. е.

$$F=\{(1, а), (2, б), (3, в)\}. \qquad (29)$$

Элементу $4\in X$ в множестве Y не соответствует никакой элемент, следовательно, отношение (29) есть неполностью определенная функция. Расширим область определения функции, заменив множество $\{а, б, в\}$ множеством $\{а, б, в, г\}$, тогда получим

$$F=\{(1, а), (2, б), (3, в), (4, г)\}.$$

Теперь функция является всюду определенной.

Пример 4. Пусть дано выражение

$$y=\sqrt{x}\,. \qquad (30)$$

Известно, что, например, $\sqrt{9}=3$ и $\sqrt{9}=-3$, так как $3^2=9$ и $(-3)^2=9$, т. е. одному и тому же значению x соответствуют два различных значения y. Следовательно, по определению выражение (30) функцией не является. Если же ограничиться только неотрицательными, то выражение (30) является функцией с областью определения и областью значений в множестве неотрицательных чисел.

Таким образом, понятие функционального отношения в теории множеств является обобщением известного из курса школьной математики понятия функции и распространяется не только на числовые множества, но и на объекты, не являющиеся числовыми.

Упражнения

1. (НАТ) Чему равно значение функции $y=3x^2$-7, если значение аргумента равно трем?

2. Дано: $y=F(x)$, где $F\subset X\times Y$; $X=Y=\{1, 2, 3, 4\}$. Функция задана следующим образом:

$$y=1, \text{ если } x\in X \text{ – четное число;}$$

y=2, если $x \in X$ – нечетное число.

(УУТ) Определите область значений функции y.

(МЕТ) Определите область определения функции y.

3. (САД) Дано: $y=F(x)$, где $F \subset X \times Y$; $X=Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Укажите функциональные отношения:

1) $F=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5)\}$;

2) $F=\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}$;

3) $F=\{(3, 1), (4, 5), (1, 5), (2, 2), (5, 3)\}$;

4) $F=\{(5, 1), (1, 5), (2, 4), (4, 2)\}$;

5) $F=\{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$;

6) $F=\{(2, 2), (3, 3), (4, 3), (5, 3)\}$.

4. (АШУ) В предыдущем упражнении укажите номера отношений, которым соответствуют неполностью определенные функции.

1.2.13. Реляционная алгебра

Объектами, над которыми в реляционной (лат. relatio – сообщение) алгебре выполняются операции, являются n-арные отношения. Так как отношения – это множества, то над ними можно выполнять теоретико-множественные операции, такие, как объединение, пересечение, разность (в [30] они соответственно, сложение, умножение и вычитание), симметрическая разность и дополнение. Проиллюстрируем это примером.

Пример 1. Пусть даны бинарные отношения:

$P=\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 3)\}$;

$Q=\{(1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$,

являющиеся подмножествами множества $A \times A=A^2$, где $A=\{1, 2, 3, 4\}$.

Объединение множеств P и Q образуют все пары, входящие в эти множества: $P \cup Q=\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$.

Пересечение множеств P и Q – это множество, элементы которого входят одновременно в оба множества:

$$P \cap Q=\{(1, 3), (3, 4), (4, 3)\}.$$

Разность множеств $P \backslash Q$ имеет вид

$$P \backslash Q=\{(1, 2), (2, 3)\}.$$

Аналогично находим:

$$Q \backslash P=\{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Симметрическая разность множеств $P \oplus Q$:

$$P \oplus Q=(P \backslash Q) \cup (Q \backslash P)=\{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Для нахождения дополнений множеств P и Q сначала необходимо определить универсальное множество I. Так как $|A^2|=16$, то универсальное множество I содержит 16 элементов:

$$I=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Следовательно:

$$\overline{P}=\{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\};$$

$$\overline{Q}=\{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}.$$

В реляционной алгебре, кроме теоретико-множественных, используются и другие операции. Рассмотрим некоторые их них:

а) обмен позициями [30, с. 44]. Пусть n-арное отношение представлено множеством F кортежей длины n. Пронумеруем все элементы, входящие в кортеж. Суть операции обмена позициями, обозначаемой $(i \leftrightarrow j)F$, заключается в том, что знаки, стоящие в одном и том же кортеже на местах i и j, меняются местами (i, j=1, 2, ..., n; $i \neq j$). Эта операция выполняется над всеми кортежами множества F.

Пример 2. Рассмотрим отношение вида

$$F=\{(0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 1)\},$$

являющееся подмножеством множества A^5, где $A=\{0, 1\}$. В множестве F три кортежа. Применим к ним операцию обмена позициями, приняв i=3, j=5. Тогда получим новое отношение

$$(3\leftrightarrow5)\ F=\{(0,0,1,1,1),(0,1,0,1,1),(1,1,1,0,0)\},$$

не совпадающее с F. Очевидно, что если к множеству $(3\leftrightarrow5)\ F$ снова применить ту же операцию при i=3, j=5, то получим множество F;

б) расширение отношения. Эта операция имеет обозначение $\nabla_a F$, где F – множество кортежей длины n, a – некоторый элемент, записываемый слева в каждый кортеж множества F. В результате получится новое множество с тем же числом кортежей, но длина каждого кортежа равна n+1.

Пример 3. Пусть $F=\{(a, b, c), (a, b, b), (b, b, b)\}$. Возьмем в качестве элемента a цифру 6. Тогда получим множество R:

$$R=\nabla_6 F=\{(6, a, b, c), (6, a, b, b), (6, b, b, b)\}.$$

Если операцию расширения отношения применить к двум множествам F и T, используя в качестве элемента a эти же символы F и T, а затем выполнить операцию объединения двух получившихся множеств, то получим новое отношение Q, представляющее собой композицию отношений F и T:

$$Q=(\nabla_F F)\cup(\nabla_T T);$$

в) исключение позиции (в [30, с. 44] эта операция названа проекцией отношения). Обозначение этой операции имеет вид $(i, j,..., k)F$, где

$i, j, ..., k$ – номера позиций кортежа, из которых удаляются элементы. Эту операцию применяют ко всем кортежам множества F. В результате длина каждого кортежа уменьшится, и могут появиться повторы одних и тех же укороченных кортежей. Все повторы необходимо удалить. Тогда останется множество, являющееся результатом операции исключения позиции.

Пример 4. Исключив 2-й и 4-й элементы в каждом кортеже множества

$$F=\{(a, b, b, c, d), (a, a, b, c, d), (a, c, c, c, d)\},$$

получим новое множество M:

$$M=(2,4)F=\{(a, b, d), (a, c, d)\};$$

г) удвоение позиции. Пусть F – множество кортежей длины n. Выберем j-ю позицию какого-либо кортежа и повторно запишем находящийся в этой позиции элемент в заранее указанное место в том же кортеже. Тем самым мы выполним операцию удвоения позиции. Условное обозначение этой операции имеет вид D_jF. Выполняется она для каждого кортежа множества F.

Пример 5. Рассмотрим отношение вида

$$F=\{(1, 3, 4), (1, 3, 5), (5, 6, 8), (4, 5, 7)\}.$$

Допустим, что j-й элемент повторно записывается в каждый кортеж справа. Пусть $j= 2$, тогда

$$D_2F=\{(1, 3, 4, 3), (1, 3, 5, 3), (5, 6, 8, 6), (4, 5, 7, 5)\}.$$

Рассмотренных операций достаточно для того, чтобы получить представление о том, что является объектом изучения в реляционной алгебре. С другими операциями этой алгебры можно ознакомиться, обратившись к специальной литературе. Например, в [16, с. 29] рассмотрена операция конкатенации (расширенного декартова произведения двух отношений). В [30] описаны такие операции, как свертка двух отношений, отождествление позиций, ограничение предикатом, преобразование отношений с помощью функций и др.

Упражнения

1. Дано множество $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. На его основе заданы отношения в виде множеств P и Q:

$$P=\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}\subset A^2;$$
$$Q=\{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}\subset A^2.$$

(БЭС)! Сколько элементов содержит: объединение множеств P и Q? Пересечение множеств P и Q?

(ТХС)! Сколько элементов содержат множества: $P\backslash Q$? $Q\backslash P$?

$P \oplus Q$?

(РРР)! Сколько элементов содержат множества: $\overline{P}$? $\overline{Q}$?

2. (ПХР) Отношение F состоит из одного кортежа, представляющего собой пятизначное двоичное число:

$$F=\{(0, 0, 1, 1, 0)\}.$$

К этому отношению три раза применили операцию обмена позициями: сначала $(2 \leftrightarrow 3)F$, к получившемуся новому отношению – $(1 \leftrightarrow 4)F$, после чего – $(2 \leftrightarrow 5)F$. Укажите кортеж, получившийся в результате (запятые не вводить).

3. (БОР)! Дано отношение

$$F=\{(3, 3, 4, 5, 5, 6), (3, 3, 5, 5, 5, 5), (3, 4, 5, 5, 5, 6)\}.$$

Примените к нему операцию исключения позиции вида $(2,3,6)F$. Сколько кортежей в новом отношении? Какие элементы в него входят?

4. (ЖУР) Отношение F задано в виде

$$F=\{(4, 4, 5), (1, 0, 1), (2, 0, 0)\}.$$

Примените к нему операцию удвоения позиции D_1F, записывая повторный элемент справа в каждый кортеж. Укажите все элементы, из которых состоит каждый кортеж нового отношения (запятые не вводить).

5. (ЗУЛ) Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли n-арное отношение содержать кортежи различной длины?

2) может ли измениться число кортежей в множестве F, если к нему применить операцию обмена позициями?

3) может ли получиться пустое множество в результате применения операции исключения позиции?

4) верно ли, что если операцию удвоения позиции последовательно применять к одному и тому же отношению, то кортежи с каждым применением этой операции будут удлиняться?

5) возможны ли случаи, когда в результате применения операции обмена позициями множество F остается неизменным?

6) возможны ли случаи, когда в результате применения операции расширения отношения множество F остается неизменным?

7) применима ли операция исключения позиции к синглетону, представляющему собой кортеж из одного элемента?

1.3. Элементы теории нечетких множеств

1.3.1. Вводные замечания

Считается, что элементами канторовской теории множеств могут быть любые объекты – деревья, насекомые, атомы, окна, числа, фразы и т.д. «Множество может состоять, например, из зеленых яблок, песчинок или простых чисел» [48, с. 11]. На первый взгляд это действительно так. Например, почему нельзя говорить о множестве песчинок на левом берегу реки Томи в районе города Юрги? Интуитивно кажется, что можно. А на самом деле? Выйдем в указанный район и возьмем камешек диаметром, допустим, в 1 мм. Это песчинка? Допустим, что «да». Тогда возьмем камешек побольше. Это песчинка? Допустим, что снова «да». Тогда возьмем камешек еще больше и т.д. После нескольких итераций наступит момент, когда мы окажемся не в состоянии признать с достаточной уверенностью, что данный камешек является песчинкой. Следовательно, с математической точки зрения нельзя говорить о множестве песчинок, если отсутствует формальный критерий, при помощи которого все объекты можно было бы однозначно разделить на песчинки и непесчинки.

А что такое берег? В двух метрах от воды – это берег? Допустим, что «да». А в пяти, десяти, ста и так далее метрах от воды – это берег? Где начинается берег, если уровень воды в Томи колеблется? И что считать районом города Юрги? Подобные вопросы возникают во многих случаях.

Пусть задано множество домов. Как определить элементы, принадлежащие этому множеству? Если по признаку – живут ли в доме люди, то и землянка – дом. По наличию окон? Но у вагона тоже есть окна, а он не дом. Можно ли говорить о множестве хороших книг, множестве интересных фильмов, о множестве высоких людей, о множестве дней, когда была пасмурная погода? и т.д. С интуитивной точки зрения это все множества, а с математической – нет, и все по той же причине: из-за отсутствия формальных признаков, позволяющих отличать хорошие книги от плохих, интересные фильмы от неинтересных, пасмурную погоду от непасмурной и т.д.

Таким образом, утверждение о том, что в канторовские множества могут входить элементы любой природы, мягко выражаясь, не совсем верно, а это значит, что общность теории множеств распространяется далеко не на все объекты, с которыми человеку приходится иметь дело в повседневной практике.

Стремясь преодолеть ограниченность теории множеств Г. Кантора и распространить математические методы на объекты с размытыми, расплывчатыми, нечеткими границами, профессор университета г. Беркли (США) Лотфи Заде в 60-х годах 20-го века создал теорию, которую в математической литературе стали называть теорией нечетких (мягких, размытых) множеств. Основу этой теории составляет более широкое толкование функции принадлежности элемента данному множеству A. По Г. Кантору, эта функция имеет только два значения: $a \in A$, либо $a \notin A$, третьего не дано. Л. Заде расширил набор значений функции принадлежности. Согласно его теории степень принадлежности элемента a множеству A может быть представлена любым дробным числом из интервала [0; 1]. Например, пусть A – множество высотных домов. Принадлежит ли 10-этажный дом множеству A? Теория Г. Кантора ответа на этот вопрос не дает. А согласно теории Л. Заде можно сказать: десятиэтажный дом является элементом множества высотных домов со степенью принадлежности, равной 0,35. Откуда взялось это число 0,35? Может ли оно быть равным, например, 0,1 или 0,9? Может. Выбирается оно либо на основе статистических сведений, либо интуитивно в зависимости от обстоятельств. Если в городе много домов, насчитывающих 50 и более этажей, то степень принадлежности 10-этажного дома множеству A можно уменьшить и до 0,1. Но если, например, 11-этажные дома в городе являются самыми высокими, то степень принадлежности к высотным домам 10-этажного дома может быть равной и 0,9.

Между теориями Г. Кантора и Л. Заде существует прямая связь: теория множеств Г. Кантора является частным случаем теории нечетких множеств Л. Заде. Этот частный случай имеет место всякий раз, когда функция принадлежности не принимает никаких значений, кроме нуля и единицы. Если степень принадлежности элемента a множеству A равна единице, то по Г. Кантору $a \in A$. Если же степень принадлежности равна нулю, то $a \notin A$.

Упражнения

1. (ХСС) Укажите канторовские множества:

1) множество большегрузных автомобилей;
2) множество тропинок в лесу;
3) множество продавцов в универмаге;
4) множество студентов в группе;
5) множество хороших баянов;
6) множество сотрудников ЮТИ ТПУ;

7) множество выдающихся артистов России;

8) множество экспонатов на выставке;

9) множество студентов, разбирающихся в электронике.

2. (ХПС) Укажите нечеткие множества:

1) множество слов, произнесенных лектором за 2 часа лекции;

2) множество интересных телепередач;

3) множество асфальтированных дорог в Томске;

4) множество книг различных наименований, проданных магазином;

5) множество взрослых щук в реке;

6) множество бурых медведей в зоопарке;

7) множество кентавров, обитающих в лесах Кемеровской области;

8) множество спелых яблок на яблоне;

9) множество офицеров в армии России.

3. (ЕДУ) Какие из следующих чисел могут быть степенью принадлежности элемента нечеткому множеству?

1) 0,001;	4) 2,53;	7) 0,999...;
2) $0{,}01 \cdot 10^{-3}$;	5) $\sqrt{1{,}111}$;	8) $0{,}1 \cdot 10^{20}$;
3) $10 \cdot 10^{-4}$;	6) 14/15;	9) $10^{-17} \cdot 10^{18}$.

1.3.2. Нечеткие множества

Нечеткие множества необходимо как-то отличать от обычных «четких» множеств Г. Кантора. Условимся считать, что заглавная буква обозначает нечеткое множество, если над ней указан знак ~(тильда), а если тильды нет, то будем считать, что буква обозначает канторовское множество.

Как задать нечеткое множество? В случае канторовских множеств достаточно перечислить их элементы. Аналогично можно задавать и нечеткие множества, но с некоторыми особенностями. Эти особенности поясним сначала на примере, а затем перейдем к обобщениям.

Пусть дано множество $M=\{x\ /\ x$ – число выловленных рыб$\}$. Это обычное множество. Построим на его основе нечеткое множество «очень маленький улов», обозначив его буквой $\tilde{K}$ (будем считать, что рыбу ловили удочкой и что поймана хотя бы одна рыба):

$$\tilde{K} = \{(1\ /\ 1), (0{,}95\ /\ 2), (0{,}9\ /\ 3), (0{,}8\ /\ 4), (0{,}7\ /\ 5), (0{,}6\ /\ 6)\}. \quad (33)$$

Согласно этой записи элементами множества $\tilde{K}$ являются пары чисел, записанные в круглых скобках. Числа отделены одно от другого косой (наклонной) чертой. Справа от черты записаны элементы «четкого» множества M, образующие подмножество $H=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\subset M$. Слева указаны значения функции принадлежности. Прочитать запись множества $\tilde{K}$ можно следующим образом. Улов в одну рыбу является очень маленьким со степенью принадлежности к очень маленьким уловам, равной единице. Это первый элемент множества $\tilde{K}$. Если пойманы две рыбы, то такой улов является очень маленьким со степенью принадлежности к очень маленьким уловам, равной 0,95. Это второй элемент множества $\tilde{K}$ и т.д. Таким образом, нечеткое множество $\tilde{K}$ – это обычное канторовское множество $H\subset M$, но каждый его элемент снабжен числом, показывающим степень принадлежности элемента нечеткому множеству $\tilde{K}$.

Теперь все это же представим в общем виде. Пусть M – произвольное непустое канторовское множество. Тогда его нечетким подмножеством $\tilde{A}$ называется множество пар:

$$\tilde{A}=\{(\mu/x) \,/\, x\in H\subset M \text{ и } \mu\in[0;\,1]\}. \tag{34}$$

Буквой μ в этом выражении обозначена функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$. Она принимает значения из интервала [0; 1] и зависит от переменой x, значения которой выбираются из множества H. Множество M называется базовым множеством (базовой шкалой). Значение функции принадлежности при выбранном $x\in H$ называется степенью принадлежности элемента $x\in H$ нечеткому множеству $\tilde{A}$. Функция принадлежности может быть представлена аналитически, как функция аргумента x, но может быть задана набором своих значений, как это записано в выражении (33). В выражении (34) указано множество $H\subset M$. Согласно [32] множество H называется носителем нечеткого множества $\tilde{A}$ (можно говорить просто – носителем).

Таким образом, мы ввели следующие понятия:

1) базовое множество M, на основе которого строится нечеткое множество. Оно может содержать любое число элементов. В случае вышеприведенного примера M – это множество натуральных чисел. Базовому множеству в теории Кантора соответствует универсальное множество;

2) носитель нечеткого множества – подмножество H базового множества: $H\subset M$. Носитель образуют только те элементы множества M, для которых степень принадлежности не равна нулю;

3) функция принадлежности, зависящая от переменной $x\in H$

(можно считать, что $x\in M$). В выражении (34) первое число каждой пары – это не сама функция (как аналитическое выражение), а ее значение;

4) степень принадлежности – значение функции принадлежности при $x\in H$;

5) нечеткое множество – множество пар, каждая из которых содержит элемент $x\in H$ и значение функции принадлежности на этом $x\in H$. В записи нечеткого множества элемент $x\in H$ записывается справа от наклонной черты, а значение функции принадлежности – слева.

Упражнения

1. (ШИР) Укажите элементы, образующие носитель в выражении (33).
2. (129) Укажите степень принадлежности элемента 4 множеству $\tilde{K}$ в выражении (33).
3. (МЭН) Какой элемент в выражении (33) имеет наименьшую степень принадлежности множеству $\tilde{K}$?
4. (ЗЫН) Какое значение имеет функция принадлежности для элемента $5\in\{1, 2,..., 6\}$ в выражении (33)?
5. (НЭП) Найдите $|\tilde{K}|$ по выражению (33).
6. (ФОП) Для нечеткого множества $\tilde{A}$ известно, что $|\tilde{A}|= 38$. Найдите |H|.

1.3.3. Объединение нечетких множеств

Согласно Г. Кантору в объединение множеств $A\cup B$ входят элементы множества A и множества B. При этом элемент, входящий в оба множества, в объединение множеств включается только один раз. Тот же смысл вкладывается и в операцию объединения нечетких множеств, но с учетом функции принадлежности. Поясним это на примерах, полагая, что $M=\{1, 2,\ldots, 8\}$.

Пример 1. Рассмотрим простейший случай, когда нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ содержат по одному элементу.

Пусть

$$\tilde{A}=\{(0{,}3/2)\}; \qquad \tilde{B}=\{(0{,}7/4)\},$$

тогда их нечеткое объединение примет вид

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{(0{,}3/2),\ (0{,}7/4)\}.$$

Пример 2. В предыдущем примере элементы множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ являются различными. Теперь рассмотрим случай, когда множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ содержат один и тот же элемент:

$$\tilde{A}=\{(0{,}3/2)\}; \qquad \tilde{B}=\{(0{,}8/2)\}.$$

Очевидно, что в объединение $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ войдет этот же единственный элемент. Но с какой степенью принадлежности? Если несколько нечетких множеств содержат один и тот же элемент, но с различными степенями принадлежности, то в объединение множеств этот элемент войдет с той степенью принадлежности, которая является наибольшей среди всех нечетких множеств, входящих в уединение. Следовательно:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B}=\{(0{,}3/2)\}\cup\{(0{,}8/2)\}=\{(0{,}8/2)\}.$$

Пример 3. Пусть нечеткие множества имеют вид:

$$\tilde{A}=\{(0{,}3/1),\ (0{,}9/2),\ (0{,}5/4)\}; \tag{35}$$

$$\tilde{B}=\{(0{,}6/2),\ (0{,}3/3),\ (0{,}9/4),\ (0{,}75/8)\}. \tag{36}$$

Найдем их объединение:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B}=\{(0{,}3/1),\ (0{,}9/2),\ (0{,}3/3),\ (0{,}9/4),\ (0{,}75/8)\}. \tag{37}$$

Упражнения

1. (ИМШ) Укажите элементы носителя множеств (35) и (36).
2. (ТКШ) Укажите элементы носителя множества (37).
3. (СПИ) Укажите наименьшую и наибольшую степени принадлежности в выражении (37).
4. (ЕИФ) Укажите элементы в выражении (37), которые имеют наибольшую степень принадлежности.
5. (ЛЭФ) Пусть задано базовое множество M=\{1, 2,..., 9\} и пусть даны нечеткие множества:

$$\tilde{A}=\{(0{,}1/1),\ (1/2),\ (0{,}9/3),\ (0{,}81/6)\};$$

$$\tilde{B}=\{(1/2),\ (0{,}8/5),\ (0{,}81/6),\ (0{,}5/8)\};$$

$$\tilde{C}=\{(0{,}8/3),\ (0{,}81/6),\ (0{,}81/7),\ (0{,}5/8)\}.$$

Найдите элементы множества M, которые образуют носитель нечеткого множества $\tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C}$.

6. (КУФ) Укажите элементы носителя множества $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ (см. упр. 5).
7. (АДИ) Укажите элементы носителя множества $\tilde{B} \cup \tilde{C}$ (см. упр. 5).
8. (654) Укажите наименьшую и наибольшую степень принадлежности в выражении $\tilde{A} \cup \tilde{C}$ (см. упр. 5).

9. (ЯЛС)! Сколько элементов (см. упр. 5) содержат нечеткие множества $\tilde{A} \cup \tilde{B}$? $\tilde{A} \cup \tilde{C}$? $\tilde{B} \cup \tilde{C}$?

1.3.4. Пересечение нечетких множеств

Согласно Г. Кантору пересечение множеств A и B – это множество элементов, которые одновременно входят в множества A и B. В таком же смысле пересечение понимается и в теории нечетких множеств, но с учетом особенностей, вносимых функциями принадлежности. Поясним эти особенности, как и в случае объединения нечетких множеств, на примерах, считая, что базовое множество M имеет вид M={1, 2,..., 9}.

Пример 1. Найти пересечение нечетких множеств:

$$\tilde{A}=\{(0{,}6/4)\}, \qquad \tilde{B}=\{(0{,}2/4)\}.$$

В оба множества входит элемент $4\in M$, но в первом случае его степень принадлежности равна 0,6, а во втором – 0,2. С какой степенью принадлежности элемент $4\in M$ войдет в множество $\tilde{A} \cap \tilde{B}$? Если несколько нечетких множеств содержат некоторый элемент a с различными степенями принадлежности, представленными дробными числами из замкнутого интервала [0; 1], то наименьшее из этих чисел есть степень принадлежности элемента a, входящего в пересечение заданных множеств. Следовательно:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B}=\{(0{,}6/4)\}\cap\{(0{,}2/4)\}=\{(0{,}2/4)\}.$$

Пример 2. Найти пересечение нечетких множеств:

$$\tilde{A}=\{(0{,}6/1),\ (1/2),\ (0{,}4/5),\ (0{,}6/6)\};$$

$$\tilde{B}=\{(0{,}35/2),\ (0{,}3/3),\ (0{,}9/6),\ (0{,}25/7)\}.$$

Общими для обоих нечетких множеств являются элементы $2\in M$ и $6\in M$. Следовательно:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B}=\{(0{,}35/2),\ (0{,}6/6)\}.$$

Пример 3. Найти элементы множества $(\tilde{A} \cap \tilde{B})\cup(\tilde{C} \cap \tilde{D})$, если

$$\tilde{A}=\{(0{,}2/2),\ (0{,}3/4),\ (0{,}6/6)\};$$

$$\tilde{B}=\{(0{,}2/2),\ (0{,}6/7),\ (0{,}7/8)\};$$

$$\tilde{C}=\{(1/3),\ (0{,}1/4),\ (0{,}9/6),\ (0{,}9/8)\};$$

$$\tilde{D}=\{(1/3),\ (0{,}1/5),\ (0{,}2/6),\ (0{,}9/9)\}.$$

Сначала находим пересечения нечетких множеств:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B}=\{(0{,}2/2)\};$$

$$\tilde{C} \cap \tilde{D}=\{(1/3),\ (0{,}2/6)\}.$$

Затем выполняем операцию объединения:

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \bigcup (\tilde{C} \cap \tilde{D})=\{(0{,}2/2), (1/3), (0{,}2/6)\}.$$

Пример 4. Найти элементы нечеткого множества $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, если:

$$\tilde{A}=\{(0{,}3/1)\}; \qquad \tilde{B}=\{(0{,}6/2)\}.$$

Эти множества не имеют общих элементов. Представим их в таком виде, чтобы формально они содержали общие элементы:

$$\tilde{A}=\{(0{,}3/1), (0/2)\};$$

$$\tilde{B}=\{(0/1), (0{,}6/2)\}.$$

Находим пересечение множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B}=\{(0/1), (0/2)\}=\varnothing.$$

Как и в случае канторовских множеств, если нечеткие множества не имеют общих элементов, то пересечение их пусто.

