Математика 1.1

Задания для подготовки к экзамену по «Дифференциальному исчислению»

1. Вычислить пределы.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}.\qquad \lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}.\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}.$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1},\ (m,n\in N).\qquad \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-x).\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}.\qquad \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos^3 x)}{x\sin 2x}.\qquad \lim_{z\to1}(1-z)tg\frac{\pi z}{2}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}.\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}.\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{x}.$$

$$\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}.\qquad \lim_{x\to\infty}\{x[\ln(x+a)-\ln x]\}.\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}.\qquad \lim_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}.\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}.$$

2. Сравнение бесконечно малых величин.

2.1. Пусть $x\to0$. Тогда $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a},\ (a>0)$ - бесконечно малая величина. Определить порядок её относительно *x.*

2.2. Определить порядок относительно *x* бесконечно малой при $x\to0$: $\delta(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1.$

2.3. Сравнить две бесконечно малых величины:

$\alpha(x)=e^x-\cos x$ и $\beta(x)=\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2).$

3. Исследование функции на непрерывность.

3.1. Функция *f(x)* определена следующим образом: $f(x)=\begin{cases} y=0, & при\ x<0;\\ y=x, & 0\le x<1;\\ y=-x^2+4x-2, & 1\le x<3;\\ y=4-x, & x\ge3.\end{cases}$

3.2. Исследовать характер разрыва функции $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ в точке *x=0.*

4. Найти производные следующих функций.

$y = 3x^2 - 5x + 1;$ $\quad y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2};$ $\quad y = (x - 0{,}5)^2.$

$f(t) = \dfrac{t^2 - 5t - 1}{t^3};$ Найти $f(-1),\ f'(-1),\ f'(2),\ f'\left(\dfrac{1}{a}\right).$

$y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1).$ $\quad y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x}).$

$\varphi(z) = \dfrac{a - z}{1 + z},\ \varphi'(1) = ?$ $\quad u = \dfrac{1}{v - \sqrt{a^2 + v^2}},\ u' = ?$

$\rho = \varphi \sin\varphi + \cos\varphi.$ $\quad y = \dfrac{1}{4} tg^4 x.$

$y = \sin^2(\cos 3x).$ $\quad y = arctg\, x^2.$

$y = \ln(\arccos 2x).$ $\quad y = \sqrt[3]{\ln\sin\dfrac{x+3}{4}}.$

$y = 2^{3^x}.$ $\quad y = x^{x^2}.$ $\quad y = (\sin x)^{\cos x}.$

$y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}.$ $\quad y = \dfrac{3x^2 - 1}{3x^2} + \ln\sqrt{1 + x^2} + arctg\, x.$

$\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$ $\quad y'_x = ?$ $\quad y = 1 - x^2 - x^4;\quad y''' = ?$

$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2});\quad y'' = ?$

Найти производную неявной функции:

$x^3 y - y^3 x = a^4.$ $\quad xe^y + ye^x - e^{xy} = 0.$ $\quad xy - \ln y = a.$

5. Доказать, что функция $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$ удовлетворяет уравнению $(1 - x^2)y' - xy = 1$.

$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ $\quad y'_x = ?$ $\quad$ ***21.8.*** $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$ $\quad y'_x = ?$

Доказать, что $y = e^x \sin x$ удовлетворяет соотношению: $y'' - 2y' + 2y = 0.$

6. Исследование функции с помощью производной

6.1 Показать, что функция: $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ убывает в интервале (-2,1).

6.2 Показать, что функция: $y = arctg\,x - x$ везде убывает.

6.3 Найти экстремумы функций:

$$y = 2x^3 - 3x^2; \qquad y = (x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x.$$

6.4 Найти наибольшее и наименьшее функции на указанном отрезке: $y = x^4 - 2x^2 + 5; \quad [-2,2].$

6.5 Найти точки перегиба и интервалы выпуклостей и вогнутостей:

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5. \qquad y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}, \quad (a > 0).$$

6.6 Найти асимптоты графика функции:

$$y = 2x + arctg\frac{x}{2}. \qquad y = x\ln(e + \frac{1}{x}).$$

6.7 Провести исследование и построить график: $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}.$

7. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}. \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - arctg\,x}{x^3}. \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\pi - 2arctg\,x}{\ln(1 + \frac{1}{x})}.$$

$$\lim_{x\to\infty}[(\pi - 2arctg\,x)\ln x]. \qquad \lim_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}).$$

$$\lim_{x\to 0}(ctg\,x - \frac{1}{x}). \qquad \lim_{x\to 0}x^{\sin x}.$$

$$\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}. \qquad \lim_{x\to a}(2 - \frac{x}{a})^{tg\frac{\pi x}{2a}}.$$

8. Дифференцирование функции нескольких переменных.

8.1 Найти частные производные функций:

$u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ при $x = 0, y = 0, z = \dfrac{\pi}{4}$.

$z = \arcsin(x - y),\ x = 3t,\ y = 4t^3$. Найти $\dfrac{dz}{dt}$.

$z = arctg(xy),\ y = e^x.$ Найти $\dfrac{dz}{dx}.$

$z = (x^2 + y^2) \cdot e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}.$ Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, dz.$

$u = \sin x + F(\sin y - \sin x).$ Убедиться, что $\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos x + \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x \cdot \cos y$ при $\forall F.$

$z = x^2 \ln y;\ x = \dfrac{u}{v};\ y = 3u - 2v;\quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = ?\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

8.2 Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно:

$$e^z - xyz = 0.\quad \frac{\partial z}{\partial x} = ?\quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

8.3 Найти полный дифференциал: $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2.$

8.4 Найти значение полного дифференциала $z = e^{xy}$ при $x = 1;\ y = 1;\ \Delta x = 0.15;\ \Delta y = 0.1;$

8.5 Дана функция: $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5.$ Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали в точке:

9.1 $z = xy$ *в точке* $(1,1,1).$

9.2 $3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0$ *в точке* $(1,1,1).$

10.Найти точки экстремума функции

11.1 $z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$

11.2 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

11. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

12.1 $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4.$

12.2 $z = x^2y(4 - x - y)$ в треугольнике $x = 0;\ y = 0;\ x + y = 6.$