Упражнения

Пусть базовое множество имеет вид $M=\{1, 2,\ldots, 8\}$, и пусть даны нечеткие множества:

$$\tilde{A}=\{(0{,}2/1), (0{,}2/2), (0{,}5/5), (0{,}7/8)\};$$

$$\tilde{B}=\{(0{,}3/3), (0{,}7/4), (0{,}7/6)\};$$

$$\tilde{C}=\{(0{,}2/4), (0{,}5/5), (0{,}7/8)\};$$

$$\tilde{D}=\{(0{,}1/6), (0{,}8/7), (0{,}8/8)\}.$$

Используя эти множества в качестве исходных данных, выполните нижеследующие упражнения 1–3:

1. Найдите наименьшее значение функции принадлежности для множеств:

(ПШО) $\tilde{A} \cap \tilde{B}$; (288) $\tilde{A} \cap \tilde{C} \cap \tilde{D}$;

(ТУП) $\tilde{A} \cap \tilde{C}$; (КНШ) $\tilde{B} \cap \tilde{C} \cap \tilde{D}$;

(38Н) $\tilde{C} \cap \tilde{D}$; (ПИХ) $\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{D}$.

2. Найдите носитель для нечетких множеств:

(ЧАФ) $\tilde{A} \bigcup (\tilde{B} \cap \tilde{C})$; (АНИ) $\tilde{B} \bigcup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$;

(АФХ) $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \bigcup \tilde{C})$; (ТЕШ) $\tilde{B} \cap (\tilde{B} \bigcup \tilde{C})$;

(П23) $\tilde{C} \bigcup (\tilde{A} \cap \tilde{D})$; (АМК) $(\tilde{A} \cap \tilde{C}) \bigcup \tilde{B}$.

3. Найдите наименьшую и наибольшую степени принадлежности:

(ШЕЛ)! $\tilde{A} \bigcup (\tilde{A} \cap \tilde{B})$; (ФТЯ)! $\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}$;

(РЯМ)! $\tilde{A} \bigcup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$; (ЯРБ)! $\tilde{B} \cap \tilde{C} \cap \tilde{D}$;

(АНО)! $\tilde{B} \bigcup (\tilde{B} \cap \tilde{C})$; (КАГ)! $\tilde{A} \cap \tilde{C} \cap \tilde{D}$.

4. (ООД) Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) верно ли, что носитель – это канторовское множество?

2) возможны ли случаи, когда $M \subset H$, где M – базовое множество, H – носитель?

3) верно ли, что пустое множество – любое нечеткое множество с функцией принадлежности, равной нулю на всем базовом множестве?

4) возможны ли случаи, когда $M=H$, где M – базовое множество, H – носитель?

5) может ли функция принадлежности принимать значения, большие единицы?

6) верно ли, что значение функции принадлежности и степень принадлежности – это одно и то же?

7) может ли функция принадлежности принимать целые значения?

5. (ОЦХ) Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) верно ли, что множество, из которого может принимать значения функция принадлежности, является несчетным?

2) верно ли, что если степень принадлежности элемента равна единице, то этот элемент не входит в заданное множество?

3) если $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – непустые нечеткие множества, то возможны ли случаи, когда пересечение этих множеств является пустым?

4) если $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – непустые нечеткие множества, то возможны ли случаи, когда объединение этих множеств является пустым?

5) верно ли, что пересечение пустого множества и непустого нечеткого множества пусто?

6) всегда ли справедливо равенство $\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – произвольные нечеткие множества?

7) всегда ли справедливо равенство $\tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – произвольные нечеткие множества?

1.3.5. Дополнение нечеткого множества

Пусть даны базовое множество $M=\{1, 2,\dots, 7\}$ и нечеткое множество

$$\tilde{A} = \{(0{,}3/1), (0{,}7/3), (0{,}9/6)\}.$$

Носителем этого нечеткого множества является канторовское множество $H=\{1, 3, 6\}$. Чтобы найти дополнение множества $\tilde{A}$, сначала необходимо расширить носитель до базового множества. Для этого в множество $\tilde{A}$ включим все недостающие элементы и каждому них присвоим нулевые значения функции принадлежности. Тогда заданное множество $\tilde{A}$ примет вид

$$\tilde{A}=\{(0{,}3/1), (0/2), (0{,}7/3), (0/4), (0/5), (0{,}9/6), (0/7)\}.$$

Но это еще не дополнение. Для его нахождения заменим в каждой паре множества $\tilde{A}$ число μ_i на разность 1-μ_i, где μ_i – значение функции принадлежности элемента $i\in M$. В результате получим искомое дополнение:

$$\overline{\tilde{A}}=\{(0{,}7/1), (1/2), (0{,}3/3), (1/4), (1/5), (0{,}1/6), (1/7)\}.$$

В рассмотренном примере степень принадлежности каждого элемента множества $\overline{\tilde{A}}$ не равна нулю, так как в выражении $\tilde{A}$ функция принадлежности ни для одного элемента не принимает единичное значение. Следовательно, если в заданное нечеткое множество $\tilde{A}$ входит элемент $x\in M$ со степенью принадлежности, равной единице, то в дополнение этот элемент войдет с нулевой степенью принадлежности, т.е. будет отсутствовать в множестве $\overline{\tilde{A}}$. Проиллюстрируем это на примере при $M=\{1, 2,..., 7\}$:

$$\tilde{A}=\{(1/1), (0{,}2/2), (0{,}9/4), (1/5), (1/6)\}.$$

В дополнение этого нечеткого множества не входят элементы 1, 5, 6$\in M$:

$$\overline{\tilde{A}}=\{(0/1), (0{,}8/2), (1/3), (0{,}1/4), (0/5), (0/6), (1/7)\}=$$
$$=\{(0{,}8/2), (1/3), (0{,}1/4), (1/7)\}.$$

Упражнения

Исходными данными для упражнений являются множества:

$M=\{1, 2,..., 8\}$;

$\tilde{A}=\{(0{,}6/2), (0{,}6/3), (0{,}1/5), (0{,}9/7)\}$;

$\tilde{B}=\{(1/1), (1/2), (0{,}1/4), (0{,}7/6), (0{,}9/8)\}$;

$\tilde{C}=\{(0{,}3/1), (0{,}4/3), (1/4), (1/5), (1/6), (0{,}8/8)\}$;

$\tilde{D}=\{(0{,}2/1),(1/2),(1/3),(0{,}4/4),(0{,}7/6),(1/8)\}$.

1. Найдите носитель для множеств:

(КЛЕ) $\overline{\tilde{A}}$; (МУХ) $\overline{\tilde{B}}$; (ТЛЗ) $\overline{\tilde{C}}$; (634) $\overline{\tilde{D}}$.

2. Укажите элементы $x\in M$, степень принадлежности которых равна 1 в случае множеств:

(ИКШ) $\overline{\tilde{A}}$; (ХТК) $\overline{\tilde{B}}$; (ПАЛ) $\overline{\tilde{C}}$; (АНЫ) $\overline{\tilde{D}}$.

3. Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна нулю в случае множеств:

(ЮХН) $\overline{\tilde{B}}$; (860) $\overline{\tilde{C}}$; (АРП) $\overline{\tilde{D}}$.

4. Найдите носители множеств:

(ЭЦБ) $\overline{\tilde{A}} \cup \overline{\tilde{B}}$; (ДВВ) $\overline{\tilde{B}} \cup \overline{\tilde{D}}$; (ТЕТ) $\overline{\tilde{B}} \cap \overline{\tilde{D}}$;

(ПФУ) $\overline{\tilde{B}} \cup \overline{\tilde{C}}$; (ТКФ) $\overline{\tilde{A}} \cap \overline{\tilde{C}}$; (ХОХ) $\overline{\tilde{C}} \cap \overline{\tilde{D}}$.

5. Найдите множество $\tilde{A} \cup \overline{\tilde{A}}$. Укажите степень принадлежности множеству $\tilde{A} \cup \overline{\tilde{A}}$ элементов:

(ЦИД) 1, $2 \in M$; (ЯЖД) 3, 4, $5 \in M$; (МХЕ) 6, 7, $8 \in M$.

6. Найдите множество $\tilde{B} \cup \overline{\tilde{B}}$.

(АРЗ) Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна единице.

(ЖНИ) Укажите наименьшее значение функции принадлежности.

(АЙЦ) Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна 0,9.

7. Найдите множество $\tilde{C} \cap \overline{\tilde{C}}$.

(245) Найдите носитель множества $\tilde{C} \cap \overline{\tilde{C}}$.

(595) Укажите наименьшую (не равную нулю) и наибольшую степени принадлежности.

(ПЕК)! Укажите степени принадлежности элементов $2 \in M$, $3 \in M$, $4 \in M$.

8. Найдите множество $\tilde{D} \cap \overline{\tilde{D}}$.

(ТЭЛ) Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых равна нулю.

(5ПЛ) Укажите наименьшую (не равную нулю) и наибольшую степени принадлежности.

(АУМ) Укажите элементы $x \in M$, степень принадлежности которых не равна нулю.

9. (ЕХМ) Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) верно ли, что пересечение нечеткого множества с его дополнением есть пустое множество?

2) верно ли, что универсальному канторовскому множеству в теории нечетких множеств соответствует базовое множество?

3) верно ли, что объединение нечеткого множества и его допол-

нения есть базовое множество?

4) верно ли, что в дополнение нечеткого множества входят только элементы $x \in M$, отсутствующие в исходном нечетком множестве?

5) если степень принадлежности всех элементов нечеткого множества при $H=M$ равна единице, то верно ли, что дополнение этого множества пусто?

6) существуют ли нечеткие множества, для которых справедливо $\tilde{A} = \overline{\tilde{A}}$?

7) существуют ли нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, для которых справедливо:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \text{ ?}$$

1.3.6. Разность и симметрическая разность нечетких множеств

Для нахождения разности $\tilde{A} \setminus \tilde{B}$ нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ никакой новой информации не потребуется, так как разность может быть выражена через вышеуказанные операции дополнения и пересечения:

$$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}} .$$

Проиллюстрируем это на примере. Пусть

$$M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$\tilde{A} =\{(0,6/1), (0,5/2), (1/4), (0,2/6)\};$$

$$\tilde{B} =\{(0,8/1), (0,5/2), (1/3), (0,4/5)\}.$$

Найдем их дополнения:

$$\overline{\tilde{A}} =\{(0,4/1), (0,5/2), (1/3), (1/5), (0,8/6)\};$$

$$\overline{\tilde{B}} =\{(0,2/1), (0,5/2), (1/4), (0,6/5), (1/6)\}.$$

Тогда разность $\tilde{A} \setminus \tilde{B}$ примет вид:

$$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}} =\{(0,2/1), (0,5/2), (1/4), (0,2/6)\}.$$

Аналогично находим разность $\tilde{B} \setminus \tilde{A}$:

$$\tilde{B} \setminus \tilde{A} = \tilde{B} \cap \overline{\tilde{A}} =\{(0,4/1), (0,5/2), (1/3), (0,4/5)\}.$$

Для нахождения симметрической разности нечетких множеств также не требуется никакой новой информации, так как симметрическая разность может быть выражена через рассмотренные выше операции пересечения, объединения и дополнения:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} =(\tilde{A} \setminus \tilde{B})\cup(\tilde{B} \setminus \tilde{A})=(\tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}})\cup(\tilde{B} \cap \overline{\tilde{A}}).$$

1.3.7. Основные свойства операций над нечеткими множествами

Все нижеперечисленные свойства операций над нечеткими множествами почти не отличаются от рассмотренных в первом разделе свойств операций над канторовскими множествами, поэтому весь материал данного подраздела представлен в весьма кратком изложении.

При обозначении множеств будем считать, что $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ – произвольные нечеткие множества, M – базовое множество (канторовское). Знак равенства будем использовать для обозначения равносильности. (В [32] для этих целей применяется знак ≈).

Наиболее важными из всех изученных в настоящее время свойств являются следующие:

1) инволюция: дополнение дополнения нечеткого множества $\tilde{A}$ есть само множество $\tilde{A}$:

$$\overline{\overline{\tilde{A}}} = \tilde{A};$$

2) идемпотентность пересечения и объединения:

$$\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}; \qquad \tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}.$$

3) коммутативность пересечения и объединения:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}; \qquad \tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}.$$

Благодаря коммутативности буквы, обозначающие нечеткие множества, можно записывать в любом порядке, если они соединены знаком пересечения либо объединения;

4) ассоциативность пересечения и объединения:

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = \tilde{B} \cap (\tilde{A} \cap \tilde{C}) = \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C};$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = \tilde{B} \cup (\tilde{A} \cup \tilde{C}) = \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C};$$

5) дистрибутивность пересечения относительно объединения:

$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C});$$

и дистрибутивность объединения относительно пересечения:

$$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C}).$$

6) законы де Моргана:

$$\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cup \overline{\tilde{B}}; \qquad \overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \overline{\tilde{A}} \cap \overline{\tilde{B}}.$$

Кроме перечисленных, приведем еще несколько свойств:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \tilde{B} \oplus \tilde{A};$$

$$\tilde{A} \cup \varnothing = \tilde{A};$$

$$\tilde{A} \cap \varnothing = \varnothing;$$

$$\tilde{A} \cup M = M;$$

$$\tilde{A} \cap M = \tilde{A}.$$

На этом завершим не только раздел «Элементы теории нечетких множеств», но и вообще всю тему о множествах. Рассмотренного материала при надлежащем его освоении вполне достаточно для первого знакомства с вводными понятиями такого раздела современной математики, как теория множеств. Каждый, кто изъявит желание более основательно ознакомиться с теми или иными разделами теории множеств, всегда может обратиться к специальной литературе.

Тема 2. БУЛЕВА АЛГЕБРА

2.1. Понятие высказывания

Высказывание – это некоторое утверждение в виде повествовательного предложения, по содержанию которого можно сказать, истинно оно, или ложно. Примеры истинных высказываний: «Река Волга впадает в Каспийское море»; «Существуют четные числа, делящиеся на 3»; «Луна – спутник Земли». Примеры ложных высказываний: «В Юрге водятся кентавры»; «Варшава – столица Японии»; «Всемирно известную сказку «Конек-горбунок» написал один из студентов филиала ТПУ в г. Юрге».

Существуют утверждения, которые меняли свою истинность по мере развития науки. Например: «Солнце вращается вокруг Земли». Это высказывание длительное время считалось истинным. Теперь же оно ложно.

Встречаются утверждения, относительно истинности которых невозможно сказать что-либо определенное ввиду отсутствия способов их доказательства или опровержения. Например: «Между людьми существует телепатическая связь». По мере развития науки это утверждение может стать либо истинным, либо ложным.

В некоторых случаях утверждения объявляются истинными без каких-либо объяснений и доказательств.

Например: «На плоскости через точку, лежащую вне прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую данной». Это утверждение Евклида. А Н.И. Лобачевский [66, с. 9–10] о том же утверждает совсем другое: «На плоскости через точку, лежащую вне прямой, можно провести сколько угодно прямых, не пересекающих данной». Во втором высказывании утверждается нечто, противоположное первому. Однако оба высказывания истинны! Возможно ли это? Да.

Оба высказывания являются аксиомами, которые, как известно, принимаются истинными без доказательств.

Упражнения

1. (ОАВ) Укажите номера, соответствующие истинным высказываниям:

1) если оно упадет, то оно разобьется;

2) река Лена впадает в море Лаптевых;

3) широкая лента шире узкой;

4) А.С. Пушкин – русский поэт 19-го века;

5) случается, что стреляет и незаряженное ружье;

6) значение только тогда знание, когда оно приобретено усилием мысли, а не памятью.

2. (ЗШМ) Укажите номера, соответствующие истинным высказываниям:

1) в нашей Галактике, кроме планеты Земля, существуют другие планеты, на которых есть жизнь;

2) квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов;

3) операция арифметического сложения коммутативна;

4) все делать честно – выгоднее;

5) существует загробная жизнь;

6) на ровном месте можно упасть и сломать ногу.

3. (БМК) Укажите номера утверждений, которые не являются истинными и не являются ложными:

1) человек произошел от обезьяны;

2) мы с вами все – очень хорошие люди;

3) и куда это тебя занесло?

4) инопланетяне когда-нибудь посетят нашу Землю;

5) в ночь на 1 января всегда идет снег.

4. (УКР) Укажите номера утверждений, которые могут быть истинными (при определенных условиях):

1) на улице идет дождь;

2) 101+11=1000;

3) все простые числа нечетные;

4) и заяц научится спички зажигать, если его долго бить;

5) площадь прямоугольника равна половине произведения его диагоналей.

Таким образом, утверждения могут быть истинными, ложными и не истинными и не ложными и не ложными одновременно. Мы в дальнейшем будем рассматривать только такие утверждения, которые являются либо истинными, либо ложными. Для удобства высказывания условимся обозначать латинскими буквами. Например можно считать, что A – это высказывание «Идет дождь». Если оно является истинным, то пишут A=1. Соответственно, запись A=0 обозначает: высказывание «Идет дождь» ложно.

Всякая буква, обозначающая некоторое высказывание, – это переменная величина, принимающая одно из двух значений – либо 0, либо 1. Такую переменную называют двоичной, или булевой.

2.2. Аксиомы булевой алгебры

Джордж Буль – ирландский математик и логик (1815–1864) впервые сформулировал основные положения алгебры логики.

В булевой алгебре операции выполняются не над числами, а над высказываниями, представленными двоичными переменными. В результате получаются сложные высказывания. Эти сложные высказывания записываются в виде формул, также носящих двоичный характер.

Двоичная переменная в булевой алгебре определяется следующими аксиомами [26, с. 50]:

$$A=1, \text{ если } A \neq 0; \quad A=0, \text{ если } A \neq 1.$$

В обычной алгебре (школьной) над переменными выполняются операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и т. д. В булевой же алгебре основными являются только три операции. Их называют дизъюнкция, конъюнкция, инверсия.

Операция дизъюнкции обозначается знаком $\vee$, который ставится между двумя переменными: $A \vee B$. Однако, если учесть некоторое сходство операции дизъюнкции с арифметическим сложением, то вместо знака $\vee$ можно писать знак обычного арифметического сложения, не забывая, разумеется, что знак плюс обозначает дизъюнкцию: A+B. Этим знаком мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Операция дизъюнкции, называемая иногда логическим сложением, определена следующими аксиомами [26, с. 51]:

$$0+0=0; \qquad 0+1=1; \qquad 1+0=1; \qquad 1+1=1.$$

Первые три аксиомы согласуются с обычной арифметикой. А вот четвертая может вызвать недоумение. Здесь необходимо иметь в виду, что единица обозначает не количество, а тот факт, что некоторое утверждение является истинным. Например, пусть A обозначает: «На улице тепло»; B – «Светит солнце». Что будет обозначать A+B? Это составное высказывание: «На улице тепло или светит солнце». Оно истинно, если A=1, или B=1, или A=B=1. В связи с тем, что в составном высказывании два простых высказывания соединены союзом ИЛИ, дизъюнкцию иногда называют операцией ИЛИ.

Рассмотрим вторую операцию – конъюнкцию. Она обозначается знаками $\wedge$, &. Но, как и в случае дизъюнкции, этими знаками лучше не пользоваться. Конъюнкция – «родня» арифметическому умножению, поэтому вместо знака $\wedge$ будем использовать точку: $A \cdot B$, либо вообще не указывать ни какого знака. При этом надо помнить, что если две буквы записаны рядом без какого-либо знака, то это значит, что они соединены знаком конъюнкции: $A \wedge B = A \cdot B = AB$.

Операция конъюнкции (логическое умножение), определяется следующими аксиомами [26, с. 51]:

$$0 \cdot 0=0; \qquad 0 \cdot 1=0; \qquad 1 \cdot 0=0; \qquad 1 \cdot 1=1.$$

Вернемся к предыдущему примеру и рассмотрим составные высказывания AB. Что оно обозначает? В отличие от дизъюнкции конъюнкция AB читается так: «На улице тепло и светит солнце». Два простых высказывания соединены союзом И, поэтому конъюнкцию нередко называют операцией И.

Третья операция – инверсия, или отрицание. Она обозначается чертой над буквой: $\overline{A}$. Например, если A это «На улице темно», то $\overline{A}$ – «На улице не темно».

Инверсия определяется следующими аксиомами:

$$\overline{0}=1; \qquad \overline{1}=0.$$

т.е. отрицание лжи есть истина, отрицание истины есть ложь.

Таким образом, полный список аксиом, которыми будем пользоваться в дальнейшем, имеет вид:

$$0+0=0; \tag{38}$$
$$0+1=1; \tag{39}$$
$$1+0=1; \tag{40}$$
$$1+1=1; \tag{41}$$
$$0 \cdot 0=0; \tag{42}$$
$$0 \cdot 1=0; \tag{43}$$
$$1 \cdot 0=0; \tag{44}$$
$$1 \cdot 1=1; \tag{45}$$
$$\overline{0}=1; \tag{46}$$
$$\overline{1}=0. \tag{47}$$

В литературе встречаются иные системы аксиом булевой алгебры. Например, Р. Сикорский [28, с. 75] в список своих аксиом включает свойства коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и др. Ещё одним примером является система аксиом Хантингтона, изложенная в [52, с. 35], по мнению автора, наиболее естественной является система аксиом, приведенная в [26, с. 51]. По этой причине она и взята за основу в данной работе.

Упражнения

1. (1ПЛ) Укажите номера аксиом, относящихся к дизъюнкции:
1) 0+0=0; 3) $\bar{1}=0$; 5) 1+1=1;
2) $1\cdot 1\neq 0$; 4) 1+0=1; 6) $1\cdot 0 = 0$.

2. (ЛКК) Укажите номера верных записей:
1) 1+0=1; 3) 0+1=0; 5) $1\cdot 1=1$;
2) $1\cdot 0=0$; 4) 1+1=1; 6) $0\cdot 1\neq 0$.

3. (АДМ) Укажите номера аксиом, относящихся к конъюнкции:
1) $1\cdot 0=0$; 3) $\bar{1}=0$; 5) 0+0=0;
2) 1+0=1; 4) $0\cdot 0=0$; 6) $1\cdot 1=1$.

4. (ЖИУ) Укажите номера верных записей:
1) 1+0=$0\cdot 1$; 3) $1+1=1\cdot 1$; 5) 1+0=0+1;
2) 0+1$\neq 0\cdot 1$; 4) $1\cdot 1=1+0$; 6) 1+0$\neq$1+1.

5. (2ДБ) Укажите номера верных записей:
1) $\bar{1}=1\cdot 1$; 3) $\bar{0}\neq 0\cdot 1$; 5) $\bar{1}\neq 0\cdot 1$;
2) $\bar{0}=1+1$; 4) $\bar{1}\neq\bar{0}$; 6) $\bar{1}=1+0$.

6. (РОН) Укажите номера верных записей:
1) $1+0+\bar{1}=1\cdot 1+\bar{1}$; 4) $0+\bar{0}=1\cdot 0+0\cdot 1$;
2) $\bar{1}+0=\bar{0}+\bar{1}$; 5) $0+\bar{0}+1=1+\bar{1}+0$;
3) $0+1+\bar{0}=0\cdot 0+\bar{0}$; 6) $0\cdot 1\cdot 1=\bar{1}+0\cdot 1$;

7. (ННИ)! Найдите значения выражений:
1) 0+1+1+0= 3) $\bar{0}$+1+0=
2) $0+0+\bar{1}+\bar{1}=$ 4) $1\cdot\bar{1}+\bar{0}\cdot 1=$

2.3. Свойства дизъюнкции и конъюнкции

Рассмотрим следующие основные свойства:

а) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством коммутативности:

$$A+B=B+A; \qquad AB=BA;$$

б) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством ассоциативности:

$$(A+B)+C=A+(B+C); \qquad (AB)C=A(BC),$$

что позволяет удалять скобки:

$$(A+B)=A+B+C; \qquad (AB)C=ABC;$$

в) конъюнкция дистрибутивна относительно дизъюнкции:

$$A(B+C)=AB+AC,$$

что позволяет раскрывать скобки в более сложных выражениях:

$$A(B+C+D+E)=AB+AC+AD+AE,$$

и выносить общий множитель за скобки:

$$ABC+ABD+ABEF=AB(C+D+EF);$$

$$AB+ADE+ACD+BCD=A(B+DE)+CD(A+B);$$

г) дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции:

$$A+BC=(A+B)(A+C);$$

$$A+BCD=(A+B)(A+C)(A+D);$$

$$A+BCDE=(A+B)(A+C)(A+D)(A+E) \text{ и т.д.;}$$

Таблица 2

Таблица истинности для A+BC и (A+B)(A+C)

A	B	C	A+BC	(A+B)(A+C)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

д) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством идемпотентности:

$$A+A=A; \qquad A \cdot A=A,$$

откуда следует, что в булевых многочленах нет ни коэффициентов, ни степеней.

Эти свойства легко доказываются при помощи системы аксиом путем сплошного перебора всех возможных значений, которые могут принимать переменные. Докажем, например, справедливость утверждений: дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции. Доказательство представим в виде таблицы 2.

В левой части таблицы перечислим все возможные наборы значений трех переменных, в правой выделим две колонки. Первую озаглавим выражением A+BC, вторую – (A+B)(A+C). Первый набор состоит из трех нулей. Следовательно. A=B=C=0. Подставим эти значения в первое и второе выражения. Тогда получим:

$$A+BC=0;$$
$$(A+B)(A+C)=0,$$

т.е. на наборе значений переменных, когда все три переменные равны нулю, утверждение справедливо.

Точно так же перебираем все остальные наборы значений переменных и заполняем правую часть таблицы. В результате получим две равные между собой колонки. Это значит, что на каждом возможном наборе значений переменных выражения A+BC и (A+B)(A+C) принимают одинаковые значения. Следовательно, утверждение «дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции» справедливо.

2.4. Теоремы одной переменной

Список основных теорем одной переменной имеет вид:

$$A+0=A; \tag{48}$$
$$A\cdot 0=0; \tag{49}$$
$$A+1=1; \tag{50}$$
$$A\cdot 1=A; \tag{51}$$
$$A+A=A; \tag{52}$$
$$A\cdot A=A; \tag{53}$$
$$A+\overline{A}=1; \tag{54}$$
$$A\cdot \overline{A}=0; \tag{55}$$
$$\overline{\overline{A}}=A. \tag{56}$$

Все теоремы одной переменной легко доказываются при помощи аксиом путем сплошного перебора значений переменной. Докажем справедливость теоремы (48). Пусть A=0, тогда получим 0+0=0, что является верным утверждением согласно аксиоме (38). Пусть теперь A=1. Получаем 1+0=1. Согласно аксиоме (40) также получаем верный результат.

Рассмотрим еще одну теорему A+A=A. Пусть A=0, тогда 0+0=0. Согласно аксиоме (38) это верный результат. Если A=1, то 1+1=1. Это также верное равенство согласно аксиоме (41).

Кроме перечисленных девяти теорем, можно рассматривать и другие теоремы одной переменной. Все они могут быть доказаны как с применением аксиом, так и теорем (48)–(56). Например, докажем, что

$$A\cdot1\cdot A+A\cdot\overline{A}+A=A\cdot\overline{\overline{A}}+\overline{0}\cdot A\cdot A. \qquad (57)$$

Преобразуем левую часть. Заметим, что по теореме (55), которую будем считать доказанной, $A\cdot\overline{A}=0$, следовательно:

$$A\cdot1\cdot A+A\cdot\overline{A}+A=A\cdot1\cdot A+0+A.$$

По теореме (48) $0+A=A$, следовательно,

$$A\cdot1\cdot A+0+A=A\cdot1\cdot A+A.$$

Согласно теореме (51) $A\cdot1=A$, тогда

$$A\cdot1\cdot A+A=A\cdot A+A.$$

По теореме (53) $A\cdot A=A$, следовательно

$$A\cdot A+A=A+A.$$

Наконец, по теореме (52) имеем $A+A=A$.

Преобразуем теперь правую часть. Согласно теореме (56) $\overline{\overline{A}}=A$, тогда

$$A\cdot\overline{\overline{A}}+\overline{0}\cdot A\cdot A=A\cdot A+\overline{0}\cdot A\cdot A.$$

В соответствии с аксиомой (46) имеем $\overline{0}=1$, следовательно:

$$A\cdot A+\overline{0}\cdot A\cdot A=A\cdot A+1\cdot A\cdot A.$$

По теореме (53) $A\cdot A=A$. Применяя ее дважды, получаем $A\cdot A+1\cdot A\cdot A=A+1\cdot A$.

По теореме (51) $1\cdot A=A$, следовательно,

$$A+1\cdot A=A+A.$$

Наконец, по теореме (52) получаем окончательно:

$$A+A=A.$$

Левая и правая части совпали, следовательно, выражение (57) является верным.

Упражнения

1. (РЭХ) С помощью аксиом найти номера выражений, равных единице:

1) $0\cdot\overline{0}=\overline{0}\cdot\overline{\overline{0}}+\overline{1}+\overline{\overline{1}}\cdot\overline{0}=$

2) $1\cdot1\cdot\overline{1}+1\cdot\overline{1}\cdot\overline{\overline{1}}+1\cdot\overline{0}\cdot1\cdot0=$

3) $1\cdot\overline{1}\cdot\overline{\overline{1}}+\overline{0}\cdot\overline{\overline{1}}+\overline{0}\cdot1\cdot\overline{1}=$

4) $0\cdot0\cdot\overline{1}+1\cdot1\cdot\overline{0}+0\cdot\overline{1}\cdot\overline{\overline{1}}=$

5) $0\cdot1\cdot1+\overline{1}\cdot\overline{1}\cdot\overline{0}+\overline{0}\cdot\overline{0}\cdot\overline{1}=$

6) $1\cdot 1\cdot \bar{\bar{0}}+0\cdot \bar{\bar{1}}\cdot 0+\bar{0}\cdot \bar{\bar{1}}\cdot \bar{1}=$

2. (ТРЮ) Найти в списке номера выражений, равных нулю:

1) $\bar{0}\cdot \bar{\bar{1}}\cdot 0+1\cdot \bar{0}+0\cdot 1=$

2) $1\cdot 0+\bar{0}\cdot 1\cdot 0+0\cdot \bar{1}=$

3) $1\cdot \bar{0}\cdot \bar{1}+\bar{\bar{0}}\cdot \bar{1}+\bar{\bar{1}}\cdot \bar{\bar{0}}=$

4) $0\cdot 1\cdot 1+\bar{0}\cdot \bar{1}\cdot \bar{1}+\bar{0}\cdot \bar{1}\cdot \bar{0}=$

5) $\bar{0}\cdot 1\cdot \bar{0}\cdot 1+\bar{1}\cdot \bar{0}\cdot \bar{1}\cdot \bar{0}+0\cdot \bar{1}\cdot \bar{1}=$

6) $1\cdot 1\cdot \bar{0}\cdot \bar{\bar{0}}+\bar{1}\cdot \bar{\bar{1}}\cdot 1+\bar{0}\cdot \bar{0}\cdot \bar{\bar{1}}\cdot 1=$

3. (ХХФ) Найти значение выражения:

$A+A\cdot \bar{A}+1\cdot \bar{A}+0\cdot A\cdot \bar{A}+\bar{A}\cdot \bar{\bar{A}}\cdot 1\cdot \bar{A}=$

4. (2ДЯ) Найти номера выражений, равных нулю:

1) $A\cdot \bar{A}\cdot A+1\cdot \bar{0}\cdot A+\bar{A}\cdot \bar{0}\cdot 1=$

2) $A\cdot \bar{A}\cdot 1+A\cdot \bar{A}\cdot \bar{\bar{A}}+A\cdot \bar{1}=$

3) $1\cdot \bar{1}\cdot \bar{A}+\bar{0}\cdot \bar{A}\cdot 1+A\cdot \bar{\bar{A}}\cdot \bar{0}=$

4) $0+1\cdot 0+A\cdot 0+\bar{A}\cdot 0+A\cdot \bar{A}=$

5) $A\cdot \bar{A}+\bar{\bar{A}}\cdot \bar{A}+A\cdot \bar{1}+\bar{A}\cdot \bar{1}=$

6) $\bar{0}\cdot A\cdot A\cdot \bar{1}+\bar{0}\cdot A\cdot 1\cdot \bar{A}+\bar{1}\cdot A\cdot A=$

2.5. Дизъюнктивные и конъюнктивные формы

Булевы формулы могут быть записаны в виде дизъюнкции либо в виде конъюнкции каких-либо выражений. В первом случае говорят о дизъюнктивной форме, во втором – о конъюнктивной. Например, выражения

$$AB+CDE;$$
$$A+B+CD;$$
$$A+B(C+D)+P;$$
$$A+B+T+К$$

представлены в дизъюнктивной форме, а выражения

$$(A+B)(C+D);$$
$$(AB+C)(E+F+К);$$
$$ABC(D+E)$$

– в конъюнктивной.

Если булева формула записана в виде дизъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с инверсией или без инверсии), либо конъюнкцию некоторых аргументов, то эта формула является представленной в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). Например, выражения

$$AB+C\overline{D};$$
$$A+\overline{B}+CD\overline{E};$$
$$A+B+C+\overline{D}$$

представлены в ДНФ, а формула $A+B(C+\overline{D})$ к ДНФ не относится, так как второе слагаемое не является ни отдельным аргументом, ни конъюнкцией переменных.

Аналогично, если булева формула записана в виде конъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с инверсией или без инверсии), либо дизъюнкцию некоторых аргументов, то эта формула является представленной в конъюнктивной нормальной форме (КНФ). Например, выражения

$$(A+\overline{B})(C+\overline{A}+D);$$
$$AB(C+D+\overline{E})$$

записаны в КНФ, а формула $(A+\overline{B}C)(D+E)$ КНФ не является, поскольку первый сомножитель (в скобках) содержит конъюнкцию $\overline{B}C$.

Выражение, представленное отдельным аргументом или его инверсией, одновременно входит в класс ДНФ и КНФ.

Упражнения

1. Укажите номера формул, представленных в ДНФ:

(ХНМ)	(ТХС)	(ЕЙК)
1) $AB+C\overline{D}$;	1) $AB+A(B+C)$;	1) A;
2) $A+B+C$;	2) $AB+ABAA$;	2) AA;
3) $A+BC+\overline{E}$;	3) $B+C+B+CA$;	3) AB;
4) $P+Q(P+R)$;	4) $A+A(A+A)$;	4) $A+\overline{A}$;
5) $A+A$;	5) $AAA+A$;	5) $A+BC$.

2. Укажите номера формул, представленных в КНФ:

(ТТР)	(ЛСС)	(ЛКК)
1) $(AC+B)A$;	1) $(A+B)(A+B)$;	1) $A+B$;
2) $A(B+C)$;	2) A;	2) $A+\overline{B}+\overline{C}$;
3) $B(AB+AB)$;	3) $ABC(D+EF)$;	3) $(A+AA)A$;
4) ABC;	4) $ABC(D+D)$;	4) $(A+\overline{A})\overline{A}$;
5) $A+B$;	5) $ABC(D+\overline{D})$;	5) BB.

2.6. Теорема поглощения

Теорема поглощения записывается в двух формах – дизъюнктивной и конъюнктивной, соответственно:

$$A+AB=A; \qquad (58)$$

$$A(A+B)=A. \qquad (59)$$

Выражение (59) можно получить из (58), если знаки дизъюнкции и конъюнкции поменять местами. Докажем первую теорему. Вынесем за скобки букву А:

$$A+AB=A(1+B).$$

Согласно теореме (50) 1+B=1, следовательно

$$A(1+B)=A^{\cdot}1=A.$$

Чтобы доказать вторую теорему, сначала раскроем скобки:

$$A(A+B)=A^{\cdot}A+AB=A+AB.$$

Получилось выражение, только что доказанное.

Рассмотрим несколько примеров на применение теоремы поглощения при упрощении булевых формул, содержащих более двух переменных.

Пример 1. ABC+BC=BC(A+1)=BC.

Пример 2. $\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}D=\overline{A}B\overline{C}(1+D)=\overline{A}B\overline{C}$.

Пример 3. A+AB+ABC=A+AB(1+C)=A+AB=A.

Пример 4. A(A+B+CD)=A+AB+ACD=A(1+B+CD)=A.

Пример 5. B(A+B+CD)=AB+B+BCD=B(A+1+CD)=B.

2.7. Теорема склеивания

Теорема склеивания также имеет две формы – дизъюнктивную и конъюнктивную:

$$AB+A\overline{B}=A; \qquad (60)$$

$$(A+B)(A+\overline{B})=A. \qquad (61)$$

Вторая теорема получается из первой, если в ней вместо знака конъюнкции поставить знак дизъюнкции, а дизъюнкцию заменить на конъюнкцией.

Докажем первую теорему. Вынесем за скобки букву А:

$$AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A^{\cdot}1=A,$$

поскольку, согласно теоремам (54) и (51)

$$B+\overline{B}=1; \qquad A^{\cdot}1=A.$$

Для доказательства второй теоремы раскроем скобки:

$$(A+B)(A+\overline{B})=A+A\overline{B}+AB+B\overline{B}.$$

Согласно теореме (55) $B\bar{B}=0$, следовательно:

$$A+A\bar{B}+AB+B\bar{B}=A+A\bar{B}+AB.$$

По теореме поглощения

$$A+A\bar{B}+AB=A(1+\bar{B}+B)=A.$$

Теорема поглощения, как и теорема склеивания, применяется при упрощении булевых формул.

Пример 1. $\bar{A}\,\bar{B}+\bar{A}\,B=\bar{A}\,(\bar{B}+B)=\bar{A}$.

Пример 2. $A\bar{B}C+ABC=AC(\bar{B}+B)=AC$.

Пример 3. $(AB+C)(AB+\bar{C})=AB+AB\bar{C}+ABC+C\bar{C}=AB$.

2.8. Теорема де Моргана

Теорема де Моргана связывает все три основные операции булевой алгебры – дизъюнкцию, конъюнкцию и инверсию:

$$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}; \qquad (62)$$

$$\overline{A+B}=\bar{A}\,\bar{B}. \qquad (63)$$

Первая теорема читается так: инверсия конъюнкции есть дизъюнкция инверсий. Вторая: инверсия дизъюнкции есть конъюнкция инверсий.

Теорема де Моргана применима и к большему числу переменных:

$$\overline{ABC}=\bar{A}+\bar{B}+\bar{C};$$

$$\overline{ABCD}=\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D};$$

$$\overline{A+B+C}=\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C};$$

$$\overline{A+B+C+D}=\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}.$$

Примеры на применение теоремы де Моргана:

$$\overline{A+\bar{B}+\bar{C}}=\bar{A}BC;$$

$$\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}}=A+B+C+D.$$

Упражнения

1. (153)! Применить теорему поглощения:

$\bar{A}+\bar{A}B=$ $\qquad$ $K+KP=$

2. Упростить выражения:

(ФЕА) $PQ+SPQ+PQRST=$

(Н0Б) $XYZ+XZ+XZV=$

(ВМВ) $ABC\bar{D}+ABCD+\bar{A}BC=$

3. Упростить:

(РХГ) $(B+C)(B+\bar{C})=$

(ИМД) $(BC+\bar{D})(BC+D)=$

(ИЖЕ) $(B+C)(B+\bar{C})D=$

(БКФ) $V(X+YZ)(\bar{X}+YZ)=$

4. Найти инверсию:

(УЮК) $\overline{\bar{B}\bar{C}\bar{D}}=$

(ДЖЛ) $\overline{\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}}=$

5. Упростить:

(ЕЖМ) $\overline{A+\bar{B}}\cdot\overline{\bar{C}+D}\cdot\bar{A}\cdot C=$

(ОНН) $\overline{P+Q}\cdot(P+Q)=$

(ЕЛО) $\overline{A+\bar{B}+C}\cdot(A+\bar{B}+C)+D=$

(ПНП) $\overline{RST}\cdot(\bar{R}+\bar{S}+\bar{T})\cdot RST=$

(ФЭР) $\overline{\bar{P}+\bar{Q}}+PQRS=$

2.9. Инвертирование сложных выражений

Теорема де Моргана применима не только к отдельным конъюнкциям или дизъюнкциям, но и к более сложным выражениям. Мы будем рассматривать инвертирование выражений, представляющих собой дизъюнкцию конъюнкций (сумму произведений) или конъюнкцию дизъюнкций (произведение сумм).

Пусть дано выражение в виде конъюнкции дизъюнкций:

$$AB+CD.$$

Найдем его инверсию вида

$$\overline{AB+CD}.$$

Инвертирование будем считать законченным, если знаки отрицания стоят только над переменными. Введем обозначения:

$$AB=X; \qquad CD=Y,$$

тогда

$$\overline{AB+CD}=\overline{X+Y}=\bar{X}\bar{Y}. \qquad (64)$$

Найдем $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ и подставив в выражение (64)

$$\bar{X}=\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B};$$

$$\bar{Y}=\overline{CD}=\bar{C}+\bar{D};$$

$$\overline{AB+CD}=\bar{X}\bar{Y}=(\bar{A}+\bar{B})(\bar{C}+\bar{D}).$$

Рассмотрим другое выражение, в виде конъюнкции дизъюнкций:

$$(A+B)(C+D).$$

Найдем его инверсию в виде

$$\overline{(A+B)(C+D)}.$$

Введем обозначения:

$$A+B=X; \qquad C+D=Y,$$

тогда

$$\overline{(A+B)(C+D)} = \overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y}. \tag{65}$$

Найдем $\overline{X}$ и $\overline{Y}$:

$$\overline{X} = \overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B},$$
$$\overline{Y} = \overline{C+D} = \overline{C}\,\overline{D}$$

и подставив их в выражение (65):

$$\overline{(A+B)(C+D)} = \overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}.$$

При инвертировании сложных выражений можно пользоваться следующим правилом:

Чтобы найти инверсию, необходимо знаки умножения заменить знаками сложения, а знаки сложения – знаками умножения и поставить инверсии над каждой переменной (независимо от того, есть над переменными знаки отрицания или нет):

$$\overline{AB + \overline{B}C + \overline{D}E} = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{\overline{B}} + \overline{C})(\overline{\overline{D}} + \overline{E}) = (\overline{A} + \overline{B})(B + \overline{C})(D + E);$$
$$\overline{(A + \overline{B} + \overline{C})(D + \overline{E})P} = \overline{A}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}} + \overline{D}\,\overline{\overline{E}} + \overline{P} = \overline{A}BC + \overline{D}E + \overline{P}.$$

Упражнения

1. Дано выражение

(ОВР) $AB+C\overline{D}+\overline{E}$.

Укажите номера формул, являющихся инверсией заданному выражению:

1) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)E$;

2) $(\overline{A}+\overline{B})E(\overline{C}+D)$;

3) $E(\overline{C}+D)(\overline{A}+\overline{B})$;

4) $(A+B)(C+\overline{D})E$;

5) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+\overline{E}$;

6) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+E$.

2. (Б5Ж) Найти номера верных формул:

1) $\overline{A(\overline{B}+C)} = \overline{A} + B\overline{C}$;

2) $\overline{ABC(\overline{D}+\overline{E})} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + DE$;

3) $\overline{ABC(P+K)L} = A + B + C + PK + L$;

4) $\overline{\overline{(A+\overline{B})(C+\overline{D})}} = (A+\overline{B})(C+\overline{D})$;

5) $\overline{AB+C\overline{D}+E+F} = (\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+\overline{E}+\overline{F}$;

6) $\overline{\overline{A\overline{B}+CD+\overline{E}}}$=($\overline{A}$+B)($\overline{C}$+$\overline{D}$)E.

3. Найти инверсию выражения и упростить:

(ВУТ) ($\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$)($\overline{B}+\overline{C}$)($\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$);

(ФУУ) $(\overline{X}+\overline{Y})(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})(T+\overline{X}+\overline{Y})$;

(ИДФ) ($\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$)($\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$)($\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$).

2.10. Дизъюнктивные формы булевых функций. Понятие булевой функции

Булевы выражения, которые рассматривались до сих пор, представляют собой функции соответствующих аргументов. Например:

$$f\text{=A}\overline{B}\text{+C}. \qquad (66)$$

Символом *f* здесь обозначена функция, которая является, как и аргументы A, B, C, двоичной переменной. Аргументы – это независимые переменные, они могут принимать любые значения – либо 0, либо 1. Функция же *f* – зависимая переменная. Ее значение полностью определяется значениями переменных и логическими связями между ними.

Главная особенность функции: чтобы определить ее значение, в общем случае необходимо знать значения всех аргументов, от которых она зависит. Например, функция (66) зависит от трех аргументов. Если принять A=1, то получим

$$f=1\cdot\overline{B}+C=\overline{B}+C,$$

т.е. получилось новое выражение, не равное ни нулю, ни единице. Пусть теперь B=1. Тогда

$$f=\overline{1}+C=0+C=C,$$

т.е. и в этом случае неизвестно, чему равна функция, нулю или единице.

Примем, наконец, C=0, тогда получим *f*=0. Таким образом, если A=1, B=1, C=0, то *f*=0.

Упражнения

1. Найдите значения функций, если A=1, C=0:

(75К) $f=\overline{A}$+BC+AC; (33П) *f*=A+BCD;

(БКС) *f*=AC+AD; (ЯНЯ) *f*=BC+AC.

2. Введите в устройство десятичные эквиваленты наборов, на которых функция принимает единичное значение:

(ЕХН) $f=\overline{A}BC+AB\overline{C}$; (НБС) $f=AB+AC$;

(Т50) $f=BC+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; (УНР) $f=\overline{A}C+B\overline{C}$;

(РТА) $f=AB+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; (ТВУ) $f=A\overline{C}+\overline{A}C$.

3. Булева функция зависит от шести элементов. Найдите наборы значений аргументов, если десятичные номера их имеют вид:

(С5) 16; (РЖ) 22; (ЫН) 55;

(КЛ) 4; (АХ) 60.

4. (ЕМ) Укажите номера функций, принимающих единичное значение на наборе 12:

1) $f=A\overline{B}+B\overline{D}+\overline{A}C$; 4) $f=\overline{C}+BD+\overline{A}\,\overline{B}$;

2) $f=BD+AC+CD$; 5) $f=ABC+BD$;

3) $f=\overline{D}+\overline{A}C+\overline{B}D$; 6) $f=\overline{A}\,\overline{C}+AC+BD$.

5. (ТБС) Функция четырех аргументов принимает единичное значение на наборах 0, 1,..., 12, а на остальных – нулевое. На каких наборах функция принимает нулевое значение? (Наборы представить в десятичной системе).

6. (КАА) Функция четырех аргументов на половине наборов принимает нулевое значение, а на остальных – единичное. Сколько существует наборов, на которых функция принимает нулевое значение?

7. (ФИ) Функция трех аргументов принимает единичное значение на трех наборах, в двоичных изображениях которых только одна единица. Найти десятичные номера наборов, на которых функция равна единице.

8. (БМТ) Дана функция $f=AB+\overline{A}C+BC+AD$. Упростить эту функцию при условии, что A=0.

9. (ГШЛ) Известно, что функция трех аргументов X, Y, Z принимает единичное значение только на одном наборе 6. Найти аналитическое выражение этой функции.

2.11. Как задать булеву функцию

Один способ задания булевой функции мы уже знаем. Это аналитический, т.е. в виде математического выражения с использованием букв и логических операций. Кроме него, существуют и другие способы, важнейшим из которых является табличный. В таблице перечисляются все возможные наборы значений аргументов и для каждого набора указывается значение функции. Такую таблицу называют таблицей соответствия (иногда ее называют таблицей истинности).

На примере функции

$$f=\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}+\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{C}+\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}\,\overline{\mathrm{C}} \tag{67}$$

выясним, как построить для нее таблицу соответствия. Функция зависит от трех аргументов A, B, C. Следовательно, в таблице предусматриваем три колонки для аргументов A, B, C и одну колонку для значений функции (см. табл. 3). Слева от колонки A полезно разместить еще одну колонку. В ней будем записывать десятичные числа, которые соответствуют наборам, если их рассматривать как трехразрядные двоичные номера. Эта десятичная колонка вводится для удобства работы с таблицей, поэтому в принципе ее можно пренебречь.

Таблица 3

Таблица соответствия функции $f=\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}+\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{C}+\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}\,\overline{\mathrm{C}}$

№	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Заполняем таблицу. В строке с двоичным номером 000 указано:

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}=0.$$

Определим значение функции на этом наборе:

$$f=0\cdot\overline{0}+\overline{0}\cdot 0+\overline{0}\cdot 0\cdot\overline{0}=0.$$

Так как f=0 на наборе 000, то в колонке f записываем нуль в строке с набором 000.

Следующий набор: 001, т.е. A=B=0, C=1.

Находим значение функции (67) на этом наборе:

$$f = 0 \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot 1 + \overline{0} \cdot 0 \cdot \overline{1} = 1.$$

На наборе 001 функция равна 1, следовательно, в колонке f во второй сверху строке (с номером 1) записываем единицу.

Аналогично вычисляем значения функции (67) на всех остальных наборах и заполняем всю таблицу.

Упражнения

1. (МУБ) Сколько строк имеет таблица соответствия четырех аргументов?
2. (КРВ)! Функцию f=A$\overline{\text{B}}$+B$\overline{\text{C}}$ представить в виде таблицы соответствия. Сколько единиц содержится в колонке f ? Сколько нулей содержится в колонке f ?
3. (ПАГ) Функция f=AB представлена в виде таблице соответствия трех аргументов. Сколько единиц и сколько нулей содержится в колонке f ?
4. (00Д) В таблице соответствия пяти аргументов колонка f содержит 19 единиц. Сколько нулей в этой колонке?
5. (0МЕ) В колонке f таблицы соответствия шести аргументов содержится 64 единицы. Сколько в этой колонке нулей?
6. (ТРЖ) В таблице соответствия семи аргументов колонка f содержит поровну единиц и нулей. Сколько в ней нулей?
7. (2ЮИ)! Дана таблица соответствия четырех аргументов A, B, C, D. Сколько единиц содержится в колонке A? В колонке B? В колонке C? В колонке D?
8. (КБК) Дана таблица соответствия восьми аргументов. Сколько единиц и сколько нулей содержится в 197-й строке (включая колонку f), если значение функции при этом равно нулю?

2.12. Минтермы

Существуют булевы функции, которые принимают единичные значения только на одном наборе значений аргументов, а на всех остальных – нулевое. В таблице соответствия эта единственная единица может быть в любой строке, следовательно, таких функций существует 2^n, т.е. столько, сколько строк в таблице. Каждая из этих функций состоит из одной конъюнкции n аргументов, которые могут быть с инверсией или без инверсии, причем распределение инверсий находится в строгом соответствии с распределением нулей в двоичной записи того набора, на котором функция принимает единичное значение. Поясним это на примере. Пусть функция зависит от четырех аргументов и равна единице на наборе 0101, а на всех остальных наборах равна нулю. Представим ее в аналитической форме. Для этого запишем аргументы (в алфавитном порядке), а под ними – цифры набора:

A	B	C	D
0	1	0	1

Буквы, под которыми находятся нули, снабжаем знаком инверсии, в результате получаем искомое выражение функции:

$$f=\overline{A}B\overline{C}D.$$

Если построить таблицу соответствия, то в колонке f будет записана только одна единица – в строке с номером 5. (Это десятичный номер набора 0101).

Функции, которые принимает единичное значение только на одном наборе значений аргументов, имеют настолько важное значение, что они получили специальное название и специальное обозначение. Называют их минтермами (используются также термины: конституента единицы и элементарная конъюнкция). Минтермом n переменных называется такая конъюнкция их, в которую каждая переменная входит один раз в прямой или инверсной форме. Обозначаются минтермы буквой m с десятичным индексом, являющимся номером минтерма [52, с. 49-50]. Двоичный эквивалент номера минтерма – это набор, на котором минтерм принимает единичное значение. Например, если функция зависит от трех аргументов A, B, C, то

$$m_0=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},\ m_1=\overline{A}\,\overline{B}C,\ m_2=\overline{A}B\overline{C},\ m_3=\overline{A}BC, \text{ и т.д.}$$

Если функция зависит от четырех аргументов, то минтермы с теми же индексами примут вид

$$m_0=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D},\ m_1=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D,\ m_2=\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D},\ m_3=\overline{A}\,\overline{B}CD, \text{ и т.д.}$$

Минтермы обладают свойством: конъюнкция любых двух различных минтермов, зависящих от одних и тех же аргументов, тождественно равна нулю. Справедливость этого утверждения следует из того, что два таких минтерма могут отличаться только инверсиями аргументов, т.е. если минтермы не равны, то всегда найдется переменная, которая в один минтерм входит в прямой форме (без инверсии), а в другой – с отрицанием, конъюнкция которых равна нулю. Например, если n=4, то

$$m_{12}m_5=AB\overline{C}\,\overline{D}\cdot\overline{A}B\overline{C}D=0.$$

Все символы, входящие в это выражение, соединены знаками конъюнкции. Сгруппируем группы по парам:

$$m_{12} \cdot m_5 = \mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}} \cdot \overline{\mathrm{C}} \cdot \overline{\mathrm{D}} \cdot \mathrm{D} = 0.$$

Так как имеются случаи, когда перемножается буква и ее отрицание, то вся конъюнкция принимает нулевое значение.

Если же минтермы равны между собой, то их конъюнкция дает тот же минтерм.

Упражнения

1. (КШУ) Запишите двоичный набор, на котором минтерм $\overline{\mathrm{A}}\mathrm{BCD}$ принимает единичное значение.

2. Запишите двоичные наборы, на которых минтермы принимают единичное значение:

(КХФ) $\mathrm{AB}\overline{\mathrm{C}}\,\overline{\mathrm{D}}\mathrm{E}$; (ЛТК) $\mathrm{P}\overline{\mathrm{Q}}\mathrm{R}\overline{\mathrm{S}}\mathrm{T}\overline{\mathrm{U}}$;

(УВЛ) $\mathrm{VX}\overline{\mathrm{Y}}\mathrm{Z}$; (ЕСЕ) $\mathrm{A}_1\overline{\mathrm{A}}_2\mathrm{A}_3\overline{\mathrm{A}}_4\overline{\mathrm{A}}_5$;

(УЛМ) $\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}\overline{\mathrm{D}}$; (ПШН) $\overline{\mathrm{X}}_1\mathrm{X}_2$.

3. Даны наборы, на которых минтермы принимают единичные значения. Запишите алгебраические выражения минтермов, располагая буквы в алфавитном порядке и всякий раз начиная с буквы А:

(БЦА) 0011;	(ЫЛБ) 1100;	(ВШС) 00011;
(АУД) 111000;	(ДАЕ) 11111;	(ТАФ) 1111;
(ЕЫГ) 111;	(ЖФИ) 000;	(МХК) 01.

4. (БОС) Укажите номера, где записаны минтермы:

1) $\mathrm{AB}\overline{\mathrm{C}}$;	3) A+B+C;	5) PQRS;	7) $\mathrm{AK}\overline{\mathrm{K}}\mathrm{B}$;
2) $\mathrm{ABA}\overline{\mathrm{C}}$;	4) $\mathrm{BC}\overline{\mathrm{D}}$;	6) $\mathrm{AC}\overline{\mathrm{M}}$;	8) $\mathrm{AB}\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}$.

2. (АХТ) Укажите номера, где записаны минтермы:

1) AB;	3) SS;	5) $\mathrm{AB} \cdot 1$;	7) $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\overline{\mathrm{A}}_3$;
2) $\mathrm{ABA}\overline{\mathrm{C}}$;	4) A;	6) $\mathrm{C}\overline{\mathrm{C}}$;	8) $\mathrm{X}_1\overline{\mathrm{X}}_2$.

3. Запишите в аналитической форме минтермы, если известно, что все они зависят от пяти аргументов A, B, C, D, E:

(ЦКУ) m_{10};	(НКФ) m_1;	(ЛЭХ) m_0;
(КЛЦ) m_{20};	(ЕМЧ) m_{16};	(КАШ) m_{15};
(БЕЩ) m_{31};	(ЧАЭ) m_{30}.	

4. Найдите десятичные индексы минтермов:

(ОХ1) $\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{C}}\mathrm{D}$;	(НВ2) $\mathrm{B}\overline{\mathrm{C}}\mathrm{D}$;	(ЦМ3) $\mathrm{C}\overline{\mathrm{D}}$;
(ВТЧ) A;	(КН5) $\overline{\mathrm{A}}_1\overline{\mathrm{A}}_2\overline{\mathrm{A}}_3$;	(ЛЭ7) $\overline{\mathrm{P}}$;
(ЖТ8) Q;	(ЙЙ6) $\overline{\mathrm{X}}_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3\overline{\mathrm{X}}_4$.	

5. Найдите значение конъюнкции минтермов:

(КИА) $AB\overline{C}\cdot A\overline{B}\,\overline{C}=$ (ИЮД) $A\overline{B}\cdot A\overline{B}C=$

(ЦЦБ) $AB\cdot P\overline{Q}R=$ (КОЕ) $\overline{B}C\cdot A\overline{B}C=$

(ИЛВ) $AB\cdot B\overline{C}D=$ (ПИЖ) $AB\overline{C}\cdot AC\overline{D}=$

(ЛЫГ) $PQR\cdot\overline{R}ST=$ (ПМЗ) $X\overline{Y}Z\cdot Y\overline{Z}X=$

6. (ПД1) Сколько существует минтермов пяти аргументов?

7. (Т52) Сколько существует минтермов семи аргументов?

8. (НУЗ) Сколько существует минтермов шести аргументов, двоичные индексы которых начинаются с единицы?

9. (304) Сколько существует минтермов шести аргументов, двоичные индексы которых начинаются с нуля?

10. (325) Сколько существует минтермов шести аргументов, двоичные индексы которых начинаются с двух нулей?

11. (ЮЮ6) Сколько существует минтермов шести аргументов, двоичные индексы которых оканчиваются двумя единицами?

12. (597) Сколько инверсных аргументов содержит минтерм m_0, зависящий от аргументов A, B, C, D, E, F?

13. (А18) Сколько инверсных аргументов содержит минтерм m_3 и сколько минтерм m_5, если оба они зависят от семи аргументов?

14. (879) Сколько прямых (не инверсных) аргументов содержит каждый из минтермов m_5, m_7, m_{11}, если они зависят от аргументов A, B, C, D, E?

15. (Д00) Сколько существует минтермов, двоичные индексы которых содержат точно две единицы, если минтермы зависят от пяти аргументов?

16. (806) Сколько существует минтермов пяти аргументов, двоичные индексы которых содержат точно три единицы?

2.13. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Если таблица соответствия содержит одну единицу в колонке f, то функция представляет собой минтерм. А что будет, если в колонке f окажется две единицы (в различных строках, разумеется)? Каждая единица представляет собой минтерм, следовательно, функцию образует их дизъюнкция. Такой случай приведен в таблице 4.

В ней единицы расположены в строках 2 и 5, следовательно:

$$f=m_2+m_5=\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}C.$$

Аналогично рассуждая, придём к выводу о том, что в функцию могут входить три, четыре и так далее минтермов. И вообще, всякая совокупность единиц в колонке f дает некоторую булеву функцию и ее всегда можно записать в виде суммы минтермов.

Таблица 4

Задание булевой функции F

№	A	B	C	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Если функция представлена в виде дизъюнкции минтермов n аргументов, то говорят, что она записана в совершенной дизъюнктивной нормальной форме, сокращенно СДНФ.

Пусть дана функция, принимающая единичные на наборах 001, 010, 100, 101 и 110. Тогда ее аналитическое представление в СДНФ примет вид:

$$f=\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}+\overline{\mathrm{A}}\mathrm{B}\overline{\mathrm{C}}+\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{C}}+\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}+\mathrm{AB}\overline{\mathrm{C}}.$$

Ее можно записать и иначе, через обозначение минтермов:

$$f=m_1+m_2+m_4+m_5+m_6.$$

Букву m можно удалить и указать только номера минтермов, т.е. номера наборов, на которых функция равна единице:

$$f=(1, 2, 4, 5, 6).$$

Всякая булева функция заданного числа аргументов представима в виде суммы минтермов единственным образом. По этой причине СДНФ называют иногда стандартной формой, а также канонической.

Сколько существует булевых функций n аргументов? На этот вопрос легко ответить, если учесть, что две функции совпадают только в том единственном случае, когда они состоят из одних и тех же минтермов. Следовательно, всякому набору минтермов соответствует отдельная булева функция. Чтобы определить число всех возможных наборов минтермов, запишем эти минтермы в ряд:

$$m_0 m_1 m_2 \ldots m_{2^n-1}$$

и каждому из них поставим в соответствие двоичный разряд. Пусть единица обозначает, что относящийся к ней минтерм входит в функцию, а нуль говорит о том, что соответствующий минтерм в функции не входит. Тогда каждое 2^n-разрядное двоичное число будет обозначать некоторую булеву функцию и общее число N всех возможных функций:

$$N = 2^{2^n},$$

т.е. общее количество функций равно числу всех возможных 2^n-разрядных двоичных чисел. Например, существует 256 функций трех аргументов, 65536 функций четырех аргументов, 4294967296 функций пяти аргументов и т.д.

Упражнения

1. Сколько минтермов содержат функции, если они зависят от четырех аргументов?

(ИКА) f=AB+CD. (ЛХГ) $f=\mathrm{A}+\overline{\mathrm{B}}\mathrm{CD}$.

(МОБ) $f=\mathrm{A}+\overline{\mathrm{B}}+\overline{\mathrm{C}}+\mathrm{D}$. (ЖСД) $f=\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{C}}\,\overline{\mathrm{D}}$.

(ЛВВ) f=P+QRS. (ХХЕ) f=VXYZ.

2. Представить в аналитическом виде СДНФ функций, зависящих от трех аргументов A, B, C:

(ЖУЖ) f=AB; (ВЮЗ) $f=\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}$;

(ККИ) $f=\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}+\mathrm{AC}$; (МВК) $f=\mathrm{A}\overline{\mathrm{C}}$;

(КПЛ) $f=\mathrm{BC}+\overline{\mathrm{A}}\mathrm{C}$;(ГЭМ) $f=\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}+\mathrm{AC}$.

3. (ДЕЙ) Укажите номера функций, представленных в СДНФ:

1) f=A; 4) $f=\mathrm{AB}\overline{\mathrm{C}}+\mathrm{AC}\overline{\mathrm{D}}+\mathrm{BC}\overline{\mathrm{D}}$;

2) f=ABCD; 5) $f=\mathrm{AB}\overline{\mathrm{C}}+\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\mathrm{D}+\overline{\mathrm{A}}\mathrm{CD}+\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}\overline{\mathrm{D}}$;

3) $f=\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}+\overline{\mathrm{A}}\mathrm{B}$; 6) $f=\mathrm{XYZ}+\overline{\mathrm{X}}\,\overline{\mathrm{Y}}\,\overline{\mathrm{Z}}$.

4. (РЭХ) Укажите номера функций, записанных в СДНФ:

1) f=X; 4) $f=\overline{\mathrm{X}}$;

2) $f=\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{A}}+\mathrm{B}\cdot\overline{\mathrm{B}}$; 5) $f=\mathrm{PQ}+\mathrm{P}+\overline{\mathrm{Q}}$;

3) $f=\mathrm{A}+\overline{\mathrm{A}}$; 6) $f=\mathrm{X}\overline{\mathrm{X}}$.

5. (ЛХШ) Укажите номера функций, записанных в СДНФ:

1) $f=\mathrm{X}\overline{\mathrm{Y}}\,\overline{\mathrm{Z}}$; 4) f=PQ;

2) $f=\mathrm{X}+\overline{\mathrm{Y}}+\overline{\mathrm{Z}}$; 5) f=R;

3) f=(X+Y)(Z+Y); 6) $f=\mathrm{PQ}+\overline{\mathrm{P}}\mathrm{Q}$.

6. Запишите в аналитической форме функции, зависящие от трех аргументов A, B, C:

(ДЦР) $f=m_1+m_3+m_4$; (ММУ) $f=m_0+m_1$;

(ГМС) $f=m_0+m_7$; (ПУФ) $f=m_1+m_2+m_6$;

(EMT) $f=m_7$; (НИХ) $f=m_5+m_6+m_7$.

7. Запишите десятичные номера минтермов, образующих функции четырех аргументов (номера упорядочить по возрастанию):

(НЕИ) $f=m_0+m_1+m_4+m_7+m_{10}$;

(ТАК) $f=\overline{A}BCD+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+AB\overline{C}D$;

(ЗНЛ) f=ABC;

(МТМ) $f=A\overline{B}$;

(НАН) f=C;

(УПО) $f=CD+\overline{C}\,\overline{D}$.

2.14. Алгебраическое упрощение булевых функций

В подразделах 2.6 и 2.7 уже упоминался термин «упрощение», но без раскрытия его содержания, так как для понимания простейших преобразований с применением теорем поглощения и склеивания интуитивного представления об упрощении было вполне достаточно. Теперь уточним это понятие. Условимся считать, что под упрощением (минимизацией) булевой функции будем понимать такие тождественные преобразования ее формулы, которые приводят к уменьшению числа вхождений аргументов. В пределе такие преобразования дают минимальную форму.

Выясним, что понимается под числом вхождений аргументов и чем оно отличается от числа аргументов. Рассмотрим пример:

$$f=A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}D.$$

Эта функция зависит от четырех аргументов A, B, C, D, но имеет пять вхождений аргументов. Функция

$$f=A+\overline{A}B+BC+AC \tag{68}$$

зависит от трех аргументов A, B, C, но имеет семь вхождений аргументов. Таким образом, число вхождений аргументов – это общее число букв, образующих функцию, при этом, если некоторая буква встречается два раза, то и учитывается два раза, если встречается три раза, то и учитывается три раза и т.д.

Рассмотрим функцию (68). Нетрудно заметить, что ее можно упростить:

$$f=A+\overline{A}B+BC+AC=A(1+C)+\overline{A}B+BC=A+\overline{A}B+BC.$$

Слагаемое A поглощает конъюнкцию AC, следовательно, вместо суммы A+AC можно записать A. В результате число вхождений аргументов уменьшилось до пяти.

Чтобы продолжить упрощение, необходимо проявить некоторую изобретательность. Запишем пока так:

$$f\text{=}A+\overline{A}B+BC=A\cdot 1+\overline{A}B+BC=A(B+\overline{B})+\overline{A}B+BC=AB+A\overline{B}+\overline{A}B+BC=$$
$$=AB+A\overline{B}+\overline{A}B+AB+BC.$$

Вот так минимизация! Вместо пяти получили 10 вхождений аргументов! Как их получили? Сначала аргумент A умножили на единицу, тождество от этого не нарушилось. Затем единицу заменили на $B+\overline{B}$ и аргумент A умножили на дизъюнкцию $B+\overline{B}$. После этого раскрыли скобки и добавили в выражение конъюнкцию AB. Конечно, это скорее антиминимизация. Но посмотрим на полученное выражение. Первая и вторая конъюнкции склеиваются, третья и четвертая – тоже:

$$f\text{=}A(B+\overline{B})+B(\overline{A}+A)+BC=A+B+BC.$$

В результате получилось четыре вхождения аргументов. Смотрим далее. К сумме B+BC применима теорема поглощения:

$$B+BC=B(1+C)=B.$$

Тогда получаем

$$f\text{=}A+B+BC=A+B(1+C)=A+B.$$

Далее упростить это выражение невозможно. Заметим, что функция (68), которую мы упростили, зависела от трех аргументов и имела семь вхождений букв, а получилась та же функция, но имеющая всего два вхождения аргументов. Это те аргументы, от которых функция действительно (существенно) зависит. От аргумента C функция зависит не существенно (т.е. вообще не зависит). Таким образом, алгебраическая минимизация булевых функций сводится к применению теорем одного аргумента, а также теорем склеивания и поглощения.

Рассмотрим еще два примера:

Пример 1. Упростить функцию

$$f\text{=}AB\overline{C}+AC+BC+\overline{A}\,\overline{B}.$$

Сначала вынесем букву A за скобки и упростим скобочное выражение:

$$f\text{=}A(B\overline{C}+C)+BC+\overline{A}\,\overline{B}=A[B\overline{C}+C(B+\overline{B})]+BC+\overline{A}\,\overline{B}=$$
$$=A(B\overline{C}+BC+\overline{B}C+BC)+BC+\overline{A}\,\overline{B}=$$
$$=A[B(\overline{C}+C)+C(\overline{B}+B)]+BC+\overline{A}\,\overline{B}=A(B+C)+BC+\overline{A}\,\overline{B}=$$
$$=AB+AC+BC+\overline{A}\,\overline{B}.$$

Заметим, что выражение в скобках упрощено точно таким же образом, как в предыдущем примере.

Теперь вынесем за скобку букву C:

$$f\text{=}AB+C(A+B)+\overline{A}\,\overline{B}.$$

Выражение в скобках есть инверсия последней конъюнкции $\overline{A}\,\overline{B}$, т.е.

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}.$$

Обозначим: Q=A+B, $\overline{Q}=\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$, тогда

$$f=AB+CQ+\overline{Q}=AB+CQ+\overline{Q}(C+\overline{C})=AB+CQ+C\overline{Q}+\overline{C}\,\overline{Q}.$$

Добавим к этому выражению еще одну конъюнкцию $C\overline{Q}$, (равенство не нарушится):

$$f=AB+CQ+C\overline{Q}+\overline{C}\,\overline{Q}+C\overline{Q}=AB+C(Q+\overline{Q})+\overline{Q}(C+\overline{C})=AB+C+\overline{Q}.$$

Подставим вместо $\overline{Q}$ его значение: $f=AB+C+\overline{A}\,\overline{B}$.

Это и есть минимальная форма заданной функции.

Пример 2. Упростить $f=A\overline{C}+BC+\overline{A}B$.

Действуем следующим образом:

$$f=A\overline{C}+BC(A+\overline{A})+\overline{A}B=A\overline{C}+ABC+\overline{A}BC+\overline{A}B=A\overline{C}+ABC+\overline{A}B(C+1)=$$
$$=A\overline{C}+ABC+\overline{A}B=A(\overline{C}+BC)+\overline{A}B=A[\overline{C}(B+\overline{B})+BC]+\overline{A}B=$$
$$=A(B\overline{C}+\overline{B}\overline{C}+BC+B\overline{C})+\overline{A}B=A[\overline{C}(B+\overline{B})+$$
$$+B(C+\overline{C})]+\overline{A}B=A(\overline{C}+B)+\overline{A}B=A\overline{C}+AB+\overline{A}B=A\overline{C}+B(A+\overline{A})=A\overline{C}+B.$$

Упражнения

1. Определите число аргументов, от которых зависит функция, и число вхождений аргументов (функцию не преобразовывать):

(ПХ1) $f=A+BC$;

(ХД2) $f=A+A+A+\overline{A}$;

(ЕЧ3) $f=AB+A\overline{B}+A\overline{B}+A\overline{B}$;

(ЭУЧ) $f=\overline{A+B}+C+\overline{C}+C$;

(985) $f=A+\overline{A}B+\overline{B}C$;

(ОХ6) $f=A\cdot\overline{A}\cdot A\cdot\overline{A}$;

(ПВ7) $f=A+B+AB+AB$;

(УХ8) $f=\overline{\overline{A}\cdot A}\cdot\overline{A\cdot\overline{A}}$.

2. Найдите минимальную форму функции:

(ЕЧ1) $f=A\overline{C}+B+\overline{A}\,\overline{C}$;

(М09) $f=Y+X\overline{Z}+\overline{X}\,\overline{Z}$;

(ПК2) $f=P+\overline{P}Q$;

(Я00) $f=Q+P\overline{Q}$;

(П03) $f=P\overline{Q}+PQ+P\overline{Q}\,\overline{R}$;

(ЭЭ1) $f=(PQ+\overline{P}Q\overline{R})P$;

(УФЧ) $f=A+\overline{A}B+\overline{B}C$;

(ЕЛ2) $f=\overline{A}+AB+\overline{B}C$;

(ГЧ5) $f=A+\overline{A}\,\overline{B}+BC$;

(ТВ3) $f=X+\overline{X}Y+\overline{X}Z$;

(КК6) $f=P+\overline{P}Q+\overline{Q}R+\overline{R}S$;

(ДЧЧ) $f=(\overline{A}B+B\overline{C}+\overline{A}C)AB$;

(ВВ7) $f=(R+S)(\overline{R}+\overline{S})R\overline{S}T$;

(Л55) $f=(XY\overline{Z}+\overline{X}YZ)(X+\overline{Y})$;

(ИШ8) $f=(A+B+C)(\overline{A}+\overline{B})\overline{B}C$;

(ШР6) $f=(A+B+C)\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{P}Q$.

Тема 3. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

3.1. Введение

Первые сведения о графах, как о схемах в виде наборов точек, соединенных между собой какими-либо линиями, появилось в 18 веке. Сначала эти сведения были разрозненными и относились главным образом к головоломкам, играм и развлечениям. Но в конце 19 века в связи с развитием топологии значительно возрос интерес к теории графов. В то время она рассматривалась как одна из глав топологии. Однако вскоре обнаружилось, что методы теории графов успешно могут применяться и в других науках – социологии, экономике, биологии, медицине, химии, психологии и др., а также в различных областях дискретной математике, таких, как программирование, теория логических схем и многотактных дискретных автоматов, теория бинарных отношений и т.д.

В настоящее время теория графов, благодаря ее ярко выраженному прикладному характеру, применяется для решения многих вопросов практике, например, в задачах составления расписаний, при отыскании наиболее рациональной схемы перевозок каких-либо грузов, в расчетах электрических схем и других практических задачах.

Как раздел дискретной математики, теория графов в последнее время стала самостоятельной наукой и получила такое развитие, что отразить все ее достижения, даже путем краткого их перечисления, в небольшом учебном пособии совершенно невозможно. В связи с этим в данном разделе приведены лишь основные понятия теории графов и рассмотрены наиболее распространенные задачи – сетевого планирования и управления, решаемые ее методами.

В данном разделе приведено около 35 упражнений, закодированных в системе кодов информационно-дидактической системы СИМВОЛ. Самоконтроль при выполнении упражнений осуществляется точно так же, как и в случае предыдущих разделов. Выполнять упражнение рекомендуется все. Этим гарантируется минимально необходимая глубина изучения материала, запланированная автором при разработке пособия.

По теории графов и ее многочисленным положениям существует обширная литература. Каждый, кто заинтересуется какими-либо вопросами этой теории, всегда может обратиться к соответствующим источникам и изучить необходимые разделы, а также ознакомиться с теми проблемами, которые еще ждут своих исследователей.

3.2. Вводные понятия. Граф. Псевдограф. Мультиграф

В общем случае граф – это множество V точек, определенным образом соединенных между собой линиями, необязательно прямыми. Точки множества V называются вершинами графа, а соединяющие их линии – ребрами. Вершины графа обычно нумеруют десятичными числами, но можно использовать и любые другие знаки. Если вершины пронумерованы, то ребра обозначают неупорядоченными парами номеров вершин. Каждую пару образуют номера тех вершин, которые соединены ребром.

Граф называется простым (или линейным, согласно [56, с. 56]), если любые две его вершины соединены не более чем одним ребром, и каждое ребро соединяет различные вершины. Пример простого графа приведен на рис. 28.

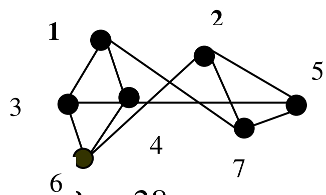


Рис. 28

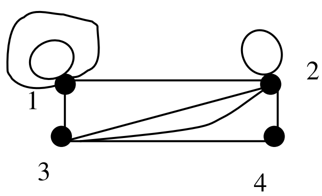


Рис. 29

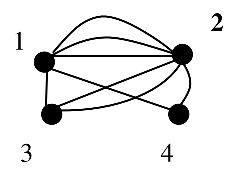


Рис. 30

Всякий простой граф может быть представлен не только в виде рисунка, но и аналитически. Пусть E – множество ребер графа, тогда согласно рис. 28 можно записать:

$$V=\{1,2,3,4,5,6\};$$

$$E=\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,7\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,7\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,7\}\},$$

где E – множество двухэлементных подмножеств множества V, каждое из которых определяет ребро, соединяющее вершины $v \in V$ и $w \in V$, при этом $v \neq w$.

Существуют графы, в которых те или иные пары вершин соеденены не одним ребром, а несколькими. Такие ребра называют кратными (параллельными). Кроме того, граф может содержать ребра, соединяющие какую-либо вершину саму с собой. Такие ребра называются петлями (ударение на первый слог во всех формах слова «петля»; лишь в именительном падеже единственного числа допускается ударение на второй слог [5; 37]).

Граф, содержащий кратные ребра или петли, называется псевдографом [12, с. 101; 35, с. 161]. Пример псевдографа приведен на рис. 29, где вершина 1 имеет кратные петли, вершина 2 – одиночную петлю, а вершины 2 и 3 соединены кратными ребрами.

Псевдограф без петель называется мультиграфом [12; 35]. Пример мультиграфа приведен на рис. 30.

Упражнения

1. (ЦПО) Укажите псевдографы на рис. 31.

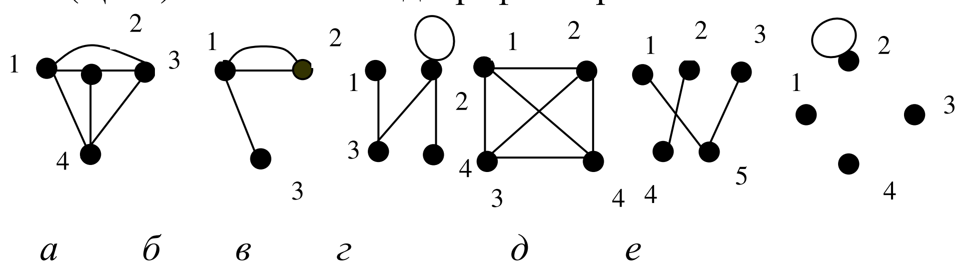


Рис. 31

2. (УЦН) Укажите мультиграфы на рис. 31.

3. (ЖРП) Укажите простые графы на рис. 31.

4. (ПКК) Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли быть простым граф, содержащий 4 вершины и 8 ребер?

2) может ли граф с одним ребром быть псевдографом?

3) может ли граф быть псевдографом, если в нем нет кратных ребер?

4) может ли граф с одним ребром быть мультиграфом?

5) граф содержит одну вершину. Может ли он быть мультиграфом?

6) граф содержит одну вершину. Может ли он быть псевдографом?

7) граф содержит одну вершину. Может ли он быть простым графом?

3.3. Подграф. Надграф. Частичный граф

Если из графа G удалить одну или несколько вершин, то вместе с ними будут удалены и выходящие из них ребра. Оставшиеся вершины и ребра образуют подграф G' графа G [16, с. 26, 89]. Очевидно, что для всякого подграфа справедливы утверждения: $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$ [16; 56], где V и E – множество вершин и ребер графа G: V' и E' – множество вершин и ребер подграфа G'. Из определения следует, что всякий граф является подграфом самого себя. Подграф называется собственным, если $V' \subset V$, т.е. если он не совпадает с исходным графом G .

Обратимся к рис. 28. Удалим из графа вершину 1. Вместе с ней удаляется и четыре ребра: (1,2), (1,3), (1,4), (1,7). В результате получится подграф, изображенный на рис. 32. Удалим из графа (рис. 28) вершины 4 и 7 (вершину 1 не удаляем). Получим подграф, приведенный на рис. 33.

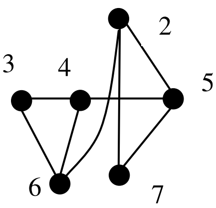


Рис. 32

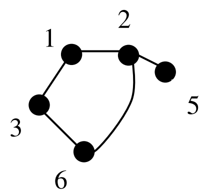


Рис. 33

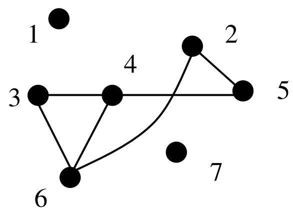


Рис. 34

Удалить из графа G можно и все вершины. Тогда от графа ничего не останется. Граф, не содержащий вершин, называется пустым графом. Очевидно, что пустой граф является подграфом любого графа.

Пусть задан некоторый граф G на n вершинах. Добавим к нему еще одну вершину и соединим ее каким-либо образом с вершинами графа G. Получившийся граф, содержащий n+1 вершин, называется надграфом по отношению к графу G [57, с. 129]. Например, граф, изображенный на рис. 28, является надграфом графа, приведенного на рис. 32.

По заданному графу подграф находится однозначно, т.е. удалив из графа одну или несколько вершин, с номерами 1, 2, 3, 4. Найдем его надграфы, добавив к графу вершину с номером 5. Эту вершину можно соединить с четырьмя вершинами графа различными способами. Чтобы найти их все, поставим в соответствии каждому ребру из множества K={{1, 5}, {2, 5}, {3, 5}, {4, 5}} двоичный разряд. Пусть ребру {1, 5} соответствует старший разряд, ребру {4, 5} – младший. Условимся считать, что если в i-м разряде двоичного числа записана единица, то ребро {i, 5} содержится в надграфе. Если же записан нуль, то ребра {i, 5} в надграфе нет (i=1, 2, 3, 4). Тогда все надграфы окажутся пронумерованными в двоичной системе 0000, 0001,…, 1111, откуда следует, что всего существует 16 надграфов. Например, двоичному числу 0000 соответствует надграф, состоящий из заданного графа и изолированной вершины с номером 5. Числу 0101 соответствует надграф, состоящий из заданного графа, к которому добавлено два ребра {2, 5} и {4, 5} и т.д.

Если в графе G все вершины оставить на своих местах и удалить одно или несколько ребер, то получится частичный граф. Формально частичный граф определяется следующим образом. Пусть V и E – множество вершин и ребер исходного графа G. Граф G' является частичным графом графа G, если $V'=V$ и $E'\subseteq E$ [16, с. 15, 89]. Согласно этому определению граф является частичным по отношению самому к себе.

Из графа G можно удалить и все ребра. Тогда останется граф, состоящий только из изолированных вершин. Граф, в котором нет ни одного ребра, называется нуль-графом [38, с.13]. Удалим из графа (рис. 28) ребра {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 7}, {2, 7}, {5, 7}. Тогда останется частичный граф (рис. 34). Его аналитическое представление имеет вид

$V'=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}=V$;

$E'=\{\{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}\subset E$.

Как и в случае подграфа, все частичные графы заданного графа можно пронумеровать в двоичной системе счисления, если каждому ребру поставить в соответствие двоичный разряд. Всего существует 2^k k-разрядных двоичных чисел. Столько же существует и частичных графов, где k – число ребер заданного графа.

Необходимо отметить, что в существующей литературе нет однозначности в определениях понятий подграфа и частичного графа. Например, в [12, с. 102] подграфом графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. Из этого определения следует, что нахождение подграфа в общем случае осуществляется неоднозначно. Пусть, например, дан граф: V={1, 2, 3, 4}; E={{1, 2}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 3}}.

Удалим вершину с номером 1. Получим подграф вида

$V'=\{2, 3, 4\}$; $E'=\{3, 4\}$, (1)

удовлетворяющий приведенному определению. Но ему удовлетворяют и другие графы, например:

$V'=\{2, 3, 4\}$; $E'=\{3, 4\}$;

$V'=\{2, 3, 4\}$; $E'=\{2, 4\}$;

$V'=\{2, 3, 4\}$; $E'=\varnothing$.

Отсюда можно сделать вывод, что в [12] дано понятие подграфа, совмещенное с вышеприведенным понятием частичного графа.

В определении понятия нуль-графа и пустого графа в литературе также нет однозначности. Например: «Если множество E ребер графа пусто, граф называется пустым. Если пусто не только множество E ребер, но и множество V вершин графа, граф называется нуль-графом» [29, с. 3].

Таким образом, при чтении специальной литературы необходимо обращать внимание на то, какой системы определений придерживается тот или иной автор, иначе трудности, связанные с пониманием материала, могут стать непреодолимыми.

Упражнения

1. Определите число вершин и число ребер подграфа, построенного на основе графа G (рис. 28) путем удаления из него:
(Т51) вершины 4; (452) вершин 1, 5, 6; (ФАЗ) вершин 1, 2, 3, 4, 7.

2. (384) Сколько различных подграфов можно получить на основе графа, изображенного на рис. 28?

3. Сколько собственных подграфов имеет граф, изображенный: (ТР5) на рис. 32? (Б26) на рис. 34?

4. (С87) Сколько надграфов имеет граф, содержащий 7 вершин, если в каждом надграфе 8 вершин?

5. (ДИМ) Граф содержит 5 вершин. К этому графу добавили 2 вершины. Получился надграф, содержащий 7 вершин. Сколько возможно таких надграфов?

6. Сколько частичных графов имеет граф:
(853) на рис. 28? (В54) на рис. 32? (575) на рис. 34?

7. (006) На какие вопросы вы ответите «да»:

1) является ли пустой граф частичным по отношению к графу, приведенному на рис. 33?

2) является ли нуль-граф, содержащий 7 вершин, частичным для графа на рис. 34?

3) является ли пустой граф подграфом нуль-графа?

4) является ли нуль-граф графа G на рис. 33 подграфом графа G?

5) верно ли, что если подграф G' некоторого графа G содержат n вершин, то всякий частичный граф подграфа G' также содержит n вершин?

6) верно ли, что если частичный граф G' некоторого графа G содержит n ребер, то всякий подграф частичного графа G' также содержит n ребер?

7) верно ли, что нуль-граф является частичным графом любого графа?

8. (827) Сколько вершин и сколько ребер содержит простой граф, если он имеет только один собственный подграф?

9. Сколько существует частичных графов, которые можно получить на основе графа, приведенного на рис. 28, путем удаления из него: (008) одного ребра? (БТН) двух ребер? (Р90) трех ребер?

10. (АД1) В простом графе 10 ребер. Сколько существует частичных графов, содержащих не менее 7 ребер?

3.4. Смежность. Инцидентность. Степень вершины

Две вершины $v\in V$ и $w\in V$, где V – множество вершин графа G, называются смежными, если они соединены ребром. Например, на рис. 34 смежными являются вершины 3 и 4, 3 и 6, 4 и 6, и др.

Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину [12, с. 102]. На рис. 34 смежными являются ребра {3, 4} и {3, 6}, {4, 5} и {2, 5} и др.

Если вершина является концом ребра, то эта вершина и ребро называются инцидентными. На рис. 34 ребро {3, 4} инцидентно вершине 3. Оно инцидентно и вершине 4.

Число $p(v)$ ребер, инцидентных вершине v. Например, степень ее вершины 3 (рис. 34) равна 2, степень вершины 4 равна 3.

Степень изолированной вершины равна нулю.

Вершина называется висячей, если степень ее равна 1.

Сумма степеней всех вершин графа есть четное число. Половина суммы степеней всех вершин равна числу всех ребер графа (любого, в том числе псевдографа и мультиграфа). Этим свойством можно пользоваться для определения числа ребер графа. Например, сумма степеней вершин графа, приведенного на рис. 34, равна:

$$p(1)+p(2)+\ldots+p(7)=0+2+2+3+2+3+0=12,$$

откуда следует, что в графе шесть ребер.

Вершина называется четной, если ее степень есть четное число. Вершина называется нечетной, если ее степень есть нечетное число.

В любом графе число нечетных вершин четно [3; 38]. Например, нечетными являются следующие вершины графа, приведенного на рис. 28: 3, 5, 6, 7, т.е. всего нечетных вершин 4 – четное число.

Число четных вершин в графе может быть любым – как четным, так и нечетным. Например, на рис. 34 граф имеет пять четных вершин:1, 2, 3, 5, 7, а на рис. 29 – четыре четные вершины:1, 2, 3, 4.

Упражнения

1. (ИМФ) Укажите номера всех пар вершин, являющихся смежными (рис. 28):

1) 1 и 2;	3) 3 и 4;	5) 1 и 7;	7) 6 и 7;
2) 1 и 5;	4) 3 и 5;	6) 2 и 7;	8) 2 и 1.

2. (ОС2) Укажите номера всех пар ребер, являющихся смежными (рис. 28):

1) {1, 4} и {2, 5};	4) {1, 7} и {2, 7};
2) {3, 4} и {4, 5};	5) {2, 6} и {5, 7};
3) {4, 6} и {2, 6};	6) {2, 6} и {2, 5}.

3. (ЦАЗ) Укажите номера вершин, инцидентных ребру {2, 6} (рис. 34).

4. (ТМИ) На рис. 31 укажите графы, имеющие в висячие вершины.

5. (СЕШ)! Сумма степеней всех вершин некоторого графа равна 20. К этому графу добавили три ребра (число вершин не меняли). Чему равна сумма степеней всех вершин нового графа? Сколько в нем ребер?

6. Сколько четных и сколько нечетных вершин в графе, изображенном:

(ПТ6) на рис. 31, *г*?	(УХ8) на рис. 31, *д*?
(ИГ7) на рис. 31, *е*?	(ЯС9) на рис. 30?

7. Для любого графа можно указать набор степеней его вершин. Например, для графа, приведенного на рис. 34, такой набор имеет вид 0223230, где 0 – это степень первой вершины, 2 – степень второй вершины, следующая цифра 2 – степень третьей вершины т. д. Но если набор задан, то построить соответствующий граф не всегда возможно. Укажите из нижеперечисленных наборы, для которых в принципе невозможно построить граф.

(П30)	(Р61)	(ХАЖ)
1) 0110232	1) 1134576	1) 1014567
2) 1110133	2) 2201017	2) 1234123
3) 2133444	3) 6994132	3) 0010000

4) 0011015	4) 5673345	4) 2221222
5) 2332133	5) 2673330	5) 0707107
6) 4210730	6) 3003003	6) 2356742
7) 2551110	7) 0011017	7) 3454321

8. (332) Сколько висячих вершин в графах *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е* (рис. 31)?

9. (813) Укажите номера вопросов, на которые вы ответите «да»:

1) существуют ли графы, в которых степень каждой вершины равна 0?

2) можно ли построить граф, в котором число четных вершин нечетно?

3) существует ли граф, содержащий одну вершину и одно ребро?

4) существует ли смежные вершины в нуль-графе?

5) верно ли, что если к каждому ребру графа на рис. 31, *в* добавить по одному кратному ребру, то степени всех вершин удвоятся?

6) можно ли построить граф, в котором одна нечетная вершина и три – четные?

3.5. Сетевое планирование и управление как применение теории графов

Сетевое планирование применяют для организации и составления календарных планов реализации больших комплексов работ. Это, например, научно-исследовательские работы с участием нескольких институтов, разработка автоматизированной системы бухгалтерского учёта, строительство большого объекта, освоение производства новой машины, планирование и осуществление космических исследований и т д. Во всех указанных случаях выполняется огромное количество взаимозаменяемых операций, в работу вовлекается множество людей, предприятий, организаций; управление осложняется новизной разработки, трудностью точного определения сроков и предстоящих затрат. В управлении сложными разработками высокоэффективными оказались *сетевые методы*, получившие широкое распространение. Использование этих методов позволяет сравнительно просто выяснить, когда необходимо начинать и заканчивать выполнение отдельных операций, как задержка хода выполнения некоторой операции влияет на время завершения всего проекта.

Для использования сетевых методов нужно, прежде всего, разбить крупный проект на отдельные операции (работы) и составить перечень операций. Некоторые из них могут выполняться одновременно, другие – только в определённом порядке. Например, при строительстве дома нельзя возводить стены раньше, чем сделан фундамент. Необходимо выяснить очерёдность выполнения всех операций списка.

Для этого составляем список операций, непосредственно предшествующих каждой операции. После этого нужно запланировать время, необходимое для выполнения каждой операции. Полученные данные обычно помещаются в таблицу.

Пример 3.1

Таблица 5

Исходные данные гипотетического проекта

Операция	Предшествующие операции	Время
α_1	–	10
α_2	–	5
α_3	–	15
α_4	α_1, α_2	18
α_5	α_2, α_3	19
α_6	α_4, α_5	18

В таблице приведены данные для проекта, состоящего из шести работ. Для каждой из них задана продолжительность и указаны непосредственно предшествующие ей операции. Можно построить по этим данным *сетевой график*, или *граф*.

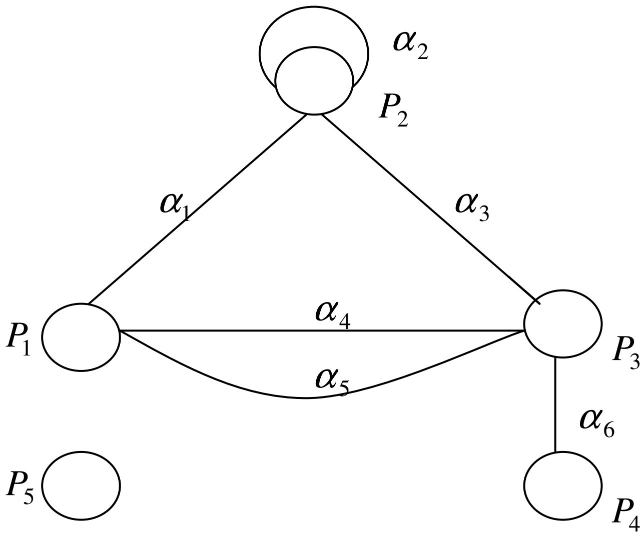


Рис. 35. Пример графа

Это пример графа, имеющего пять вершин и шесть ребёр. Если рассматривать множество упорядоченных пар точек, т.е. на каждом ребре задано направление, то граф называется *ориентированным*. В противном случае – неориентированном графом.

Рёбра, имеющие одинаковые концевые вершины, называются *параллельными*. Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется *петлёй*. На рис. 35 α_4 и α_5 – параллельные ребра, α_2 – петля. Граф называется *полным*, если любые две его различные вершины соединены ребром, и он не содержит параллельных рёбер.

Путём в графе называется такая последовательность рёбер, ведущая от некоторой начальной вершины P_1 в конечную вершину P_n, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза. Например, в графе-примере последовательность рёбер (α_1, α_2 ,α_3, α_4 ,α_5,α_6) образует путь, ведущий от вершины P_1 к вершине P_4.

Циклом называется путь, начальная и конечная вершины которого совпадают. На рис. 35 образуют цикл рёбра (α_1, α_3, α_4).

Длиной пути или цикла называется число рёбер этого пути или цикла.

В ориентированных графах на рёбрах задано направление, т.е. у каждого ребра фиксируется начало и конец. Такие направленные рёбра называются *дугами*.

Сетью называется граф, каждой дуге которого поставлено в соответствие некоторое число (или несколько чисел), обычно это время.

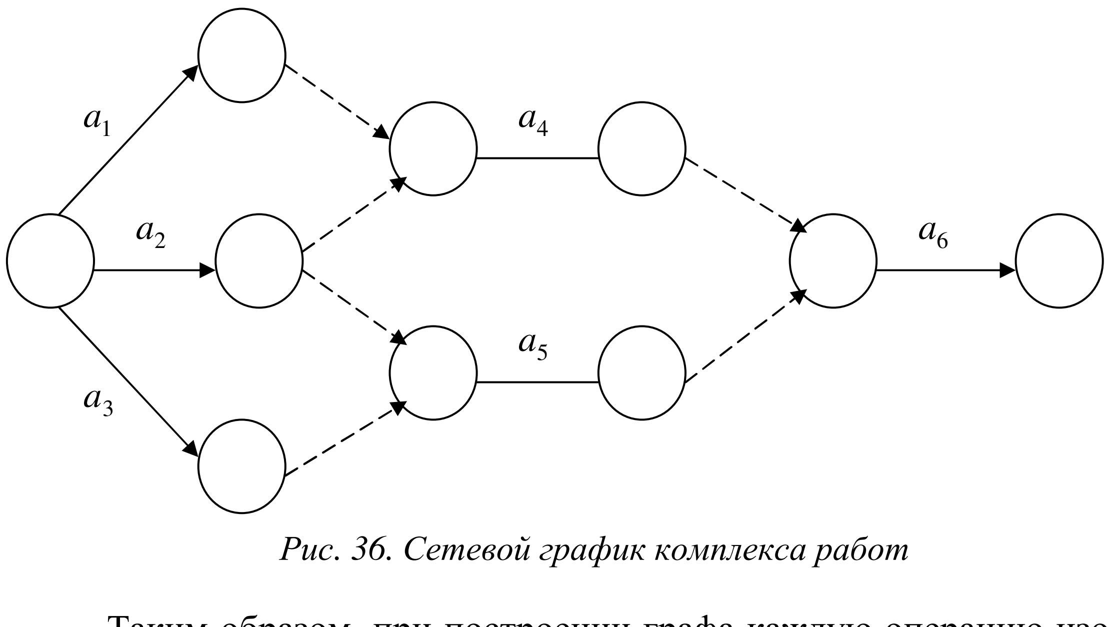


Рис. 36. Сетевой график комплекса работ

Таким образом, при построении графа каждую операцию изображают в виде ориентированной дуги. Связи между операциями также представляют в виде дуги. Дугу-связь проводят из конца дуги, соответствующей предшествующей операции, в начало следующей операции.

Чтобы отличить операции от связей, операции изображают сплошными линиями, а связи – пунктирами. Вершины графа называют *событиями*. Временем наступления события считают время, когда завершено выполнение всех операций, входящих в соответствующую вершину.

Таким образом, граф, представляющий взаимосвязь отдельных работ проекта, называется сетевым графиком. На рис. 36 построен сетевой график для комплекса операций, заданных таблицей из примера.

Главными элементами сетевого графика являются события и работы. *Событие* – это состояние, момент достижения промежуточной или конечной цели разработки (*начальное событие* – отправной момент разработки). Событие не имеет протяжённости во времени. *Работа* – это протяжённый во времени процесс, необходимый для свершения события. Любая работа имеет предшествующее событие и определённым событием заканчивается.

После первоначального составления сетевого графика необходимо проверить его на соответствие некоторым обязательным требованиям:

1. Только начальные события не имеют входящих стрелок, только конечные события – выходящих. Если событие по своему характеру является промежуточным, оно должно иметь как входящие, так и выходящие стрелки.

2. Каждая работа должна иметь предшествующее и завершающее события.

3. На графике не должно быть изолированных участков, не связанных работами с остальной частью графика.

4. На графике не должно быть контуров (циклов) и петель, т.к. они, по существу, означают, что условием начала некоторой работы является её же окончание.

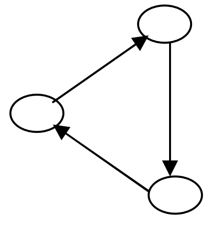


Рис. 37. Пример контура

При возникновении контура (а в сложных сетях это случается достаточно часто) необходимо вернутся к исходным данным и путём пересмотра состава работ добиться его устранения.

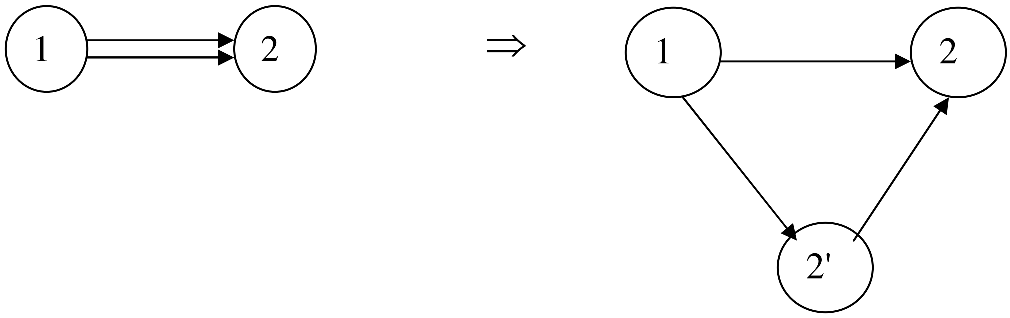


Рис. 38. Пример введения фиктивного события для устранения параллельности работ

5. Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой. При обнаружении на графике параллельных работ вводится необходимое число *фиктивных событий* (в нашем примере одно – 2') и соответствующее число фиктивных работ (рис. 38), и одна из параллельных работ замыкается на это фиктивное событие.

Это один из случаев, когда требуется введение фиктивных работ и событий.

Второй случай – отражение зависимости событий, не связанных реальными работами. Предположим, например, что работы *a* и *b* (см. рис. 39) могут выполняться независимо друг от друга, но требуют одного и того же оборудования, так что работа *b* не может начаться, пока не освободится оборудование с окончанием работы *a*. Это обстоятельство требует введения фиктивной работы *c* (рис. 39).

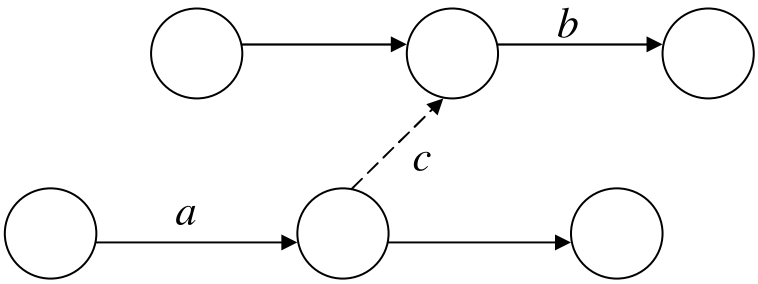


Рис. 39. Пример введения фиктивной работы

Третий случай – неполная зависимость работ. Например, работа *c* требует для своего начала завершения работ *a* и *b*, но работа *d* связана только с работой *b*, а от работы *a* не зависит.

Тогда требуется введение фиктивной работы *m* и фиктивного события 3', как показано на рис. 40.

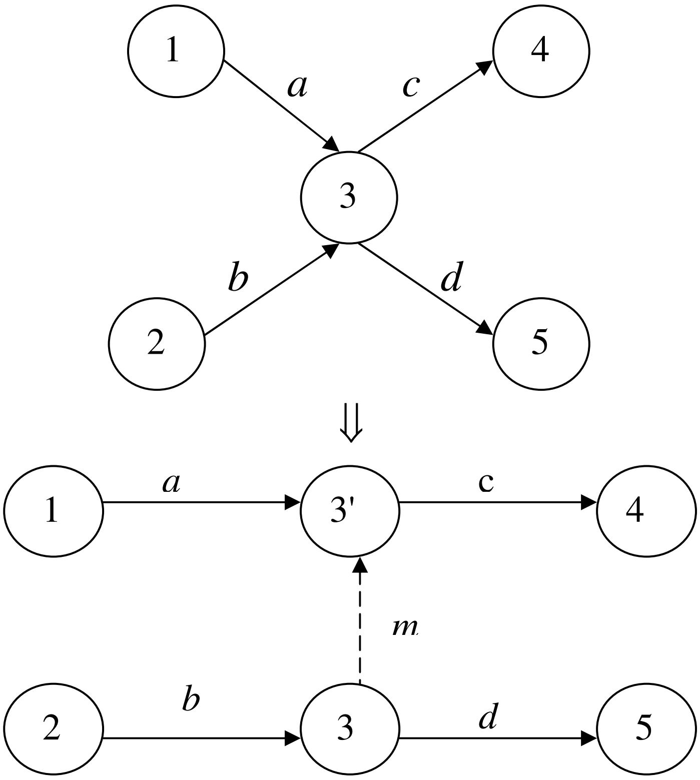


Рис. 40. Пример введения фиктивной работы и фиктивного события

Во всех трёх указанных случаях фиктивные работы не имеют протяжённости во времени, однако без их включения анализ сетевого графика может дать неверные результаты.

Четвёртый случай введения фиктивных работ – это отражение реальных отсрочек и ожиданий. В ряде технологических процессов требуется, например, естественное дозревание, брожение, затвердевание, высушивание и т п., когда реальная работа не производится, но следующий этап до определённого момента начаться не может. В подобных случаях в сетевой график вводятся фиктивные работы, имеющие соответствующую протяжённость во времени.

Пример 3.2

Проведём анализ сетевого графика (рис. 41), полученного в первоначальном варианте по следующим данным таблицы – перечня работ и событий (табл. 6). Этот график соответствует всем названным требованиям. Однако этот график не полностью упорядочен. Упорядочение сетевого графика заключается в таком расположении событий и работ, при котором все работы – стрелки направлены только слева направо. В каждом вертикальном «слое» упорядоченного графика находятся события, имеющие предшествующие события только в слоях, расположенных левее.

Таблица 6

Перечень событий и работ для составления сетевого графика примера 3.2

Работы	Событие	
	Предшествующее	Завершающее
А	1	2
Б	1	3
В	1	4
Г	2	5
Д	3	4
Е	3	6
Ж	4	5
З	4	6
И	4	7
К	5	8
Л	6	7
М	6	9
Н	7	8
О	7	9
П	7	10
Р	8	10
С	9	10

Для выделения слоёв и полного упорядочения нашего графика проделаем следующее. Поместив в первый слой начальное событие 1 (рис. 42), мысленно вычеркнем на графике это событие и выходящие из него стрелки. Тогда без входящих стрелок останутся события 2 и 3. Они образуют второй слой. Вычеркнув события 2 и 3 с выходящими из них работами, обнаружим, что без входящих стрелок остаётся событие 4, которое образует, таким образом, третий слой. Продолжая процедуру вычёркивания, получим четвёртый слой с событиями 5 и 6, пятый – с событием 7, шестой – с событием 8 и 9 и, наконец, седьмой слой с конечным событием 10.

Уже с первого взгляда ясно, что по сравнению с предыдущим графиком упорядоченный график (рис. 42) отражает последовательность событий и работ гораздо более чётко и наглядно. В сложных сетях упорядочение графика является первоочередным условием для его последующего анализа. Отметим, что правильно составленный график всегда может быть упорядочен, чего нельзя сказать, например, о графике, содержащем контуры. Методом вычёркивания получаем правильную нумерацию вершин графа. Конечная вершина при этом получает наибольший номер.

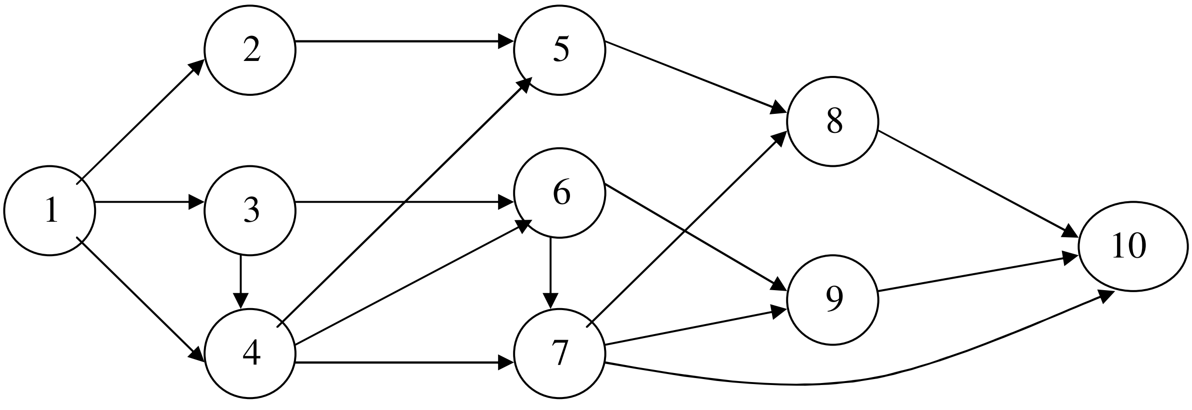


Рис. 41. Неупорядоченный сетевой график

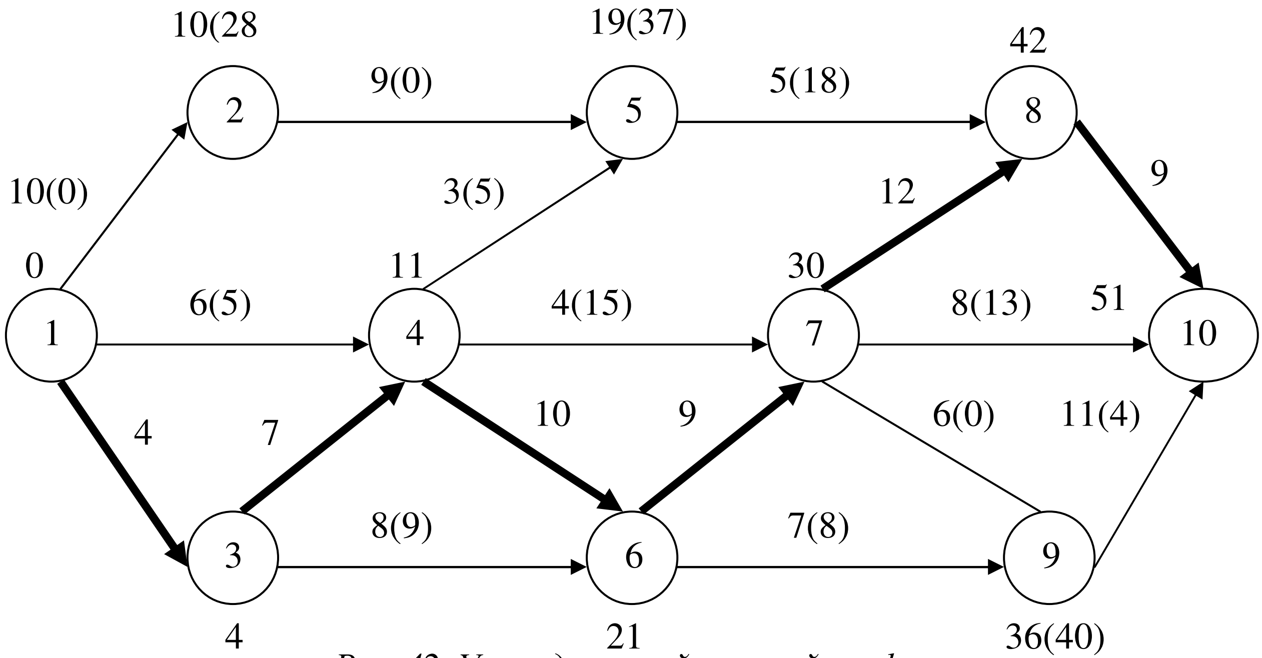


Рис. 42. Упорядоченный сетевой график

3.6. Временные параметры сетевого графика

Каждая работа сетевого графика (кроме фиктивных работ) требует для своего выполнения затрат времени, трудовых и материальных ресурсов. Важнейшим этапом сетевого планирования является анализ сетевого графика по критерию времени. Рассмотрим принципы этого анализа на примере составленного нами графика.

Предположим, что продолжительность выполнения каждой работы может быть установлена с достаточной точностью. Сейчас мы рассматриваем только так называемые *нормативные* временные оценки работ. Их может, например, установить эксперт. Числа у стрелок на рис. 42 показывают длительность работ (в днях).

Определим, прежде всего, ожидаемые сроки наступления всех событий графика. Срок наступления начального события будем считать нулевым. Поскольку работа 1–2 продолжается 10 дней, событие 2 наступит, очевидно, на десятый день после начала работ. Аналогично определяем, что для наступления события 3 потребуется 4 дня. Для события 4 входящими являются 2 работы: 1–4 и 3–4. Первая из них заканчивается на шестой день после начального момента работ. Работа 3–4 может начаться только после наступления события 3, т.е. через 4 дня после начала события, и требует для своего выполнения 7 дней. Всего от начального события до завершения работы 3–4 проходит 11 дней. Поскольку событие 4 не может свершиться раньше окончания работы 3–4, ожидаемым сроком его наступления нужно считать 11 дней.

Перейдём к событию 5. Оно наступает после завершения работ 2–5 и 4–5. Первая из них завершается через 10+9=19 дней, вторая через 11+3=14 дней. Больший из этих сроков (19 дней) и есть ожидаемый срок наступления события 5. Аналогично определяем ожидаемые сроки наступления всех остальных событий. Конечное событие 10 наступает через 51 день после начального, этим сроком определяется, очевидно, и продолжительность всего проекта в целом.

Возвращаясь теперь от конечного события к начальному, проследим, как образовался этот срок – 51 день. Из трёх работ, входящих в событие 10, определила этот срок работа 8–10, которая начинается с наступлением события 8 (42 дня) и продолжается 9 дней (42+9=51 день). В свою очередь срок наступления события 8 определила работа 7–8 (30+12=42 дня). Срок наступления события 7 непосредственно связан с работой 6–7, событие 6 – с работой 4–6, событие 4 – с работой 3–4, событие 3 – с работой 1–3.

Как видим, существует некоторая цепочка работ, ведущая от начального события к конечному, которое определяет общую ожидаемую продолжительность всего комплекса работ сетевого графика. От начального события к конечному можно построить множество последовательных цепочек работ (путей) различной общей протяженности. Из всех возможных путей наибольшую продолжительность (51 день) имеет путь 1–3–4–6–7–8–10, который мы нашли на графике, двигаясь поэтапно от конечного события к начальному.

Последовательность работ между начальным и конечным событиями сети, имеющая наибольшую общую протяжённость во времени, называется ***критическим путём***. *Критическими* называются также события и работы, расположенные на этом пути.

Критический путь является центральным понятием сетевого планирования и управления. Естественно, что важнейшей целью анализа сетевого графика по критерию времени является установление общей продолжительности всего планируемого комплекса работ. Оказывается, что эта общая продолжительность определяется далеко не всеми работами сети, а только работами, лежащими на критическом пути. Увеличение времени выполнения любой критической работы ведёт к отсрочке завершения всего комплекса работ, в то время как задержка с выполнением некритических работ может никак не отразиться на сроке наступления конечного события.

Отсюда следуют важные практические выводы. Руководители проекта должны уделять первоочередное внимание своевременному выполнению критических работ, обеспечению их необходимыми трудовыми и материальными ресурсами, чтобы не сорвать срок завершения всей разработки. Если сам этот срок по первоначально составленному графику оказался выше директивного, то для его уменьшения необходимо изучить возможности сокращения *именно критических*, а не любых работ. Если учесть, что в реальных сетевых графиках критические работы составляют лишь от 10 до 20% общего числа работ, ясно, каким ценным орудием управления является метод критического пути в руках руководителей сложных разработок.

Сетевой график может содержать не один, а несколько критических путей. Если бы, например, на нашем графике работа 9–10 продолжалась не 11, а 15 дней, то сеть содержала бы два критических пути: уже найденный нами путь и путь 1–3–4–6–7–9–10. Сколько бы ни было на графике критических путей, все лежащие на них работы непосредственно влияют на срок наступления конечного события.

Представим описанные выше способы определения рассмотренных временных характеристик сети в общем виде.

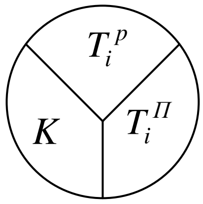
Предположим, что выполнение работы начато в момент времени $t = 0$. Пусть t_{ij} –заданная продолжительность работ (p_i, p_j). Величины

t_{ij} записывают на соответствующих дугах сетевого графика и считают их длинами.

Ранним сроком начала работы называется наименьшее допустимое время, когда работа может быть начата.

Если из вершины p_i выходит несколько работ, то ранние сроки начала этих работ совпадают и называются *ранним сроком наступления события* p_i.

Ранний срок начала работы (p_i, p_j) обозначают $t_{ij}^{рн}$, а ранний срок наступления события $p_i - T_i^p$. Обычно для удобства величины T_i^p записывают в верхней трети каждой вершины:



Если работа начата в ранний срок начала, то время её окончания называется *ранним сроком окончания работы*. Ранний срок окончания работы (p_i, p_j) обозначается $t_{ij}^{ро}$.

Для вычисления ранних сроков наступления событий используют алгоритм Форда. Считают, что нумерация вершин является правильной.

Алгоритм расчёта ранних сроков начал и окончаний работ(алгоритм Форда)

Полагают $T_1^p = 0$.

Для $i = 2, 3, ..., n$ вычисляют $T_i^p = \max\limits_{k:\left(p_k, p_i\right) \in B\left(p_i\right)} \left(T_k^p + t_{ki}\right)$.

Запись под максимумом означает: перебор ведётся среди таких номеров k, что работы (p_k, p_i) принадлежат множеству входящих в вершину p_i дуг.

Номер k-той вершины, при движении из которой получено значение T_i^p, заносят в левую часть вершины p_i.

После нахождения величины T_i^p можно подсчитать ранние сроки начал и окончаний работ: $t_{ij}^{рн} = T_i^p, t_{ij}^{ро} = t_{ij}^{рн} + t_{ij}$.

Критическое время и критический путь

Ранний срок наступления конечного события называется критическим временем и обозначается $T_{кр}$. Весь проект не может быть завершен раньше момента времени $T_{кр}$, т.е. критическое время – это минимальный срок окончания всего комплекса работ. На сетевом графике $T_{кр}$ – это длина пути наибольшей длины из начальной вершины в конечную.

Всякий путь длины, равной $T_{кр}$, из начальной вершины в конечную называется *критическим путём.*

Алгоритм построения критического пути

Начинают построение с конечной вершины. В её левой трети стоит номер той вершины, при движении из которой определялся ранний срок наступления события. Критический путь идёт из конечной вершины в вершину с этим номером; затем в вершину, номер которой стоит в левой трети полученной при движении вершины, и так до начальной вершины.

Если для критических событий никакие отсрочки их наступления недопустимы без угрозы срыва всего проекта, то для некритических событий такие отсрочки возможны. На нашем графике некритических событий всего три: 2, 5 и 9. Возьмём событие 9. По графику оно наступает через 36 дней после начального события, но могло бы наступить и через 40 дней, так как если к 40 добавить 11 дней на работу 9–10, то получится 51 день, т.е. срок наступления события 10 не будет нарушен. Если же событие 9 наступит через 41 день, то это уже приведёт к отсрочке завершения всего комплекса работ. Таким образом, 40 дней – это *наиболее поздний допустимый срок* наступления события 9.

Событие 5 совершается через 19 дней после начала работ, но следующее за ним критическое событие 8 наступает лишь через 42 дня, и этот срок не был бы нарушен, если бы событие 5 наступило даже через 37 дней после начального события (42–5=37). Тогда и событие 2 могло бы наступить через 28 дней после события 1 (37–9=28).

Таким образом, некритические события наряду с ожидаемым сроком наступления имеют наиболее поздний допустимый срок наступления (даны в скобках у некритических событий). Для критических событий эти сроки совпадают.

Некритические работы также могут иметь известные *резервы времени* своего выполнения. Возьмём, например, работу 4–7. Предшествующее ей событие 4 наступает через 11 дней, а завершающее событие 7 – лишь через 30 дней после начала работ. Очевидно, что срок наступления события 7 не был бы нарушен, если бы работа 4–7 продолжалась 19 дней – на 15 дней больше её продолжительности по графику. Эти 15 дней и составляют *свободный резерв времени* работы 4–7.

Свободный резерв времени работы 6–9 составляет 8 дней (36–7––21=8). Работа 7–9, хотя и является некритической, свободного резерва времени не имеет, то же относится к работе 1–2 и 2–5 (свободные резервы времени указаны на рисунке в скобках у стрелок работ). Ясно, что критические работы резервов времени не имеют.

При определении резервов времени работ можно принять и другую линию рассуждений. Скажем, для работы 6–9 максимально допустимое время выполнения составляет 19 дней (резерв 12 дней). Но при такой длительности работы 6–9 событие 9 наступит не в ожидаемый, а в наиболее поздний допустимый срок (40 дней), что, как мы видели, сроков выполнения всего проекта не нарушает. Итак, наряду со свободным резервом времени, равным 8 дням, работа 6–9 имеет *полный резерв времени* – 12 дней.

Работа 7–9 свободного резерва времени не имеет, однако её полный резерв составляет 4 дня (40–6–30=4). Полные резервы времени, отличные от свободных резервов, имеют также работа 1–2 (18 дней), 2–5 (18 дней), 4–5 (23 дня).

Запишем эти временные характеристики сетевого графика в общем виде:

Поздним сроком окончания работы называется наиболее позднее допустимое время окончания работы без нарушения срока завершения всего проекта T. Поздний срок окончания работы (p_i, p_j) обозначается $t_{ij}^{по}$ и определяется по формуле: $t_{ij}^{по} = t_{ij}^{пн} + t_{ij}$.

Поздним сроком $T_j^П$ наступления события p_j называется наиболее поздний срок окончания всех работ, входящих в соответствующую вершину. Алгоритм вычисления поздних сроков наступления события:

Полагают $T_n^П = T$ ($T -$ срок завершения всего проекта, $n -$ номер конечной вершины).

Для $j = n-1, n-2, ..., 2, 1$ вычисляют $T_i^П = \min\limits_{k:(p_j, p_k)\in A(p_j)} \left(T_k^П - t_{jk}\right)$

(Читается: выбор происходит среди таких k, что работы (p_j, p_k) принадлежат множеству дуг, выходящих из вершины p_j).

Таким образом, для конечной вершины поздний срок наступления событий совпадает со временем выполнения всего проекта. Затем просматривают все вершины в порядке убывания их номеров. Для каждой вершины рассматривают множество всех выходящих работ. Из поздних сроков наступления их концов вычитают продолжительность этих работ. Минимальная из этих разностей и равна $T_j^П$. Величину $T_j^П$ записывают обычно для удобства в правой части вершины p_j.

Из алгоритма вычисления поздних сроков следует, что увеличение наиболее позднего срока окончания проекта T на t единиц ведёт к увеличению поздних сроков наступления всех событий также на t единиц.

После определения $T_j^П$ можно вычислить поздние сроки начала и окончания всех работ проекта: $t_{ij}^{по} = T_j^П; t_{ij}^{пн} = t_{ij}^{по} - t_{ij}$.

Резервы времени

Рассмотрим некоторую работу (p_i, p_j). Найдём время, которое можно выделить для выполнения этой работы без задержки срока окончания всего проекта. Работа (p_i, p_j) не может быть начата раньше срока T_i^p и должна быть закончена не позднее времени $T_j^П$. Для выполнения этой работы нужно затратить не более $T_j^П - T_i^p$ единиц времени. По плану эту работу можно сделать за t_{ij} единиц времени.

Максимально допустимое время, на которое можно увеличить продолжительность выполнения работы (p_i, p_j) или отложить начало так, что это не вызовет задержки выполнения всего проекта, называется *полным резервом времени*.

Полный резерв времени работы (p_i, p_j) обозначают R_{ij}, он равен:

$$R_{ij} = T_j^П - T_i^p - t_{ij}.$$

Если полный резерв времени некоторой работы равен нулю, то задержка её выполнения вызовет такую же по времени задержку выполнения всего проекта.

Если на некоторой работе использовать её полный резерв, то путь, проходящий через эту работу, станет критическим. Полный резерв времени любой работы на этом пути станет равным нулю.

Найдём время, которое можно дополнительно выделить для выполнения работы (p_i, p_j) без введения дополнительных ограничений на время выполнения последующих работ. Для этого выполнение работы должно быть законченно к моменту времени T_j^p. Таким образом, можно выделить $T_j^p - T_i^p$ единиц времени на выполнение работы (p_i, p_j).

Величина $r_{ij} = T_j^p - T_i^p - t_{ij}$ называется *свободным резервом времени работы* (p_i, p_j). Если использовать свободный резерв на некоторой операции, то последующие работы могут быть по-прежнему начаты в свои ранние сроки.

Определение резервов времени, событий и работ сетевого графика имеет определяющее значение как для этапа разработки и корректировки, так и в ходе выполнения проекта.

Во-первых, в проекте могут оказаться «узкие места» с точки зрения обеспечения трудовыми или материальными ресурсами одновременно ведущихся работ. Предположим, например, что при анализе нашего графика–примера 3.2 обнаружились трудности комплектования исполнителей в период после 21 дня, когда выполняются работы 5–8, 6–7 и 6–9. Эти трудности исчезают с наступлением события 7 (30-й день). Очевидно, что тогда для более равномерного распределения исполнителей можно отсрочить до наступления события 7 начало работы 5–8, имеющей значительный свободный резерв времени. Такая отсрочка, как уже отмечалось, отражается на графике введением фиктивной работы.

Во-вторых, в первоначально составленном графике общая продолжительность работ может оказаться выше директивно установленного срока. Чтобы уложиться в этот срок, нужно, очевидно, сократить длительность некоторых работ критического пути. Обычно это оказывается возможным, но при условии привлечения на эти работы дополнительных ресурсов. Их можно высвободить за счёт удлинения продолжительности некритических работ, причем вычисленные резервы времени покажут, до какого предела такое удлинение допустимо. (Нужно, однако, учитывать, что при сокращении продолжительности критических работ и увеличении некритических работ сам критический путь может измениться).

В-третьих, уже в процессе осуществления проекта часто возникают отклонения от намеченных сроков выполнения работ и наступления событий. По некритическим работам и событиям фактическое запаздывание против графика может никак не отразиться на сроках выполнения всего проекта, если запаздывание находится в пределах резервов времени. Знание этих резервов покажет руководству, является ли происходящее запаздывание допустимым или оно угрожает сорвать график в целом и должно быть всеми мерами предотвращено.

Описанный метод расчёта резервов времени позволяет, как было уже показано на примере, определить критический путь как последовательность событий, не имеющих резервов времени. Предложен и ряд других алгоритмов определения критического пути, в частности, таких, которые хорошо приспособлены к обработке сетевых графиков на ЭВМ.

Сетевые графики, составленные для практических целей, имеют обычно сотни, а нередко и тысячи событий и работ. Более сложны для анализа те графики, в которых число работ намного превышает число событий. Отношение числа работ к числу событий графика считается *показателем (коэффициентом) сложности сети*. Сложные сети обрабатываются на ЭВМ. Машина осуществляет проверку правильности составления графика, производит его упорядочение, определяет критический путь и его протяжённость во времени, резервы времени некритических событий и работ. Как результат анализа сети, машина выдаёт на печать перечень критических событий и работ и их параметров, сроки наступления и резервы времени событий, перечень работ, упорядоченный в зависимости от резерва времени или по иным признакам, и другую информацию, предусмотренную программой.

Сетевое планирование способствует экономии не только времени, но и ресурсов. Уже сам по себе общий выигрыш времени в результате рационального планирования работ даёт эффект в виде прямой экономии затрат, высвобождения персонала, выпуска дополнительной продукции, скорейшего освоения проектных мощностей. Кроме того, ощутимая экономия средств может быть достигнута в результате оптимизации сетевой модели, в частности, за счёт удлинения во времени некоторых некритических работ. В этом проявляется гибкость сетевого метода планирования: он позволяет экономить и на сокращении, и на удлинении сроков. Давая значительный эффект, сетевое планирование не требует больших затрат, они обычно оцениваются в размере 0,2–1,5% ко всей стоимости проектирования.

В результате разработки и анализа сетевого графика обеспечивается наиболее целесообразная расстановка исполнителей, использование оборудования и других средств производства, что способствует не только нормальной их загрузке, но и предотвращению различных прорывов и срывов в результате появления «узких мест».

Важная особенность сетевых методов состоит в том, что они эффективно применяются не только в процессе разработки проекта, но и в ходе его выполнения. На каждом этапе осуществления проекта анализ сетевого графика дает оперативную информацию о состоянии дел, которое всегда позволяет выделить работы, требующие в данный момент особого внимания; своевременно перегруппировать ресурсы и тем самым не допустить отклонения от установленных сроков выполнения всего комплекса работ. Особый контроль осуществляется за ходом работ, лежащих на критическом пути, затем за работами, не имеющими или почти не имеющими резервов времени (их иногда называют *подкритическими*). Введение в ЭВМ фактических данных о выполненных работах и возникающих изменениях в самом проекте позволяет своевременно получать информацию о появлении новых критических путей и состоянии резервов времени работ и событий.

Возможность и эффективность применения сетевых методов для управления сложными системами в сфере экономики зависят от ряда условий. Рассмотрим некоторые из них.

Важную роль играет характеристика самого планирования комплекса работ с точки зрения его объёма, сложности, степени новизны. Многое зависит от квалификации разработчиков сетевого плана и отношения к нему со стороны руководства. Непременным условием является участие ответственных исполнителей работ в разработке и анализе сетевого графика. Использование ЭВМ является, как правило, одной из существенных предпосылок эффективного применения сетевого управления. При разработке сетевого графика необходимо решить вопрос о наиболее рациональной степени детализации работ. Прежде всего, все работы графика должны иметь примерно одинаковую степень детализации и сравнимую продолжительность, чтобы исключить случаи, когда одни работы детализированы до часов и минут, а продолжительность других измеряется неделями и месяцами. Слишком укрупнённый график может оказаться практически бесполезным, излишне детализированная сеть превращается в запутанную, плохо воспринимаемую паутину.

Практическая ценность и эффективность сетевой модели во многом зависит от правильной оценки времени выполнения работ.

Ошибки в определении продолжительности работ – наиболее уязвимая сторона сетевого управления. Особенно трудно избежать ошибок при планировании работ, которые раньше не производились, так как отсутствует соответствующий опыт или аналогии.

Приложение 1

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа №1. Теория множеств

2.1. Операции над множествами

Найдите элементы множества P, если A={0, 2, 3, 7, 8}; B={1, 3, 6, 7, 9}; C={0, 1, 4, 7, 8, 9}; I={0, 1, 2,…, 9}.

1. $P = A \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cup B \cap C$;
2. $P = \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap C \cup \overline{A} \cap B$;
3. $P = B \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B}$;
4. $P = \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap C \cup A \cap B$;
5. $P = B \cap C \cup \overline{A} \cap C \cup \overline{A} \cap B$;
6. $P = \overline{B} \cap C \cup A \cap \overline{C} \cup A \cap B$;
7. $P = B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B}$;
8. $P = \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}$;
9. $P = B \cap C \cup \overline{A} \cap C \cup A \cap B$;
10. $P = \overline{B} \cap C \cup A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B$;
11. $P = B \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B$;
12. $P = \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap C \cup A \cap B$;
13. $P = B \cap C \cup \overline{A} \cap C \cup A \cap B$;
14. $P = \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap B \cup A \cap \overline{B}$;
15. $P = B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup A \cap \overline{C}$;
16. $P = \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap C \cup A \cap \overline{B}$;
17. $P = A \cap B \cup \overline{B} \cap C \cup A \cap \overline{B}$;
18. $P = B \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap C$;
19. $P = A \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup B \cap \overline{C}$;
20. $P = B \cap C \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B}$.

1.2. Теоретико-множественные преобразования

Упражнения 21–40 необходимо выполнять в два этапа. Сначала заданное выражение следует упростить и проинвертировать, а затем найти элементы множества P, выраженного через множества:

A={0, 3, 4, 9}; C={0, 1, 2, 4, 7, 8, 9};

B={1, 3, 4, 7}; I={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

21. $\overline{P} = A \cap B \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup A \cap C \cup \overline{B} \cap C$;
22. $\overline{P} = \overline{A} \cap B \cup \overline{A} \cap C \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C$;
23. $\overline{P} = A \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}$;
24. $\overline{P} = B \cap \overline{C} \cup A \cap B \cup \overline{A} \cap C \cup \overline{A} \cap B$;
25. $\overline{P} = A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap C$;
26. $\overline{P} = A \cap \overline{B} \cup A \cap C \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap C$;
27. $\overline{P} = A \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{C} \cup A \cap C$;
28. $\overline{P} = A \cap C \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C$;
29. $\overline{P} = A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap C \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}$;
30. $\overline{P} = A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap C$;
31. $\overline{P} = B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}$;
32. $\overline{P} = \overline{A} \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}$;
33. $\overline{P} = \overline{B} \cap \overline{C} \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap B \cup \overline{A} \cap C$;
34. $\overline{P} = A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap C$;
35. $\overline{P} = \overline{A} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C \cup A \cap \overline{B}$;
36. $\overline{P} = A \cap C \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}$;
37. $\overline{P} = B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap C$;
38. $\overline{P} = A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap C \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C$;
39. $\overline{P} = A \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}$;
40. $\overline{P} = B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B \cup \overline{A} \cap C \cup A \cap \overline{C}$;

1.3. Упрощение формул с учетом отношения включения

Упростить следующие выражения с учетом того, что
$A \subset B \subset C \subset D \subset I;\ A \neq \varnothing.$

41. $\overline{A} \cap \overline{C} \cap D \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cap D \cup A \cap B = ...$
42. $\overline{B} \cap \overline{C} \cap D \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cap D \cup \overline{A} \cap B = ...$
43. $A \cap B \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup A \cap C \cup \overline{B} \cap \overline{C} = ...$
44. $A \cap \overline{C} \cup B \cap \overline{D} \cup \overline{A} \cap C \cap D = ...$
45. $A \cap B \cap \overline{C} \cup \overline{C} \cap D \cup B \cap C \cap D = ...$
46. $A \cap C \cap D \cup B \cap \overline{C} \cap D \cup B \cap C \cap D = ...$
47. $\overline{A} \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{C} \cup \overline{C} \cap D = ...$
48. $B \cap D \cup A \cap \overline{C} \cup \overline{C} \cap \overline{D} = ...$
49. $A \cap B \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C \cap D \cup \overline{C} \cap \overline{D} = ...$
50. $\overline{A} \cap B \cap C \cup B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{C} = ...$
51. $A \cap C \cap D \cup \overline{B} \cap C \cap D \cup B \cap \overline{C} = ...$
52. $A \cap D \cup B \cap \overline{C} \cap \overline{D} \cup \overline{B} \cap C \cap D = ...$
53. $A \cap C \cup \overline{C} \cap \overline{D} \cup B \cap \overline{C} \cap D = ...$
54. $A \cap B \cap \overline{C} \cup A \cap D \cup \overline{A} \cap \overline{B} = ...$
55. $\overline{A} \cap B \cup \overline{B} \cap C \cap D \cup \overline{C} \cap D = ...$
56. $B \cap \overline{C} \cap \overline{D} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap B = ...$
57. $B \cap \overline{D} \cup \overline{A} \cap B \cap D \cup \overline{B} \cap \overline{D} = ...$
58. $B \cap C \cup B \cap \overline{D} \cup \overline{C} \cap D = ...$
59. $A \cap B \cup B \cap C \cup \overline{B} \cap \overline{C} = ...$
60. $\overline{B} \cap \overline{D} \cup B \cap C \cup C \cap D = ...$

Контрольная работа №2. Алгебра высказываний

2.1. Теорема поглощения

Используя теорему поглощения, упростить следующие булевы выражения:

61. $A\overline{B} + A\overline{B}C + A\overline{B}CD = \ldots$
62. $A\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{C}D = \ldots$
63. $A\overline{B}C + \overline{B}C + A\overline{B}CD = \ldots$
64. $AB + CD + AB\overline{C} = \ldots$
65. $\overline{A}B + BC + \overline{A}B\overline{D} = \ldots$
66. $P\overline{Q} + R + P\overline{Q}RS = \ldots$
67. $\overline{P}QRS + QR + PQR = \ldots$
68. $\overline{X}YZ + Z + \overline{X}Y = \ldots$
69. $\overline{X}Y + \overline{X}YZ + Z = \ldots$
70. $AB\overline{C} + B\overline{C} + DE = \ldots$
71. $B\overline{C} + B\overline{C}D + AB\overline{C}D = \ldots$
72. $ACD + CD + ABCD = \ldots$
73. $\overline{P}QR + QR + ST = \ldots$
74. $P\overline{Q}R + P\overline{Q}T + P = \ldots$
75. $P\overline{Q}R + PR + RT = \ldots$
76. $\overline{P} + \overline{P}Q + \overline{P}Q\overline{R} + \overline{P}T = \ldots$
77. $STU + QSTU + STUV = \ldots$
78. $\overline{A}E + \overline{A}BE + \overline{A}CEF + F = \ldots$
79. $\overline{C}DE + \overline{C}D\overline{F} + \overline{C}D + EF = \ldots$
80. $\overline{A}C\overline{E} + BC\overline{E} + C\overline{E}F + C\overline{E} = \ldots$

2.2. Инвертирование дизъюнктивных нормальных форм

Не меняя последовательности вхождений аргументов, найдите инверсные выражения с использованием теоремы де Моргана:

81. $A\overline{B} + B\overline{C} + AC = ...$
82. $ABC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = ...$
83. $AC + B\overline{C} + \overline{D} = ...$
84. $ABC + A\overline{B}\,\overline{D} = ...$
85. $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{D} + \overline{A}D = ...$
86. $A\overline{C}\,\overline{D} + B\overline{C} + \overline{B}D = ...$
87. $BC + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{E} = ...$
88. $B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{E} = ...$
89. $A\overline{C}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + B = ...$
90. $BC + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{D} = ...$
91. $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} = ...$
92. $A\overline{C}\,\overline{E} + \overline{A}CD + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} = ...$
93. $BD + \overline{B}\,\overline{C}E + \overline{A} = ...$
94. $AD + B\overline{D} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{E} = ...$
95. $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{E} + \overline{B}\,\overline{C}D + C\overline{D} = ...$
96. $ABE + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E} + B\overline{C}\,\overline{E} = ...$
97. $BCD + B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}E = ...$
98. $AD + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{E} = ...$
99. $BC + \overline{B}E + \overline{E}F = ...$
100. $PQ + RS + \overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{S} = ...$

2.3. Инвертирование конъюнктивных нормальных форм

Не меняя последовательности вхождения аргументов, найдите инверсные выражения с использованием теоремы де Моргана.

101. $(A+B)(C+\overline{D})(B+\overline{C})$;
102. $(A+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{D})\overline{E}$;
103. $(B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{D}+E)$;
104. $(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+B+C+D)$;
105. $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{B}+C)(\overline{C}+D+E)$;
106. $(P+Q+R)(\overline{P}+\overline{Q}+S)(Q+\overline{S})$;
107. $(\overline{P}+\overline{Q}+S)(Q+\overline{R}+\overline{S})(\overline{P}+\overline{R})$;
108. $(A+\overline{B}+\overline{D})(\overline{B}+\overline{C}+D)E$;
109. $(A+\overline{B}+\overline{E})(\overline{C}+\overline{D}+E)(B+\overline{C})$;
110. $(\overline{P}+Q+\overline{R})(\overline{Q}+S)(\overline{P}+\overline{Q})$;
111. $(P+Q+R+S)(\overline{P}+\overline{Q}+\overline{R}+\overline{S})(P+\overline{Q})$;
112. $(X+Y+Z)(\overline{Y}+\overline{Z})(\overline{X}+Y)$;
113. $(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(C+\overline{D}+E)$;
114. $(A+\overline{C})(\overline{C}+\overline{D}+E)(B+\overline{C}+\overline{E})$;
115. $(A+B+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+D)\overline{E}\overline{F}$;
116. $(\overline{A}+C+\overline{D})(B+\overline{D}+E)(A+\overline{C}+\overline{E})$;
117. $(A+B)(B+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})\overline{E}\overline{F}$;
118. $(B+\overline{C}+D)(A+\overline{B}+\overline{D})(\overline{E}+\overline{F})$;
119. $(P+\overline{Q}+\overline{R}+\overline{S})(\overline{Q}+R+S+\overline{T})(\overline{P}+Q)$;
120. $(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})EF$.

2.4. Нахождение совершенных дизъюнктивных нормальных форм

Найдите десятичные номера минтермов, входящих в следующие булевы функции четырех аргументов.

121. $f = ABC + \overline{A}CD;$	131. $f = \overline{A}\overline{B} + ABD;$
122. $f = BD + \overline{A}\overline{B}C;$	132. $f = CD + \overline{A}\overline{C}\overline{D};$
123. $f = CD + \overline{C}\overline{D};$	133. $f = CD + B\overline{C}\overline{D};$
124. $f = \overline{B}\overline{D} + \overline{A}D;$	134. $f = \overline{A}\overline{D} + AD;$
125. $f = BC + \overline{A}BD;$	135. $f = A\overline{C} + \overline{A}C;$
126. $f = BD + \overline{A}C;$	136. $f = AB + \overline{A}\overline{B};$
127. $f = C + \overline{A}BD;$	137. $f = BCD + A\overline{B};$
128. $f = \overline{A}B + \overline{A}D;$	138. $f = ABD + \overline{A}\overline{B}D;$
129. $f = AB + BD;$	139. $f = AC + \overline{B}C;$
130. $f = AD + \overline{A}\overline{C}\overline{D};$	140. $f = ABC + A\overline{B}\overline{C}.$

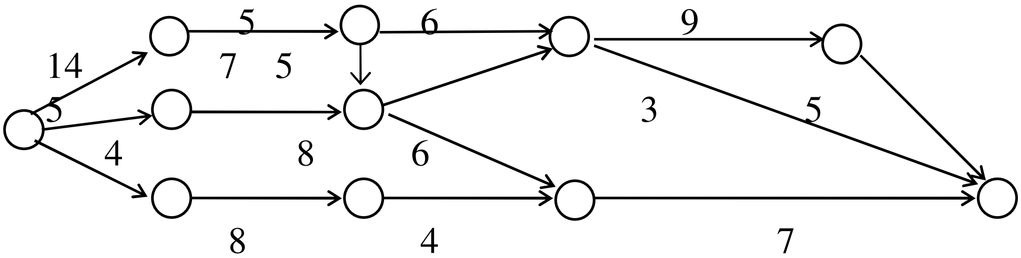
Контрольная работа №3. Теория графов

На рис. приведён сетевой график. Продолжительность работ в днях указана рядом с графическим изображением каждой работы.

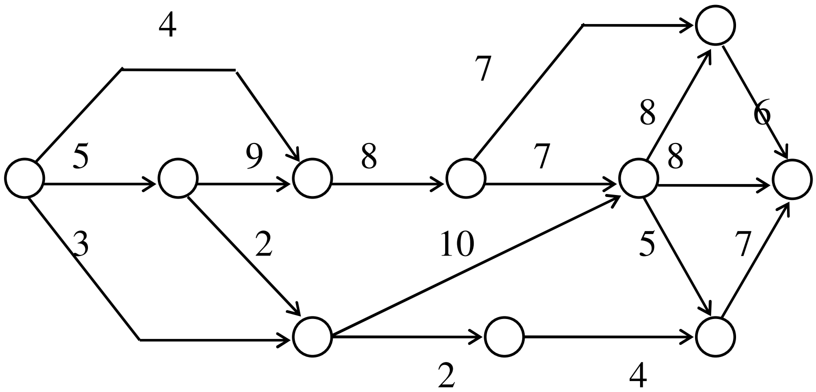
Необходимо:

1) Пронумеровать события.
2) Выделить критический путь и найти его длину.
3) Определить резервы времени каждого события.
4) Определить полные резервы времени некритических работ.
5) Определить коэффициенты напряжённости работ.
6) Построить линейный график сетевой модели.

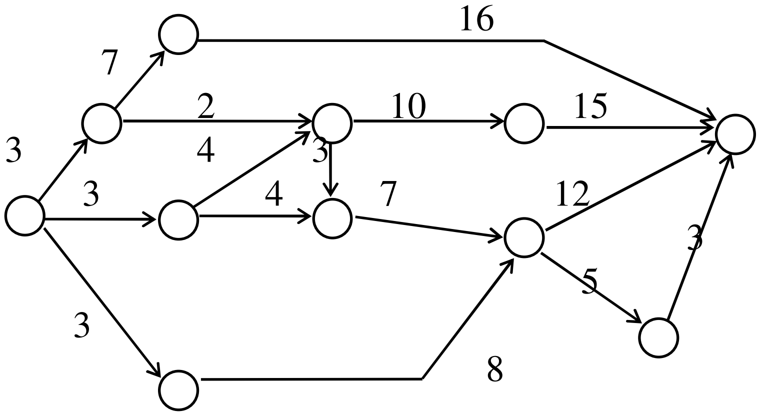
1.



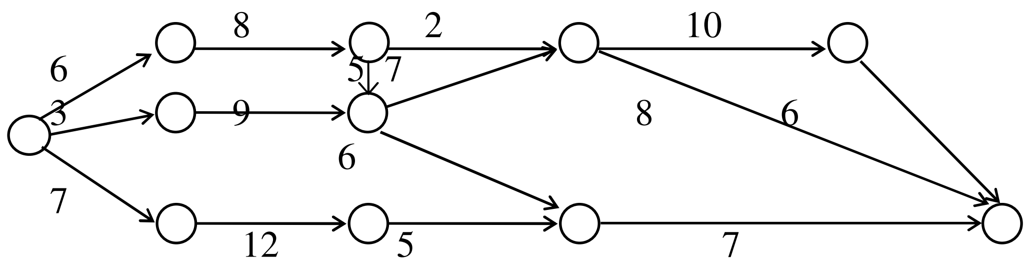
2.



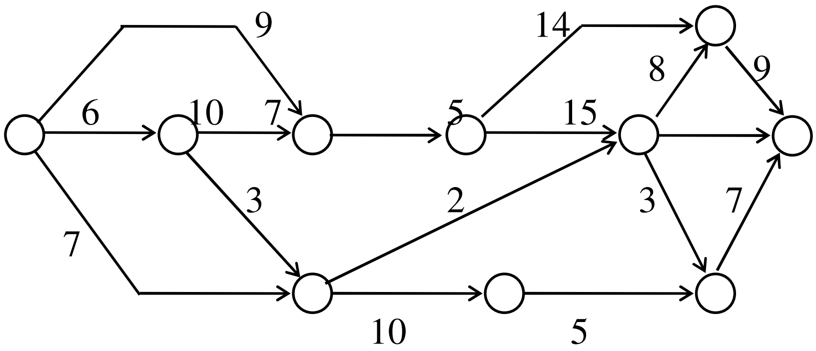
3.



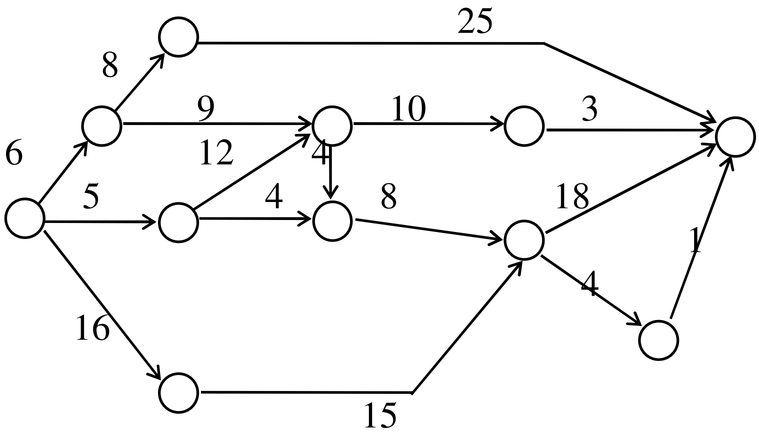
4.


8
2
10
6
5
7
3
9
8
6
6
7
12
5
7

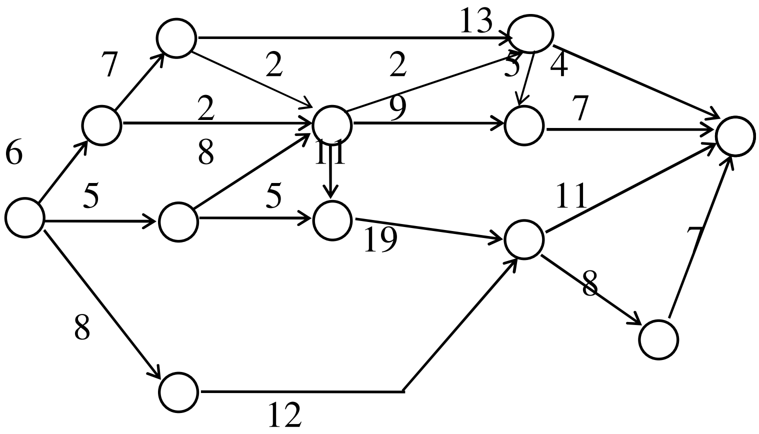
5.


9
14
8
9
6
10
7
5
15
3
2
3
7
7
10
5

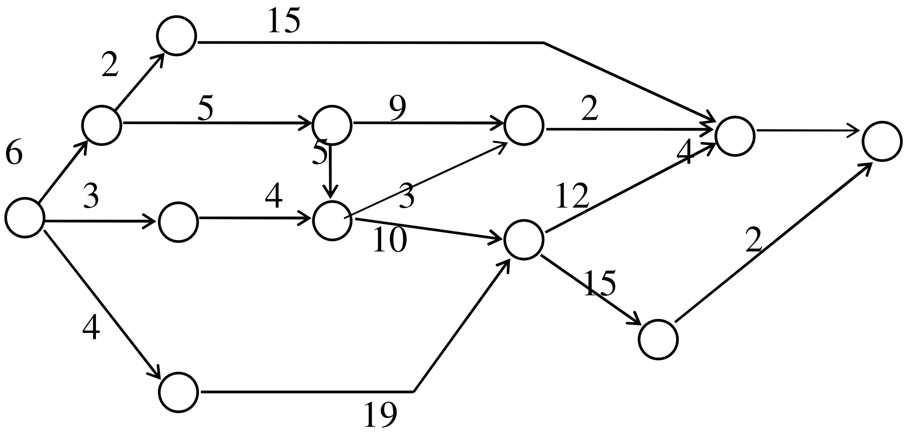
6.


25
8
9
10
3
6
12
4
5
4
8
18
1
4
16
15

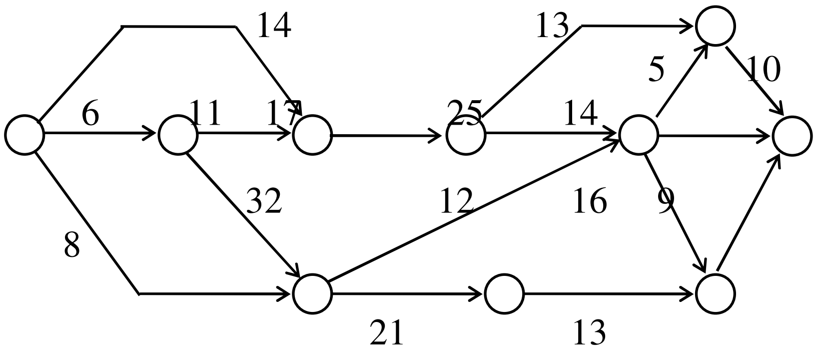
7.


13
7
2
2
5
4
2
9
7
6
8
11
5
5
11
19
7
8
8
12

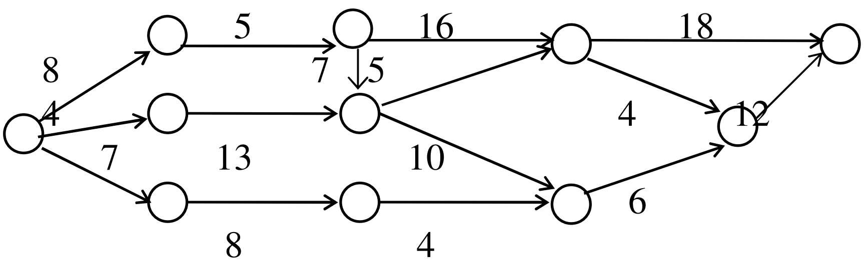
8.


15
2
5
9
2
6
5
4
3
4
3
12
10
2
15
4
19

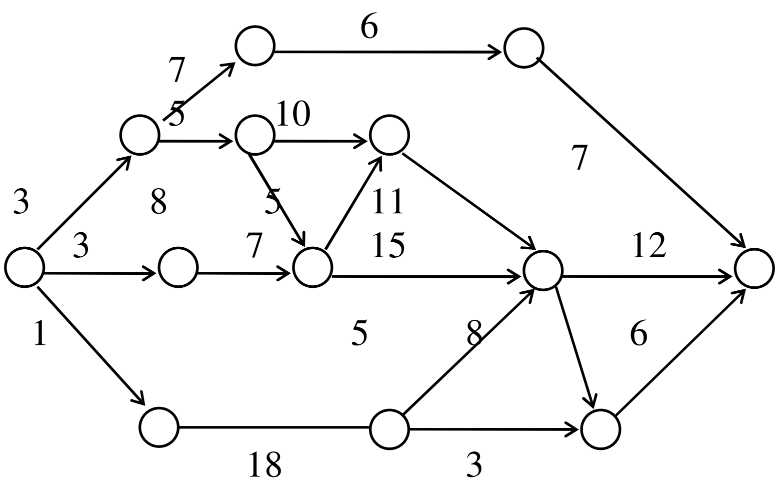
9.


14
13
5
10
6
11
17
25
14
32
12
16
9
8
21
13

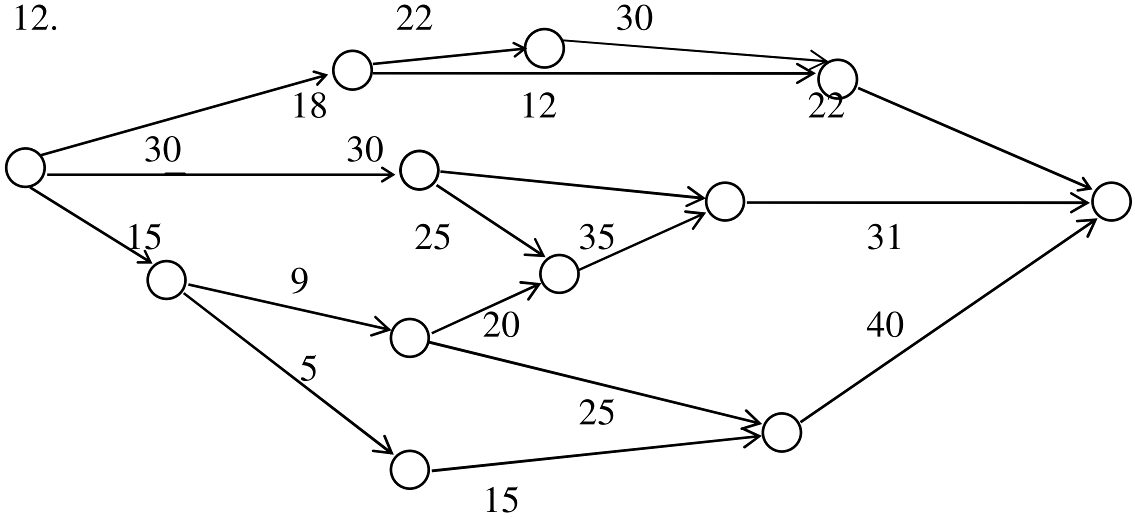
10.


5
16
18
8
7
5
4
4
12
7
13
10
6
8
4

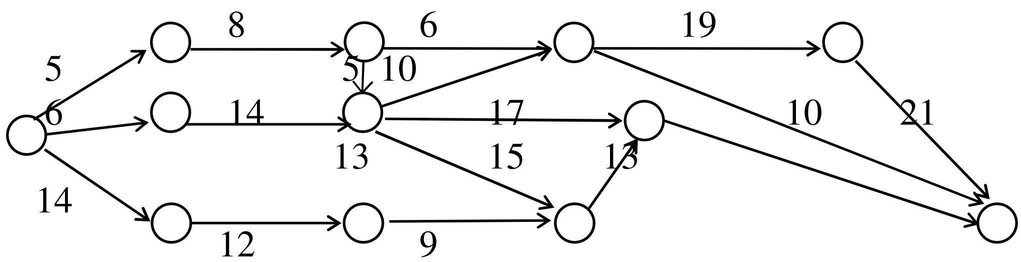
11.


6
7
5
10
7
3
8
5
11
3
7
15
12
1
5
8
6
18
3

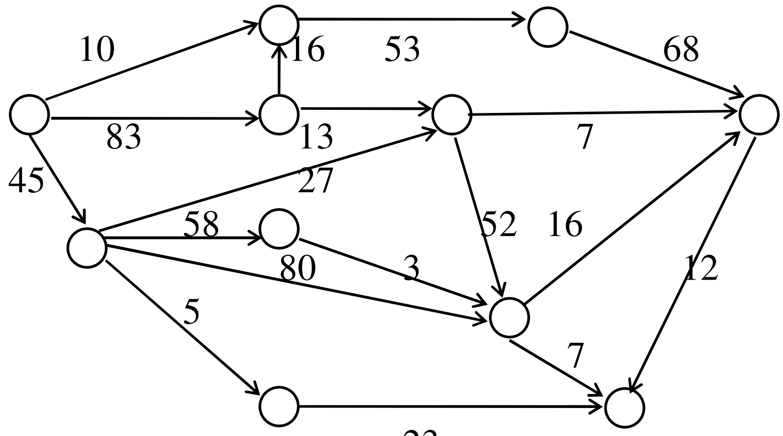
12.


22
30
18
12
22
30
30
15
25
35
31
9
20
40
5
25
15

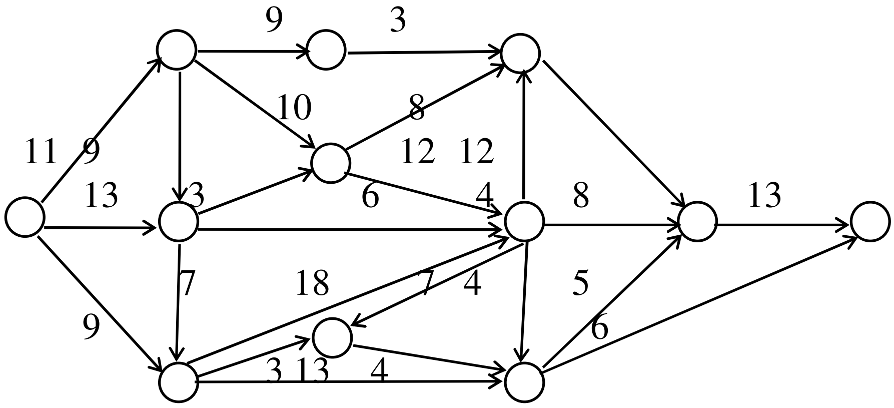
13.


8
6
19
5
5
10
6
14
17
10
21
13
15
13
14
12
9

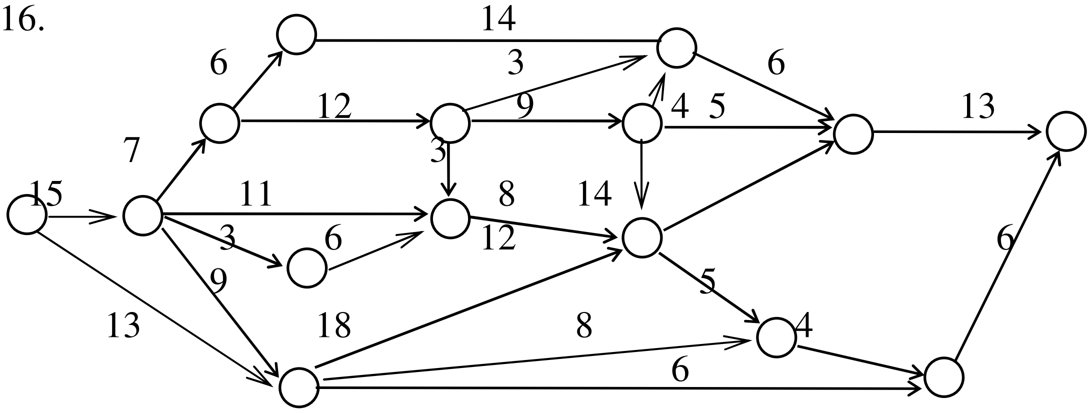
14.


10
16
53
68
83
13
7
45
27
58
52
16
80
3
12
5
7
23

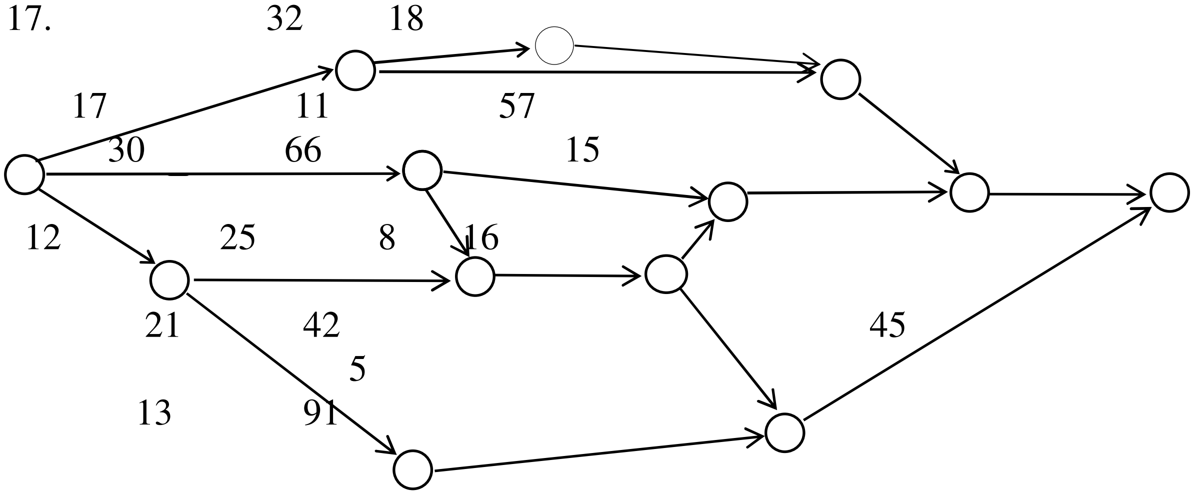
15.


9
3
10
8
11
9
12
12
13
3
6
4
8
13
7
18
7
4
5
9
6
3
13
4

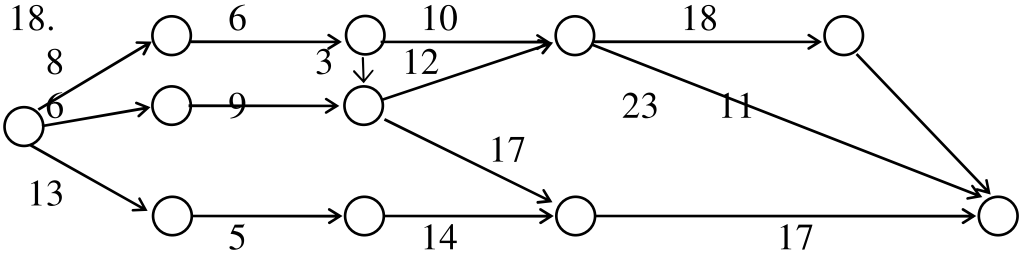
16.


14
6
3
6
12
9
4 5
13
7
3
15
11
8
14
3
6
12
6
9
5
13
18
8
4
6

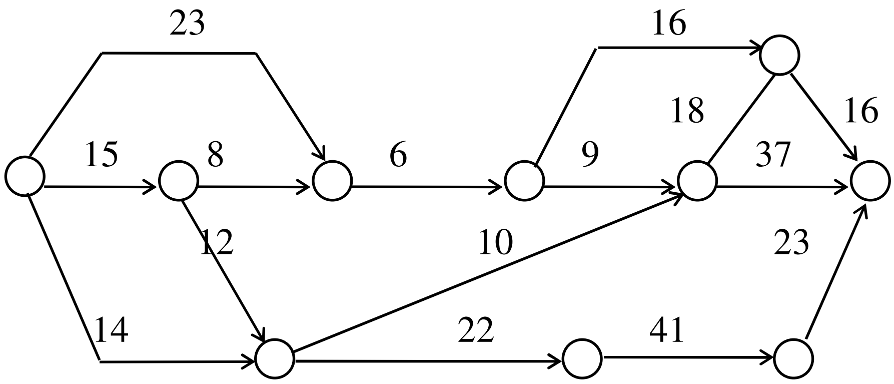
17.


32
18
17
11
57
30
66
15
12
25
8
16
21
42
45
5
13
91

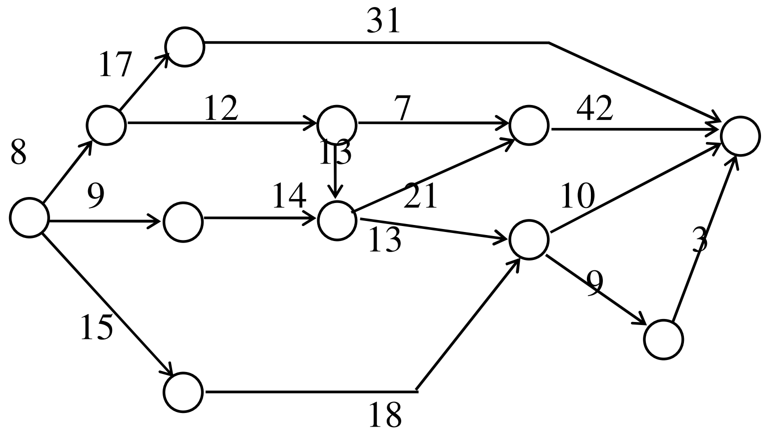
18.


6
10
18
8
3
12
6
9
23
11
17
13
5
14
17

19.


23
16
18
16
15
8
6
9
37
12
10
23
14
22
41

20.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А. и др. Логика. Автоматы. Алгоритмы. – М.: Физматгиз, 1963. – 556 с.

2. Аршинов М. Н., Садовский Л. Е. Коды и математика. Рассказы о кодировании. – М.: Наука, 1983. – 143 с.

3. Березина Л. Ю. Графы и их применение. – М.: Просвещение, 1979. – 143 с.

4. Бородин Л. Ф. Введение в теорию помехоустойчивого кодирования. – М.: Сов. радио, 1968. – 408 с.

5. Борунова С. Н. Орфоэпический словарь русского языка: Произношение, ударение, грамматические формы. – М.: Рус. яз., 1989. – 688 с.

6. Бохманн Д., Постхоф Х. Двоичные динамические системы. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.

7. Вавилов Е. Н., Портной Г. П. Синтез схем электронных цифровых машин. – М.: Сов. радио, 1963. – 438 с.

8. Вавилов В. В. и др. Задачи по математике. Алгебра. – М.: Наука, 1987. – 432 с.

9. Виленкин Н. Я. Индукция. Комбинаторика. – М.: Просвещение, 1976. – 48 с.

10. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

11. Виленкин Н. Я. и др. Математика. – М.: Просвещение, 1977. – 352 с.

12. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

13. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972. – 288 с.

14. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. – М.: Физматгиз, 1962. – 476 с.

15. Голышев Л. К. Электронные вычислительные машины. – Киев: Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1963. – 426 с.

16. Горбатов В. А. Основы дискретной математики. – М.: Высшая школа, 1986. – 311 с.

17. Горский Д. П., Ивин А. А., Никифоров А. Л. Краткий словарь по логике. – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.

18. Грейнер Г. Р. и др. Проектирование бесконтактных управляющих логических устройств промышленной автоматики. – М.: Энергия, 1977. – 384 с.

19. Давыдов Э. П. Игры. Графы. Ресурсы. – М.: Радио и связь, 1981. – 113 с.

20. Дадаев Ю. Г. Арифметические коды, исправляющие ошибки. – М.: Сов. радио, 1969. – 168 с.

21. Дынкин Е. Б. и др. Математические задачи. – М.: Наука, 1971.– 79 с.

22. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

23. Игнатьев Е. И. Хрестоматия по математике. – Ростов-на-Дону: Книжное изд-во, 1995. – 616 с.

24. Калбертсон Дж. Математика и логика цифровых устройств. – М.: Просвещение, 1965. – 267 с.

25. Калужнин Л. А., Сущанский В. И. Преобразования и перестановки. – М.: Наука, 1985. – 160 с.

26. Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств. – М.: ИЛ, 1962. – 737 с.

27. Колмогоров А. Н. Математика – наука и профессия. – М.: Наука, 1988. – 287 с.

28. Кондаков Н. И. Логический словарь–справочник. – М.: Наука, 1975. – 720 с.

29. Корниенко А. В. Дискретная математика. – Томск: ТПУ, 1996. – 95 с.

30. Криницкнй Н. А. и др. Автоматизированные информационные системы. – М.: Наука, 1982. – 381 с.

31. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Физматлит, 2002. – 256 с.

32. Мелихов А. Н. и др. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. – М.: Наука, 1990. – 272 с.

33. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971. – 320 с.

34. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. – М.: Наука, 1985. – 128 с.

35. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.

36. Никольская И. Л. Математическая логика. – М.: Высшая школа, 1981. – 127 с.

37. Ожегов С. И., Шведова Н. Ю. Толковый словарь русского языка. – М.: АЗЪ, 1995. – 928 с.

38. Оре О. Графы и их применение. – М.: Мир, 1965. – 174 с.

39. Папернов А. А. Логические основы цифровых машин и программирования. – М.: Наука, 1968. – 591 с.

40. Политехнический словарь. Гл. ред. И. И. Артоболевский. – М.: Сов. энциклопедия, 1977. – 608 с.
41. Реньи А. Трилогия о математике. – М.: Мир, 1980. – 376 с.
42. Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1989. – 352 с.
43. Самофалов К. Г., Корнейчук В. И., Тарасенко В. П. Электронные цифровые вычислительные машины. – Киев: Вища школа, 1976. – 479 с.
44. Селперс Ф. Методы обнаружения ошибок в работе ЭЦВМ. – М.: Мир, 1972. – 310 с.
45. Септу С., Рид М. Б. Линейные графы и электрические цепи. – М.: Высшая школа, 1971. – 448 с.
46. Смыслова З. А. Математическая логика и ее приложения. – Томск: ТАСУР, 1994. – 111с.
47. Советский энциклопедический словарь. – М.: Сов. энциклопедия, 1985. – 1600 с.
48. Столл Роберт Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968. – 230 с.
49. Тараканов В. Е. Комбинаторные задачи и 0,1–матрицы. – М.: Наука, 1985. – 191 с.
50. Триханов А. В. Алгоритмизация и микропрограммирование операций ЭВМ. – Томск: ТПУ, 1995. – 107 с.
51. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. – 207 с.
52. Фистер М. Логическое проектирование цифровых вычислительных машин. – Киев: Техніка, 1964. – 382 с.
53. Флорин Ж. Синтез логических устройств и его автоматизация. – М.: Мир, 1966. – 375 с.
54. Фор Р. и др. Современная математика. – М.: Мир, 1966. – 271 с.
55. Фрейденталь Г. Математика в науке и вокруг нас. – М.: Мир, 1977. – 261 с.
56. Фудзисава Т., Касами Т. Математика для радиоинженеров: Теория дискретных структур. – М: Радио и связь, 1984. – 240 с.
57. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. – М.: Мир, 1977.– 324 с.
58. Шарапов А. В. Примеры решения схемотехнических задач. – Томск: ТАСУР, 1994. – 125 с.
59. Шарапов А. В. Цифровая и микропроцессорная техника. – Томск: Изд-во Томск, ун-та, 1991. – 148 с.
60. Шевелев Ю. П. Сборник задач по логическому проектированию цифровых вычислительных устройств. – Томск: Изд-во Томск. ун-та,

1979. – 228 с.

61. Энциклопедия кибернетики. Том 1. – Киев: Главная редакция Украинской Советской Энциклопедии, 1975. – 608 с.

62. Энциклопедия кибернетики. Том 2. – Киев: Главная редакция Украинской Советской Энциклопедии, 1975. – 620 с.

63. Шевелев Ю. П. Высшая математика 5. Дискретная математика. Ч. 1: Теория множеств. Булева алгебра (для автоматизированной технологии обучения): Уч. пособие. Томск: ТАСУР, 1998. – 114 с.

64. Шевелев Ю. П. Высшая математика 6. Дискретная математика. Ч. 2: Теория конечных автоматов. Комбинаторика. Теория графов (для автоматизированной технологии обучения): Уч. пособие. Томск: ТАСУР, 1999. – 120 с.

65. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2005. – 364 с.

66. Широкова П.А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. – М.: Наука, 1983. – 78 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение ………………………………………………………………….. 3
Тема 1. Теория множеств ………………….……………………..…. 5
1.1. Алгебра множеств ………………………………………....... 5
1.1.1. Множества ……………………………………………….. 7
1.1.2. Подмножества …………………………………………… 12
1.1.3. Диаграмма Венна. Универсальное множество ………… 16
1.1.4. Объединение множеств ……………………………......... 18
1.1.5. Пересечение множеств ………………………………….. 21
1.1.6. Дополнение множества ……………………………......... 24
1.1.7. Законы де Моргана ……………………………………… 26
1.1.8. Разность множеств ……………………………………… 28
1.1.9. Симметрическая разность множеств ………………… 30
1.1.10. Операция поглощения ……………………………......... 33
1.1.11. Операция склеивания …………………………………... 34
1.1.12. Теоретико-множественные преобразования …………. 37
1.2. Бинарные отношения ………………………………………... 39
1.2.1. Декартово произведение множеств ………………......... 39
1.2.2. Степень множества ……………………………………… 42
1.2.3. Понятие бинарного отношения ………………………… 43
1.2.4. Симметрия отношений ………………………………….. 47
1.2.5. Транзитивность отношений ……………………………... 49
1.2.6. Рефлексивность отношений …………………………....... 50
1.2.7. Отношения эквивалентности …………………………… 52
1.2.8. Отношения строгого порядка …………………………... 53
1.2.9. Отношения нестрогого порядка ………………………... 54
1.2.10. Упорядоченные множества …..………………………... 55
1.2.11. Отношения соответствия …..…………………………... 56
1.2.12. Функциональные отношения. Отображения ………… 59
1.2.13. Реляционная алгебра …………………………………… 61
1.3. Элементы теории нечетких множеств …..……………....... 65
1.3.1. Вводные замечания ……………………………………… 65
1.3.2. Нечеткие множества ……………………………………... 67
1.3.3. Объединение нечетких множеств ……………………… 69
1.3.4. Пересечение нечетких множеств ………………………. 71
1.3.5. Дополнение нечеткого множества ……..……………….. 73
1.3.6. Разность и симметрическая разность нечетких множеств ……………………………………………………….. 76
1.3.7. Основные свойства операций над нечеткими

множествами …………………………………..…………………... 77
Тема 2. Булева алгебра ………………………..……………………… 78
2.1. Понятие высказывания ……………………...……………........ 78
2.2. Аксиомы булевой алгебры …..……………...……………........ 80
2.3. Свойства дизъюнкции и конъюнкции ….……………….......... 82
2.4. Теоремы одной переменной …...……….....…………….......... 84
2.5. Дизъюнктивные и конъюнктивные формы …..……………...... 86
2.6. Теорема поглощения …...………………...……………….......... 88
2.7. Теорема склеивания …....………………...……………….......... 88
2.8. Теорема де Моргана …...…..……………...……………….......... 89
2.9. Инвертирование сложных выражений ……………………........ 90
2.10.Дизъюнктивные формы булевых функций. Понятие булевых функций …......……………...………………….....… 92
2.11.Как задать булеву функцию ………..…...……………….......... 94
2.12. Минтермы ……………...………………...……………….......... 95
2.13. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма …........... 98
2.14. Алгебраическое упрощение булевых функций ……........... 101
Тема 3. Теория графов ………….…..………...……………………… 104
3.1. Введение ………………...……………….....………………......... 104
3.2. Вводные понятия. Граф. Псевдограф. Мультиграф ….......... 105
3.3. Подграф. Надграф. Частичный граф ……………………........ 107
3.4. Смежность. Инцидентность. Степень вершины …..……....... 110
3.5. Сетевое планирование и управление как применение теории графов ……...…...………………...…………….............. 112
3.6. Временные параметры сетевого графика ……………........... 119
Приложение 1. Индивидуальные задания для выполнения контрольных работ ….……………………….…………….. 129
Список литературы ……………………..………………..…………… 142

Маслов Анатолий Викторович

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Научный редактор
кандидат технических наук,
заведующий кафедрой информационных
систем ЮТИ ТПУ *А.А. Захарова*

Редактор *Т.В. Казанцева*

Верстка и дизайн обложки *А.В. Маслов*

Подписано к печати 05.06.2008. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. 8,60. Уч.-изд.л. 7,79.
Заказ . Тираж 50 экз.

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.